DIE STATIK DES KRANBAUES

VON

W. LUDWIG ANDRÉE

ALTGELD HALL STACKS
THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
621.87
An2s3

[redacted]

DEC 26 1957

ALTGELD HALL STACKS
Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

[redacted]
University of Illinois Library

FEB 26 1962

L161—H41

DIE STATIK DES KRANBAUES

MIT BERÜCKSICHTIGUNG
DER VERWANDTEN GEBIETE EISENHOCH-
FÖRDER- UND BRÜCKENBAU

VON

W. LUDWIG ANDRÉE

DRITTE AUFLAGE

(MANULDRUCK)

MIT 554 ABBILDUNGEN UND 1 TAFEL

MÜNCHEN UND BERLIN 1922
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTES, VORBEHALTEN
COPYRIGHT 1922 BY R. OLDENBOURG, MÜNCHEN

621.87
An 283

[redacted]

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Meine an die »Statik des Kranbaues« geknüpften Erwartungen haben sich durch die freundliche Aufnahme, die das Buch bei den Fachgenossen gefunden hat, erfüllt. Um so bemerkenswerter für mich, als die Schrift noch nicht ganz allen Anforderungen entsprochen hat. Mit freudiger Hand bin ich an die Bearbeitung der zweiten Auflage gegangen, und indem ich sie bedeutend erweiterte und verbesserte, hoffe ich, mit ihr nunmehr eine umfassende »Statik des Kranbaues« gebracht zu haben.

Ich hielt es für zweckmäßig — und glaube, damit den Wünschen des Lesers entgegenzukommen — die Berechnung einiger mit dem Kranbau zusammenhängender Hochbau-, Förderbau- und Brückenkonstruktionen mit einzufügen. Dann auch schien es angebracht, die Entstehung der in dem Buche angewendeten Formeln nachzuweisen. Es wurden im Anhang in knapper Form die wichtigsten Verfahren der Statik unbestimmter Systeme entwickelt, so daß man sich Klarheit über die neueren Berechnungsmethoden bei statisch unbestimmten Fällen verschaffen kann.

Duisburg, im Oktober 1913.

W. L. Andrée.

510490

INHALTSÜBERSICHT

ERSTER ABSCHNITT.

LAUFKRANE.

Seite

Einführung in das Momentenverfahren 1
Beispiel 1. Ein Laufkranträger, befahren von einer Lastkatze, deren Raddrücke gleich groß sind 2
Beispiel 2. Ein Laufkranträger, befahren von einer Lastkatze, deren Raddrücke verschieden groß sind 5
Beispiel 3. Ein vollwandiger Laufkranträger 8
Beispiel 4. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit parallelen Gurten . . 9
Beispiel 5. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gekrümmtem Untergurt 14
Beispiel 6. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gekrümmtem Obergurt 16
Beispiel 7. EinLaufkranträger aus Fachwerk mit unterteiltem System. Paralleie Gurte 19
Beispiel 8. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit unterteiltem System. Gebogener Untergurt. 24
Beispiel 9. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gezogenen Diagonalen 27
Beispiel 10. Ein Laufkranträger (Balken mit einem Zugband unterspannt) 29
Verschiedene Arten von Unterspannungen 33
Beispiel 11. Ein Kopfträger zu einem Laufkran 35
Tabellen über die Tragkraft und die Hauptabmessungen von normalen Laufkranen 38

ZWEITER ABSCHNITT.

KRANLAUFBAHNEN.

Eine auf Mauerwerk oder Beton verlagerte Laufschiene . . . 48
Beispiel 12. Zahlenaufgabe 49
Entwicklung von Näherungsformeln 49
Nachprüfung des obigen Zahlenbeispiels 51
Beispiel 13. Zahlenaufgabe 52
Tabellen über häufig vorkommende Laufbahnen 52
Auf Holzschwellen verlegte Laufschienen 53
Beispiel 14. Ein Kranbahnträger, befahren von beliebig vielen Lasten; allgemeine Anwendung des Momentenverfahrens 55
Beispiel 15. Ein Kranbahnträger, befahren von zwei 50 t-Laufkranen mit je vier bzw. zwei Laufrädern 56

		Seite
Beispiel 16.	Ein Kranbahnträger, befahren von vier ungleichen Lasten .	60
Beispiel 17.	Eine im Freien stehende Kranlaufbahn auf Stützen . . .	64
Beispiel 18.	Einfluß der Temperaturveränderung bei einer Laufbahn . .	79
Beispiel 19.	Eine Kranlaufbahn, vollwandiger Träger, unterspannt mit einem parabelförmigen Zugband	81
Beispiel 20.	Zahlenaufgabe	86
	Ermittelung der Durchbiegung des Trägers	91
Beispiel 21.	Verstärkung einer Kranlaufbahn aus Fachwerk infolge höherer Belastung	93
Beispiel 22.	Eine vollwandige Kranlaufbahn auf drei Stützen	96
Beispiel 23.	Eine Kranlaufbahn aus Fachwerk auf drei Stützen	100
Beispiel 24.	Eine vollwandige Kranlaufbahn auf vier Stützen	102
	Träger auf vielen Stützen (Tafel für Einflußlinien der Momente im Anhang), Beispiel hierzu	109
Beispiel 25.	Eine Portalstütze zu einer Einschienenkatzenbahn	110
	Eine einseitige Stütze zu einer Einschienenkatzenbahn . .	113
	Ermittelung der Verbiegung der Stütze	115

DRITTER ABSCHNITT.

VERLADEBRÜCKEN UND AUSLEGERKRANE.

Beispiel 26.	Ein fahrbarer Brückenkran mit einseitigem Kragarm, befahren von einem Drehkran	117
	Die Querrahmen	127
Beispiel 27.	Schrägstützen zu einer Verladebrücke	129
	Berechnung von rahmenartigen Stützen	131
Beispiel 28.	Eine Verladebrücke (Dreieckträger)	139
Beispiel 29.	Querschnittsanordnung einer Verladebrücke.	141
Beispiel 30.	» » »	143
Beispiel 31.	» » »	145
Beispiel 32.	» » »	146
Beispiel 33.	» » »	147
Beispiel 34.	» » »	148
Beispiel 35.	Stütze zu einer Verladebrücke (Statisch bestimmtes und statisch unbestimmtes System)	148
Beispiel 36.	Ein feststehendes Portal zu einem Krangerüst	153
Beispiel 37.	Eine Verladebrücke mit geschwungenem Obergurt.	155
Beispiel 38.	Ein fahrbarer Auslegerkran	156
Beispiel 39.	Ein fahrbarer Auslegerkran (überspannter Träger)	159
Beispiel 40.	Stütze zu einer Verladebrücke	165
Beispiel 41.	Eine fahrbare Verladebrücke mit einziehbarem Ausleger . .	166
Beispiel 42.	Eine fahrbare Verladebrücke (überspannter Träger)	171
	Bremskräfte bei Kranen (Massenkräfte)	180
	Die Durchbiegungen obiger Verladebrücke	188
Beispiel 43.	Ein Verladegerüst. Vollwandiger Hauptträger mit Überspannung	191
Beispiel 44.	Ein auf Verdrehen beanspruchter Brückenquerschnitt . . .	194

VIERTER ABSCHNITT.

TURM- UND DREHKRANE.

Seite

Beispiel 45. Ein fahrbarer Turmkran mit drehbarem Ausleger 198
Beispiel 46. Ein einziehbarer Ausleger zu einem Drehkran 202
Untersuchung von fehlerhaften Systemen 204
Nebenspannungen bei sehr spitzen Auslegern 206

FÜNFTER ABSCHNITT.

PORTAL- UND HELLGENGERÜSTE.

Beispiel 47. Ein feststehendes Portal mit Kragarmen 209
Beispiel 48. Ein feststehendes Portal 219
Beispiel 49. Ein feststehendes Portal 223
Beispiel 50. Ein Hellgengerüst (einfach statisch unbestimmt) 225
Beispiel 51. Ein Hellgengerüst. Eingespanntes Portal (dreifach statisch unbestimmt). Näherung und genaue Berechnung 242
Einige öfter vorkommende Rahmenarten 260

SECHSTER ABSCHNITT.

SCHWEBEFÄHREN UND KABELBAHNEN.

Beispiel 52. Eine Schwebefähre 263
Die Portalstütze dazu 265
Beispiel 53. Eine Schwebefähre (Träger mit überspannter Kette) 267
Die Portalstütze dazu 273
Beispiel 54. Untersuchung an einem Seil zu einer Kabelbahn (Seil über Rollen beweglich geführt) 279
Beispiel 55. Untersuchung an einem an beiden Enden fest aufgehängten Kabel 284

SIEBENTER ABSCHNITT.

SCHWIMM- UND WERFTKRANE.

Beispiel 56. Ein Schwimmkran 285
Beispiel 57. Ermittelung der Schwimmlagen eines Schwimmkranpontons (mit Zahlenbeispielen) 290
Beispiel 58. Ein Hammerkran 296
Verschiedene Arten von Hammerkranen 298
Statische Behandlung eines Druckringes zu einem Hammerkran 299

ACHTER ABSCHNITT.

GREIFER UND TRAGORGANE.

Beispiel 59. Ein Greifer (Ermittelung der Schließkraft) 307
Beispiel 60. Ein Greifer » » » 309
Beispiel 61. Ein Greifer » » » 309
Beispiel 62. Ein Greifer » » » 311

Seite

Beispiel 63. Eine Knüppelzange (Ermittelung der Schließkraft) 311
Beispiel 64. Ein Schäkel 312

NEUNTER ABSCHNITT.
FÖRDERGERÜSTE UND SCHRÄGBRÜCKEN.

Beispiel 65. Ein Fördergerüst 316
Nähere statische Untersuchung der Schrägstrebe. 320
Beispiel 66. Ein Fördergerüst 322
Beispiel 67. Eine Schrägbrücke (Last auf dem Obergurt laufend) . . . 324
Beispiel 68. Eine Schrägbrücke (die wandernde Last hängt am Untergurt) 326
Beispiel 69. Ein auf einer schrägen Brücke durch ein Zugseil beförderter Lastwagen 327

ZEHNTER ABSCHNITT.
DREHBRÜCKEN, KLAPPBRÜCKEN UND KLEINERE PRAKTISCHE AUFGABEN.

Beispiel 70. Eine Drehbrücke 329
Beispiel 71. Eine doppelte Klappbrücke 331
Beispiel 72. Ein fahrbarer Konsolkran 332
Beispiel 73. Ein fahrbarer Konsolkran (Ermittelung von Formänderungen) 333
Beispiel 74. Ermittelung der Senkung der Auslegerspitze eines Drehkranes 336
Beispiel 75. Ein Verladegerüst aus vollwandiger Blechkonstruktion. . . 337
Beispiel 76. Hemmung eines fahrenden Kranes durch Auflaufen auf eine schiefe Ebene 338
Beispiel 77. Ermittelung der günstigsten Stützweite bei einer Verladebrücke 342
Beispiel 78. Fundament zu einer Kranbahnstütze 343
Beispiel 79. Ein Portalgerüst 347
Beispiel 80. Eine Schiffbrücke (Balken auf Pontons) 350

ANHANG.

Seite 355 bis 370.

Erster Abschnitt.

Laufkrane.

Für die meisten sehr einfachen Belastungsfälle im Kranbau, insbesondere bei Laufkranen, Kranbahnen und Verladebrücken, läßt sich für die Ermittlung der Maximalmomente ein äußerst bequemes Verfahren entwickeln.

Wir betrachten zunächst einen Träger auf zwei Stützen mit der Spannweite l, befahren von einer Last P. (Fig. 1.)

Das Moment unter dem Lastangriffspunkt im veränderlichen Abstande x vom Auflager A hat den Wert

$$M_x = \frac{P}{l} \cdot x\,(l - x)\,. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck ist die Grundform einer Parabel von der Länge l und der Bogenhöhe $\frac{P \cdot l}{4}$.

Für $x = 0$ wird $M_x = 0$,
» $x = l$ » $M_x = 0$,
» $x = \frac{l}{2}$ » $M_x = \frac{P \cdot l}{4}$.

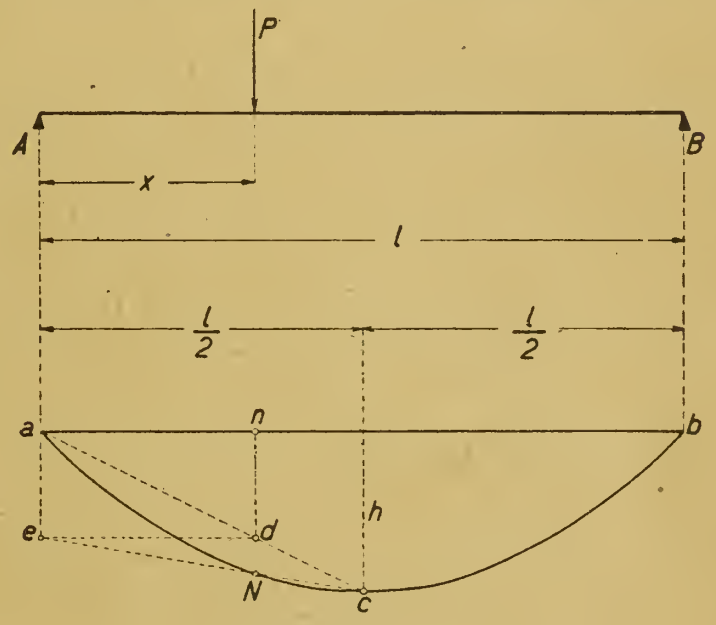


Fig. 1—1a.

Gelingt es uns, weitere Belastungsarten auf dieselbe Grundform zu bringen, Gleichung 1, dann sind wir in der Lage, auf denkbar einfachstem Wege den täglichen Aufgaben des Kranbaues beizukommen.

Die Konstruktion einer Parabel bei gegebener Länge und Bogenhöhe:

Es soll der unter einer beliebigen Stelle n liegende Bogenpunkt N festgelegt werden. Man zieht nach Fig 1 a die Schräge $a—c$,

lotet von n herunter und erhält den Schnittpunkt d. Von diesem geht man wagerecht herüber nach der Senkrechten unter a. Die gerade Verbindung dieses Punktes e mit dem Punkte c schneidet auf der verlängerten Lotrechten unter n den gewünschten Bogenpunkt N ab.

Beispiel 1. Ein Laufkranträger mit der Spannweite l. Befahren von einer Lastkatze, deren Raddrucke P, bei einer Achsenentfernung b. Die Belastung jedes Hauptträgers ist daher ein rollendes Lastenpaar P—P. Das Eigengewicht des Trägers sei g pro m. Nebenkräfte, wie z. B. Bremskraft oder Schrägzug der Last sollen unberücksichtigt bleiben.

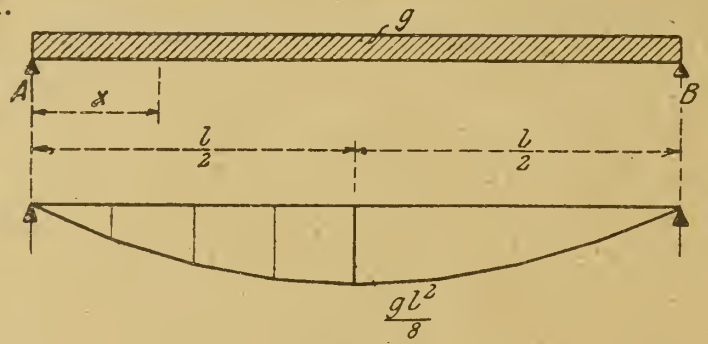


Fig. 2—2a.

Zur Ermittelung der Querschnitte des Trägers bedarf es im allgemeinen der Kenntnis der Maximalbiegungsmomente sowie der größten Schubkräfte.

a) Die Biegungsmomente aus dem Eigengewicht. (Fig. 2 und 2 a.)
Das Moment im Abstande x vom Auflager A ist

$$M_x^g = \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} = \frac{g \cdot x}{2}(l - x) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Die Momente verlaufen somit nach einer Parabel, deren Länge l ist, bei einer Bogenlänge $\frac{g \cdot l^2}{8}$.

b) Die Biegungsmomente aus dem rollenden Lastenpaar. (Fig. 3, 3 a, 3 b und 3 c.)
Das Moment unter der Last I im Abstande x vom Auflager A ist

$$M_x = \frac{2 \cdot P}{l}\left\{\left(l - \frac{b}{2}\right) - x\right\} \cdot x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Gleichung läßt eine Parabel erkennen von der Länge $l - \frac{b}{2}$.

Ihr Maximum tritt ein bei

$$x = \frac{l - \frac{b}{2}}{2},$$

nämlich zu

$$M_x^{\max} = \frac{P}{2 \cdot l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Die Fig. 3 a zeigt die Konstruktion der Kurve; sie ist nur gültig bis zum Punkte *m*, d. h. bis zum Augenblick, wo die Last II über das Auflager *B* schreitet.

Wie bekannt, liegt M_x^{max} im Abstande $\frac{b}{4}$ aus der Trägermitte.

Dieselben Beziehungen, nur vom Auflager *B* ausgehend, werden für die Momente unter der Last II aufgestellt. Fig. 3 b. Es bedarf

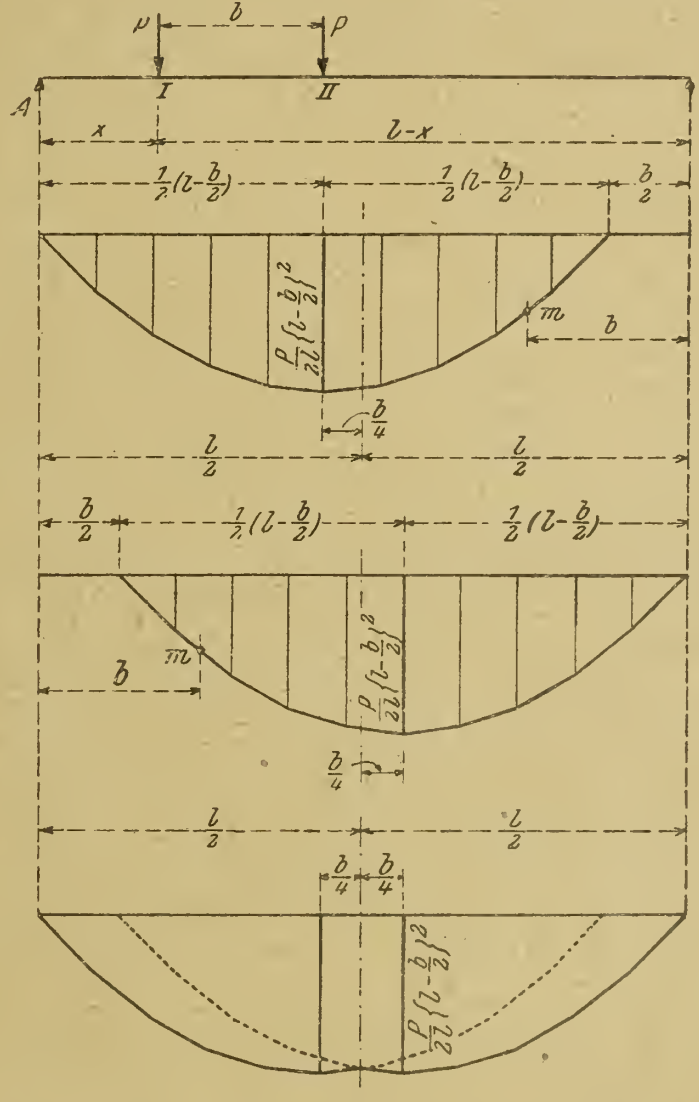


Fig. 3.

Fig. 3 a.

Fig. 3 b.

Fig. 3 c.

aber nur, da die Lasten *P* einander gleich sind, einer Umkehrung der in der Fig. 3 a gezeichneten Linie nach rechts.

Beide Kurven werden nunmehr auf einer gemeinsamen Basis zusammengeworfen; der größte Umriß (Fig. 3 c) liefert sodann die Maximalmomente des ganzen Trägers.

c) Nachstehendes gilt für den Fall, wo die über das Auflager hinwegrollenden Lasten keinen Einfluß mehr auf den Träger haben.

Der Wert M_x^{max} (Gleichung 4) nimmt ab mit wachsender Achsentfernung *b*. Schließlich tritt ein gewisser Grenzfall ein, wo M_x^{max}

durch die Einzellast P in der Trägermitte erzeugt wird. Diesem Zustand entspricht die Bedingung

$$\frac{P}{2 \cdot l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2 = \frac{P \cdot l}{4},$$

woraus sich ergibt

$$b = 0{,}586 \cdot l,$$

d. h. bei

$$b > 0{,}586 \cdot l$$

ist stets

$$M_x^{\max} = \frac{P \cdot l}{4}.$$

Gleichwohl wird auch hier wie oben die Konstruktion der Maximalmomente vorgenommen; es ist jedoch noch folgendes zu beachten:

Von $b = 0{,}5\, l$ an muß der Scheitelbogen einer Parabel von der Länge l und der Bogenhöhe $\frac{P \cdot l}{4}$ in die Herzspitze des Planes gezeichnet werden. Fig. 3 c. Für gewöhnlich aber genügt eine geradlinige Überbrückung der Herzspitzen.

Die Maximalmomente des Trägers ergeben sich schließlich durch Addition der Momente aus dem Eigengewicht und der rollenden Last.

d) Die Schubkräfte aus Eigengewicht.

Die Schubkraft im Querschnitt x vom Auflager A ist

$$T_x = g\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Fig. 4 zeigt die Auftragung der geradlinigen Funktion.

e) Die Schubkräfte aus der rollenden Last.

Fährt das Lastenpaar von rechts nach links vor, so wirkt die Auflagereaktion A als größte Schubkraft bis zum Angriffspunkt I. Ihre Ausdrucksform ist

$$T_x = \frac{2\,P}{l}\left\{\left(l - \frac{b}{2}\right) - x\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für $x = (l - b)$ wird $T_x = \frac{P\,b}{l}$,

für $x = o$ wird $T_x = 2\,P - \frac{P\,b}{l}$.

Die Konstruktion der Schubkraftlinie ist auf Grund dieser Grenzwerte in Fig. 4 a angegeben. Sie liefert dasselbe wie das bekannte,

rein zeichnerische Verfahren der *A*-Linie, wie es durch die gestrichelte Linie angedeutet ist.

Man wird jetzt zweckmäßig das Schubkraftdiagramm aus Eigengewicht mit dem der rollenden Last vereinigen (Fig. 4 b). Die Wirkung der Schubkraft von *A* bis zum Punkte *n* ist positiv, d. h. es wird

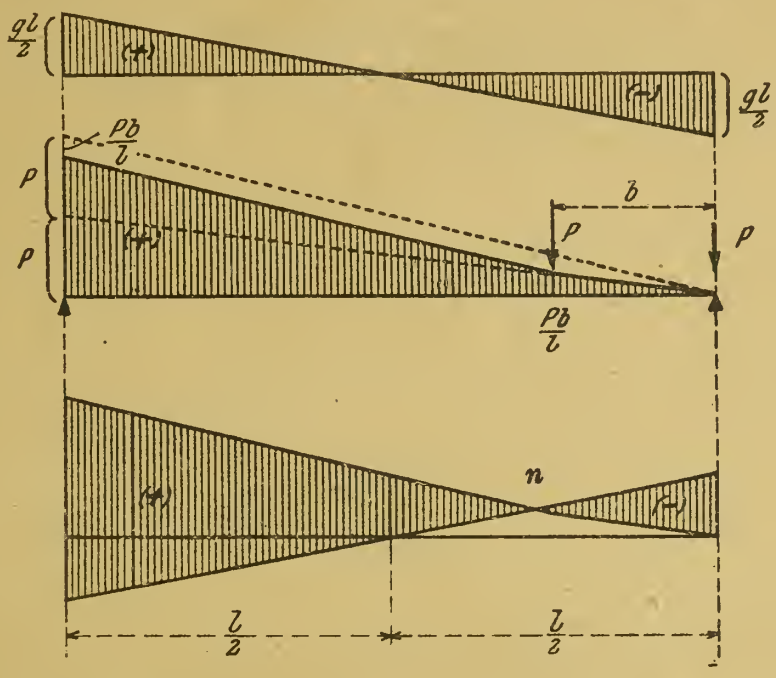


Fig. 4.

Fig. 4a.

Fig. 4b.

der links vom Querschnitt *x* übrige Trägerteil gegen den rechts eingespannt gedachten nach oben abgeschert. Von *n* bis *B* ist die Wirkung umgekehrt.

Natürlich erleidet die rechte Trägerhälfte bei von *A* nach *B* vorfahrendem Lastenpaar dieselben positiven Schubkräfte wie der linke Trägerteil.

Beispiel 2. Derselbe Laufkranträger, nur befahren von einer Lastkatze, deren Raddrucke verschieden groß sind, nämlich P_1 und P_2.

a) Die Biegungsmomente aus dem Eigengewicht wie bei Beispiel 1.

b) Die Biegungsmomente aus dem rollenden Lastenpaar P_1—P_2.

Das Moment unter der Last 1 im Abstande *x* von *A* (Fig. 5) ist

$$M_x = \frac{R}{l}\{(l-t)-x\}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo *R* die Resultierende der Kräfte und *t* ihr Abstand von 1 bedeuten.

$$R = P_1 + P_2;\ t = \frac{P_2 b}{R}.$$

Gleichung 7 bildet eine Parabel mit der Länge

$$(l - t)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{R}{4\,l}\{l - t\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Konstruktion der Kurve ist in Fig. 5 a vorgenommen. Ihre Gültigkeit geht bis zum Punkte n im Abstande b von B.

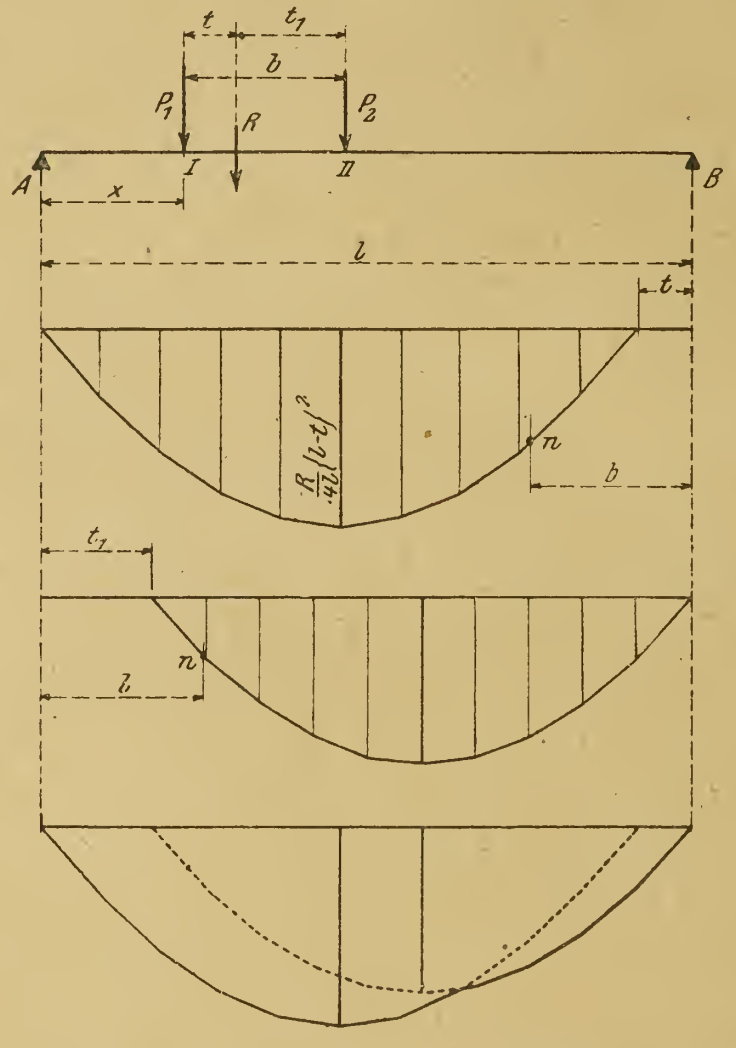


Fig. 5.

Fig. 5 a.

Fig. 5 b.

Fig. 5 c.

Das Moment unter der Last II im Abstande x von B (Fig. 5 b) ist

$$M_x = \frac{R}{l}\{(l - t_1) - x\}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$R = P_1 + P_2;\; t_1 = \frac{P_1 \cdot b}{R}.$$

Auch Gleichung 9 liefert eine Parabel, und zwar von der Länge

$$(l - t_1)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{R}{4\,l}\{l - t_1\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Ihre Auftragung siehe Fig. 5 b. Bezüglich des Punktes n gilt dasselbe wie oben.

Beide Linienzüge werden auf einer gemeinsamen Basis vereinigt; der äußerste Umriß (Fig. 5 c) gibt die Maximalmomente des ganzen Trägers aus der rollenden Last.

c) Nachstehendes gilt für den Fall, wo die über das Auflager hinwegrollenden Lasten keinen Einfluß mehr auf den Träger haben.

Der bei Beispiel 1 gekennzeichnete Grenzwert tritt auch hier ein, wenn gesetzt wird

$$\frac{R}{4\,l}\{l-t\}^2=\frac{P_1 l}{4}.$$

Hieraus ermittelt sich, nach Einführung von

$$t=\frac{P_2 b}{R},$$

$$b=\frac{R}{P_2}\,l\left(1-\sqrt{\frac{P_1}{R}}\right),$$

d. h. wenn b größer als vorstehender Wert, ist das Maximalmoment stets

$$M^{\max}=\frac{P_1 l}{4}.$$

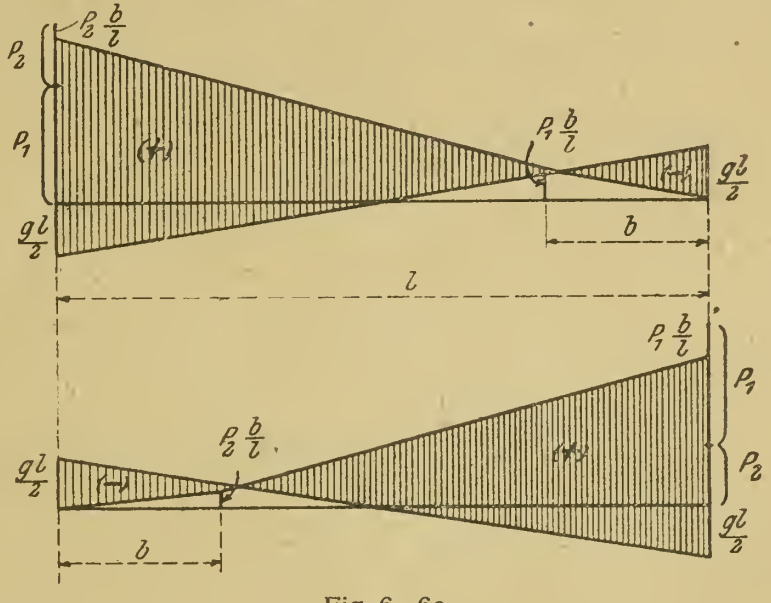


Fig. 6–6a.

Sodann muß noch untersucht werden, ob die Last P_1 allein, wenn b genügend groß ist, größere Momente erzeugt als die in der Herzspitze gelegenen. Der Abstand der letzteren von A ist

$$\frac{P_1\cdot l}{R}.$$

Die Maximalmomente des Trägers ergeben sich schließlich aus der Addition der Momente aus Eigengewicht und der rollenden Last.

d) Die Schubkräfte aus dem Eigengewicht wie bei Beispiel 1.

e) Die Schubkräfte aus der rollenden Last.

Bei von rechts nach links vorfahrendem Lastenpaar ist die Schubkraft zwischen Last I und A

$$T_x=\frac{R}{l}\{(l-t)-x\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für $x=(l-b)$ wird $T_x=\frac{P_1 b}{l}$,

für $x=o$ wird $T_x=(P_1+P_2)-\frac{P_2 b}{l}$.

Fig. 6 bietet die Aufzeichnung der Schubkräfte in Verbindung mit den Schubkräften aus dem Eigengewicht.

Ebenso ermitteln sich die Schubkräfte bei von links nach rechts vorfahrendem Lastenpaar. Ihr Verlauf in Zusammenwirkung mit den Schubkräften aus Eigengewicht ist in Fig. 6 a angegeben.

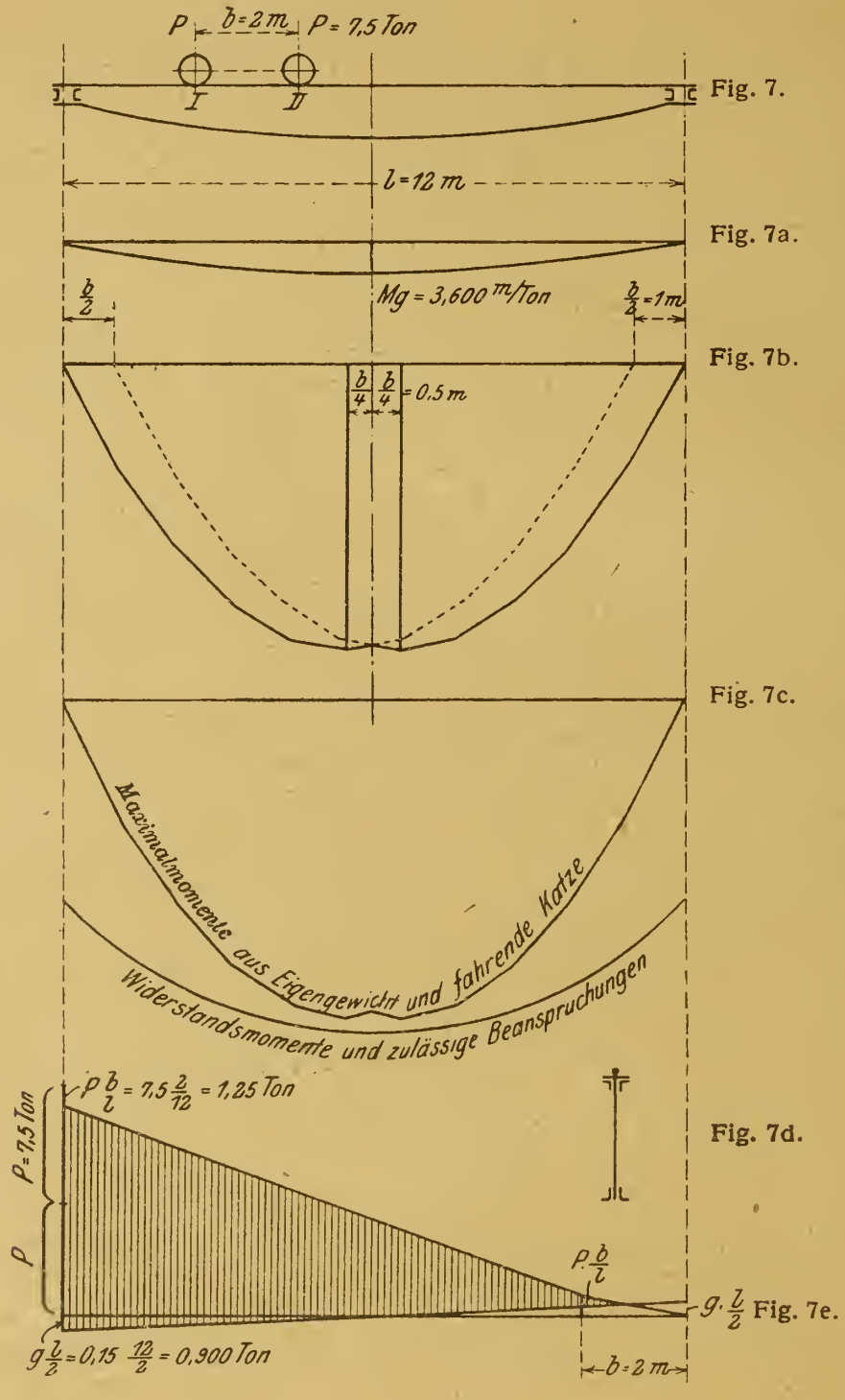


Fig. 7.
Fig. 7a.
Fig. 7b.
Fig. 7c.
Fig. 7d.
Fig. 7e.

Beispiel 3. (Zahlenaufgabe). Ein Laufkranträger, vollwandig, mit der Spannweite $l = 12$ m. Raddrucke der Katze $P = 7{,}50\ t$, bei einer Achsentfernung $b = 2$ m (Fig. 7).

Das Eigengewicht des Trägers ist $g = 0{,}20$ t pro m.

a) Das Eigengewicht bewirkt ein Moment in der Mitte des Trägers von

$$M_0^g = \frac{g \cdot l^2}{8} = \frac{0{,}20 \cdot 12^2}{8} = 3{,}600 \text{ mt.}$$

Die Eigengewichtsmomente des ganzen Trägers sind somit gegeben durch Zeichnung der entsprechenden Parabel (Fig. 7 a).

b) Das Maximalmoment unter der Last I beträgt

$$M_0^P = \frac{P}{2l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2 = \frac{7{,}50}{2 \cdot 12}\left\{12 - \frac{2}{2}\right\}^2 = 37{,}792 \text{ mt.}$$

Über diese Bogenhöhe ist eine Parabel mit der Länge

$$\left(l - \frac{b}{2}\right) = 12 - \frac{2}{2} = 11 \text{ m}$$

zu entwerfen (Fig. 7 b).

Da eine symmetrische Belastung $P = P$ vorliegt, so gilt das Spiegelbild der Linie für die Momente unter der Last II. Der größte Umriß liefert somit die Maximalmomente des ganzen Trägers aus den rollenden Lasten.

Fig. 7 c gibt schließlich die Addititon der Momente aus Eigengewicht und der fahrenden Katze.

c) Die Dimensionierung des Trägers.

Der Grundquerschnitt ist in Fig. 7 d abgebildet. Die Trägerunterlinie soll parabelförmig verlaufen.

Man ermittle für möglichst viele Stellen des Trägers die Widerstandsmomente und trage sie im verhältnismäßigen Maßstab (W mal zulässige Materialbeanspruchung) in die Fig. 7 c ein. Dadurch wird ein anschaulicher Vergleich der geforderten mit den vorhandenen Widerstandsmomenten geschaffen.

Die Schubkräfte rufen nur geringfügige Beanspruchungen hervor. Infolge der Konstruktion ist der Träger am Ende, wo die Schubkräfte am größten sind, reichlich stark genug, sie aufzunehmen. Sicherheitshalber möge jedoch die Untersuchung des Querschnittes in Nähe des Kopfes empfohlen werden. Fig. 7 e liefert die hierbei in Frage stehenden Schubkräfte aus Eigengewicht und der rollenden Last.

Beispiel 4 (Zahlenaufgabe). Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit parallelen Gurten, von der Spannweite $l = 18$ m. Die Raddrucke der oben laufenden Katze $P_1 = 6$ t und $P_2 = 4$ t, bei einer Achsentfernung $b = 4$ (Fig. 8).

Das Eigengewicht des Trägers ist $g = 0{,}220$ t pro m.

Die Maximalmomentenlinie bietet ein bequemes Mittel zur Bestimmung der größten Gurtspannungen.

a) Eigengewichtsmomente. Die Höhe der Parabel ist

$$M_0^g = \frac{g \cdot l^2}{8} = \frac{0{,}220 \cdot \overline{18}^2}{8} = 8{,}910 \text{ mt.}$$

Siehe Auftragung (Fig. 8 a).

b) Momente aus der fahrenden Katze.

Die Momente unter der Last I waren nach Gleichung 7 Beispiel 2

$$M_x = \frac{R}{l}\{(l - t) - x\}x,$$

wo

$$R = P_1 + P_2 = 6 + 4 = 10 \text{ t,}$$

und

$$t = \frac{P_2 b}{R} = \frac{4 \cdot 4}{10} = 1{,}60 \text{ m.}$$

Die zu entwerfende Parabel hat die Länge

$$l - t = 18 - 1{,}60 = 16{,}40 \text{ m,}$$

und die Bogenhöhe

$$\frac{R}{4l}\{l - t\}^2 = \frac{10}{4 \cdot 18}\{18 - 1{,}60\}^2 = 37{,}356 \text{ mt.}$$

Fig. 8 b zeigt die Konstruktion der Linie.

Die Momente unter der Last II betragen nach Gleichung 9, Beispiel 2

$$M_x = \frac{R}{l}\{(l - t_1) - x\}\,x,$$

wo

$$t_1 = \frac{P_1 b}{R} = \frac{6 \cdot 4}{10} = 2{,}40 \text{ m.}$$

Die entsprechende Parabel hat die Länge

$$l - t_1 = 18 - 2{,}40 = 15{,}60 \text{ m}$$

und die Bogenhöhe

$$\frac{R}{4l}\{l - t_1\}^2 = \frac{10}{4 \cdot 18}\{18 - 2{,}40\}^2 = 33{,}800 \text{ mt.}$$

Die Zeichnung der Parabel ist ebenfalls in Fig. 8 b vorgenommen.

Der größte Umriß gibt die Maximalmomente des Trägers aus der rollenden Last.

Schließlich werden vorstehende Momente mit den Momenten aus Eigengewicht vereinigt (Fig. 8 b).

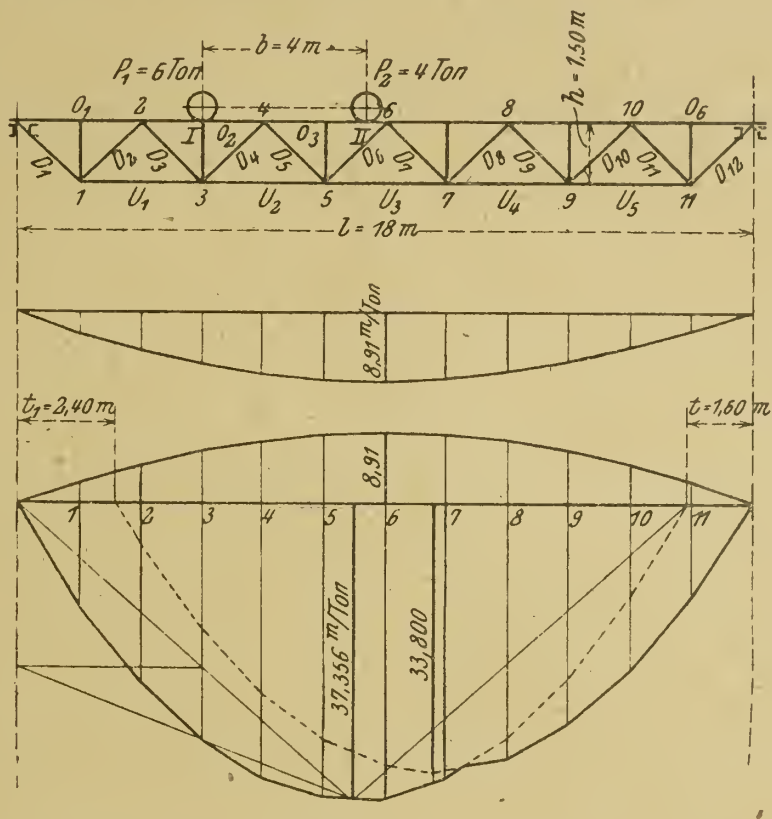


Fig. 8.

Fig. 8a

Fig. 8b.

Nunmehr ist man in der Lage, aus den Knotenmomenten mit Hilfe von

$$S = \frac{M}{h}$$

die größten Gurtspannungen zu ermitteln. Es ist z. B.

$$U_3^{\max} = + \frac{M_6}{h}$$

und

$$O_2^{\max} = - \frac{M_3}{h}.$$

Zu beachten ist, daß die Obergurtstäbe neben der Längskraft noch durch Biegung infolge der Raddrücke angegriffen werden. Eine genaue Bestimmung der durch letztere bewirkten Momente ist nicht möglich; es genügt, wenn annäherungsweise gesetzt wird

$$\mathfrak{M} = \frac{P_1 \cdot \lambda}{6},$$

wo λ die Entfernung der Knoten bedeutet.

Die wirkliche Inanspruchnahme eines Obergurtstabes ist daher

$$\sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}.$$

Man versucht vielfach, durch Verlegung des Trägersystems unterhalb der Schwerlinie des Stabes eine günstigere Spannungsverteilung zu erzielen (Fig. 9). Diese Manipulation bedarf jedoch guter Überlegung; allerdings entlastet die am Hebel *e* drehende Längskraft *S* die Faser *o* des Stabes, allein, wie Fig. 9 a zeigt, erzeugt der Raddruck zugleich auch negative Momente bei den Knoten, wodurch an diesen Stellen des Stabes die beabsichtigte Entlastung ins Gegenteil schlägt.

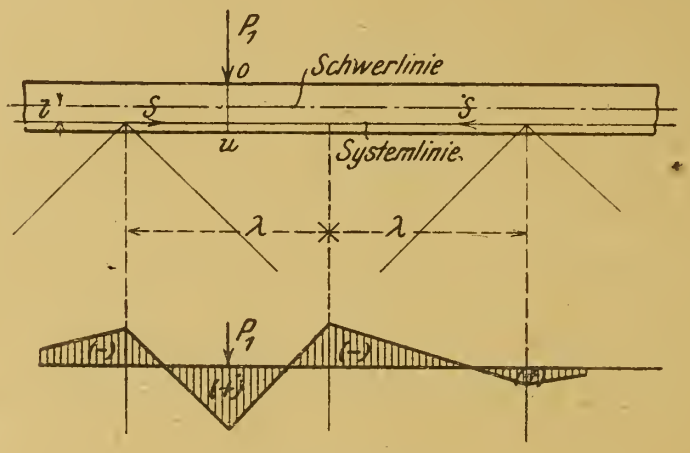


Fig. 9—9a.

Die Wirkungsweise für die Stabmitte, wenn die Systemlinie mit der Schwerlinie zusammenfällt, ist folgende. Das Biegungsmoment erzeugt in der oberen Faser *o* (Fig. 10) Druckspannung, in der unteren Faser *u* aber Zugspannung. Die Widerstandsmomente des Querschnittes, bezogen auf die obere und untere Faser sind

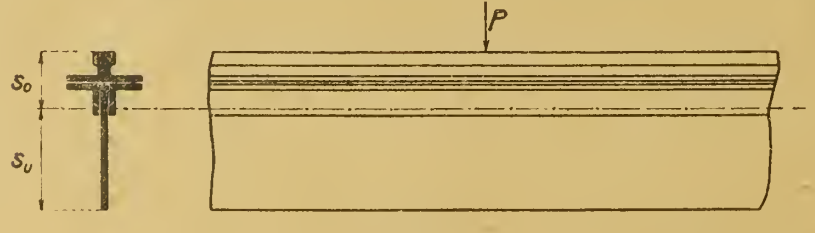


Fig. 10.

$$W_0 = \frac{J}{s_0},$$

und

$$W_u = \frac{J}{s_u}.$$

Dann ist die Materialbeanspruchung bei Zusammenwirkung der Biegung und der Längskraft — *S*

für die obere Faser $\sigma_0 = -\frac{S}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{W_0}$

und für die untere Faser $\sigma_u = -\frac{S}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W_u}.$

Im Knoten ergibt sich jedoch

$$\sigma_0 = -\frac{S}{F} + \frac{\mathfrak{M}'}{W_0}$$

und

$$\sigma_u = -\frac{S}{F} - \frac{\mathfrak{M}'}{W_u}.$$

Das Knotenmoment $\mathfrak{M}'$ kann annäherungsweise mit $\frac{\mathfrak{M}}{2}$ eingeführt werden.

c) Die größten Diagonalspannungen werden aus den Querkräften gefunden.

Die Querkräfte aus Eigengewicht bei einem Fachwerkträger verlaufen treppenförmig; die Mittelachse der Treppe ist die Querkraftlinie eines gewöhnlichen vollwandigen Balkens.

Das Querkraftdiagramm der rollenden Last ist die bereits erörterte *A*-Linie.

Um ein klares Bild über die Spannungen der Diagonalen zu erhalten, werden die Querkräfte der rollenden Last für beide Fahrrichtungen, zugleich die Querkräfte aus Eigengewicht über einer gemeinsamen Grundlinie aufgezeichnet. Vorbildlich hierfür ist Fig. 11.

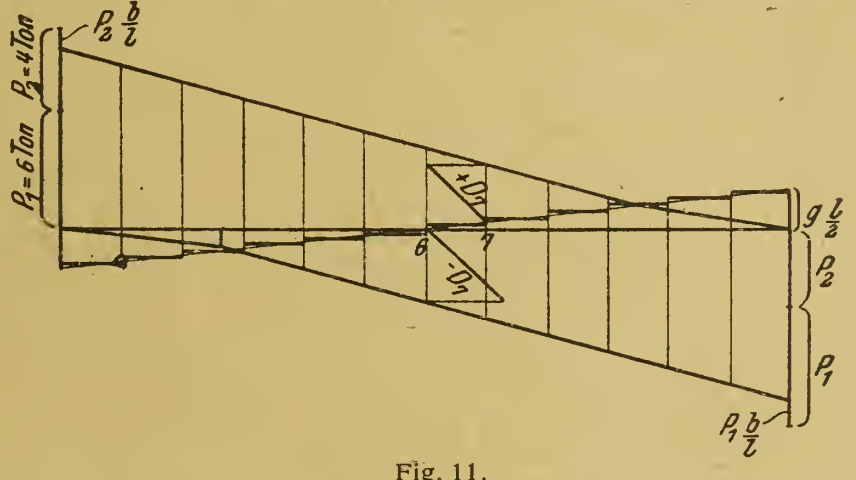


Fig. 11.

Beispielsweise sollen die größten Zug- und Druckspannungen der Schrägen D_7 ermittelt werden. Sie sind gegeben durch die Kenntnis der im Felde 6—7 tätigen größten Querkräfte. Diese zerlegen sich, da der Träger parallele Gurte hat, einfach wagrecht und in Richtung des fraglichen Stabes. Die von *B* aus vorfahrende Katze erzeugt Zugspannung im Stabe D_7, die ihr Maximum erreicht bei Stellung des ersten Rades I über Knoten 7. Dementgegen aber wird der Stab durch die Wirkung des Eigengewichtes gedrückt. Die Differenz der Spannungen, in diesem Falle positiv, ist die größte Zugkraft des

Stabes. Im Gegensatz hierzu bewirkt die von A aus vorfahrende Katze Druckspannung im Stabe D_7, die am stärksten wird, wenn das Rad II bis zum Knoten 6 vorgeschritten ist. Hinzu tritt sodann die Spannung desselben Sinnes aus Eigengewicht.

Ebenso werden die positiven und negativen Maximalspannungen aller übrigen Schrägen ermittelt.

d) Die Vertikalstäbe gehören nicht zum System des Trägers; sie vermitteln nur die Raddrucke sowie die Eigenlast des Obergurtes nach den unteren Knoten.

Sämtliche gedrückten Stäbe sind außer auf Querschnitt noch auf Knickung zu untersuchen. Die hierfür übliche Formel bei Verwendung von Flußeisen ist

$$\text{Erforderlich } J = n \cdot 0{,}466\, S \cdot l^2 = \text{cm}^4,$$

wo n (der Sicherheitsgrad) in der Regel mit 5 angenommen wird. S in t, l in m.

Beispiel 5 (Zahlenaufgabe). Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gekrümmtem Untergurt. Spannweite $l = 24$ m. Raddrucke der oben laufenden Katze 24 bzw. 34 t, bei einer Achsentfernung $b = 4{,}80$ m (Fig. 12).

Das Eigengewicht des Trägers ist $g = 0{,}625$ t pro m.

Infolge der ungleichen Lasten wird der linke Trägerteil stärker angegriffen als der rechte. Allein aus praktischen Gründen, ferner weil die Möglichkeit der Schwenkung der Katze vorliegt, soll der Träger symmetrisch ausgestaltet sein.

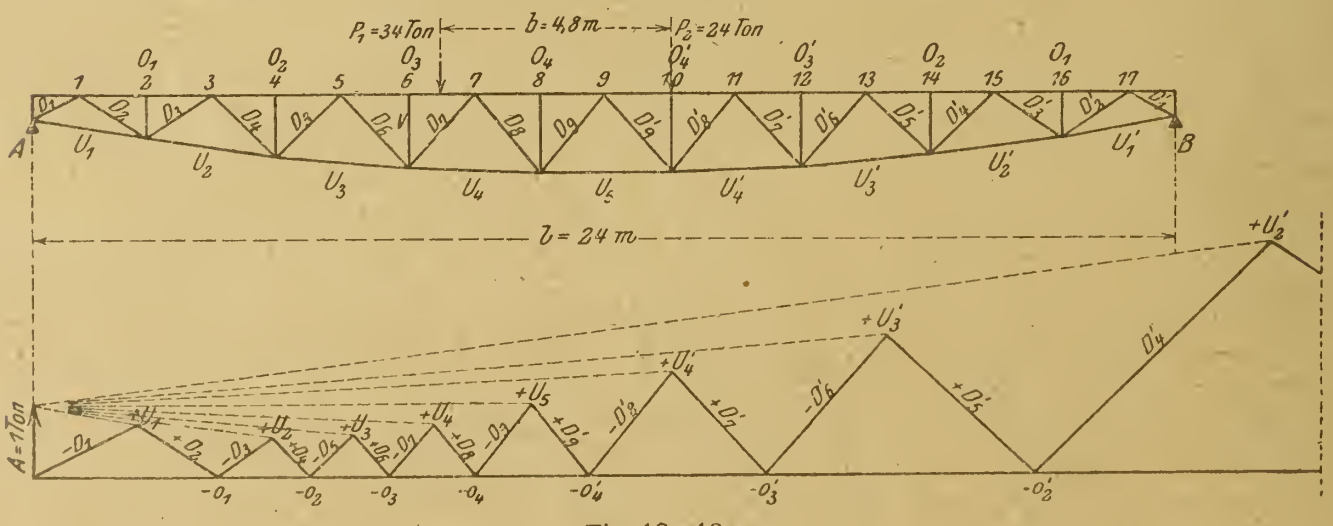


Fig. 12—12a.

Zur Berechnung eignet sich das bekannte Verfahren des Kräfteplanes für den Zustand $A = 1$ t in Verbindung mit der Scherkraftlinie (A-Linie). Der Träger wird am Ende B eingespannt ge-

dacht und mit der Kraft 1 t nach aufwärts am Ende A belastet. Die hierdurch bewirkten Stabspannungen des ganzen Systems sind in Plan Fig. 12 a entwickelt. Sie mögen allgemein mit S_1 bezeichnet werden. Wird nun statt der Krafteinheit 1 t die Kraft A am Ende angebracht, dann beträgt die Spannung eines beliebigen Stabes nunmehr

$$S = A \cdot S_1.$$

Die Laststellung, bei der jeder Stab die größte Spannung erleidet, ist bekannt. Ein Gurtsab der linken Trägerhälfte wird maximal beansprucht, wenn das Rad I über dem dem Stabe gegenüberliegenden Knoten steht. Die wirkliche Stabkraft berechnet sich somit aus der Multiplikation des zugleich eintretenden Auflagerdruckes A mit der in Plan Fig. 12 a ermittelten Spannung für $A = 1$ t.

$$S^{max} = A \cdot S_1.$$

Fig. 12b.

Ebenso bestimmen sich die größten Spannungen der Diagonalstäbe. Als Beispiel möge die Schräge D_6 herangezogen werden. Ihre maximale Zugkraft tritt ein, wenn das Rad I, bei von rechts nach links vorfahrender Katze, bis zum Knoten 6 vorgeschritten ist. Sie beträgt

$$S^{max} = + A \cdot S_1.$$

Der Stab kann aber auch auf Druck beansprucht werden. Dieser erreicht den Größtwert bei Stellung des Rades II über Knoten 5. Da jedoch mit der Möglichkeit eines Schwenkens der Katze gerechnet wird, so ist der dem Stab D_6 entsprechende Stab D_6' als Objekt des größten Druckes anzusehen. Dieser ergibt sich, bei von B nach A vorfahrender Katze, wenn die Last I über dem Knoten 13 steht. Mithin

$$S = - A \cdot S_1.$$

Die so gefundenen Maximalzug- und -druckspannungen können sowohl den Stab D_6 als auch den Stab D_6 angreifen; dasselbe gilt bezüglich der oben bestimmten Gurtspannungen für die rechte Trägerhälfte. Fig. 12 b liefert die für die Rechnung notwendigen A-Werte bei von B nach A vorfahrender Katze.

Die Vertikalstäbe sind am System des Trägers nicht beteiligt; ihre größte Druckkraft aus dem Raddruck ist

$$S = -P_1$$

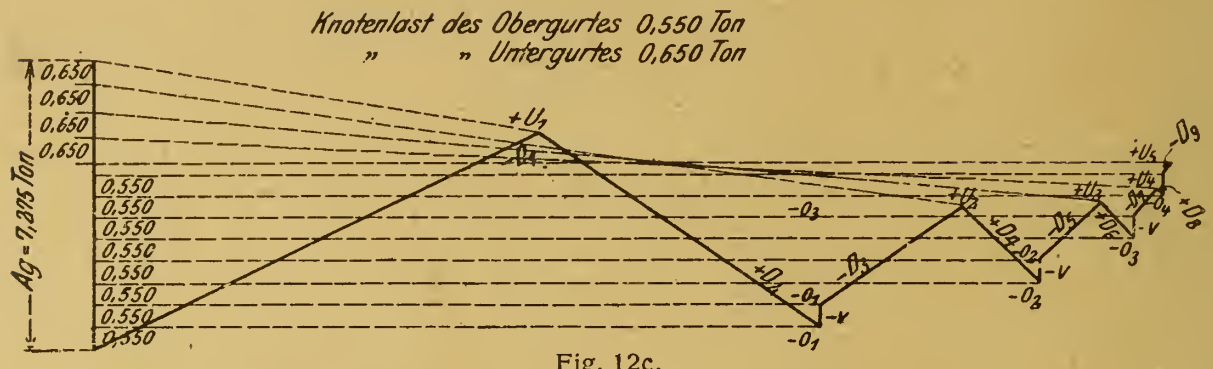


Fig. 12c.

Schließlich sind noch die Spannungen aus dem Eigengewicht zu ermitteln, eine Aufgabe, die, wie Plan Fig. 12 c zeigt, am einfachsten mit Hilfe eines Cremonakräftezuges gelöst wird. Die Knotenlast des Obergurtes ist 0,550 t, die des Untergurtes 0,650 t.

Beispiel 6. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gekrümmtem Obergurt, befahren von zwei Katzen, deren Raddrucke einander gleich sind. Die Katzen laufen zwischen den Hauptträgern, und zwar auf den Innenrippen der Untergurte. Der Radstand der Katzen ist b, während mit a die Entfernung der inneren Räder bezeichnet wird, wenn beide Katzen zusammengefahren sind.

Bei diesem Beispiel soll nur das Verfahren zur Bestimmung der größten Stabspannungen aus der rollenden Last angegeben werden. Die Spannungen aus dem Eigengewicht sind vermittelst eines Cremonaplanes als bestimmt vorausgesetzt.

a) Die Maximalgurtspannungen. Sie berechnen sich am schnellsten mit Hilfe der größten Knotenmomente.

Für den mittleren Trägerteil treten die größten Knotenmomente unter der Last II bzw. III auf, während sie nach dem Ende zu am größten werden unter der Last I bzw. IV.

Das Moment unter II im Abstande x von A ist

$$M_x = \frac{4P}{l}\left\{\left(l - \frac{a}{2}\right) - x\right\}x - P \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das erste Glied funktioniert nach einer Parabel von der Länge

$$\left(l - \frac{a}{2}\right)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{P}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Konstruktion der Kurve ist in Fig. 13 a angegeben.

Das zweite Glied der Gleichung ist eine Konstante, die auf der ganzen Strecke in Abzug gebracht werden muß.

Die schraffierte Fläche, deren Gültigkeit bis zu den Punkten *m* und *n* geht, gibt somit die Maximalmomente unter der Last II der wandernden Katzen an.

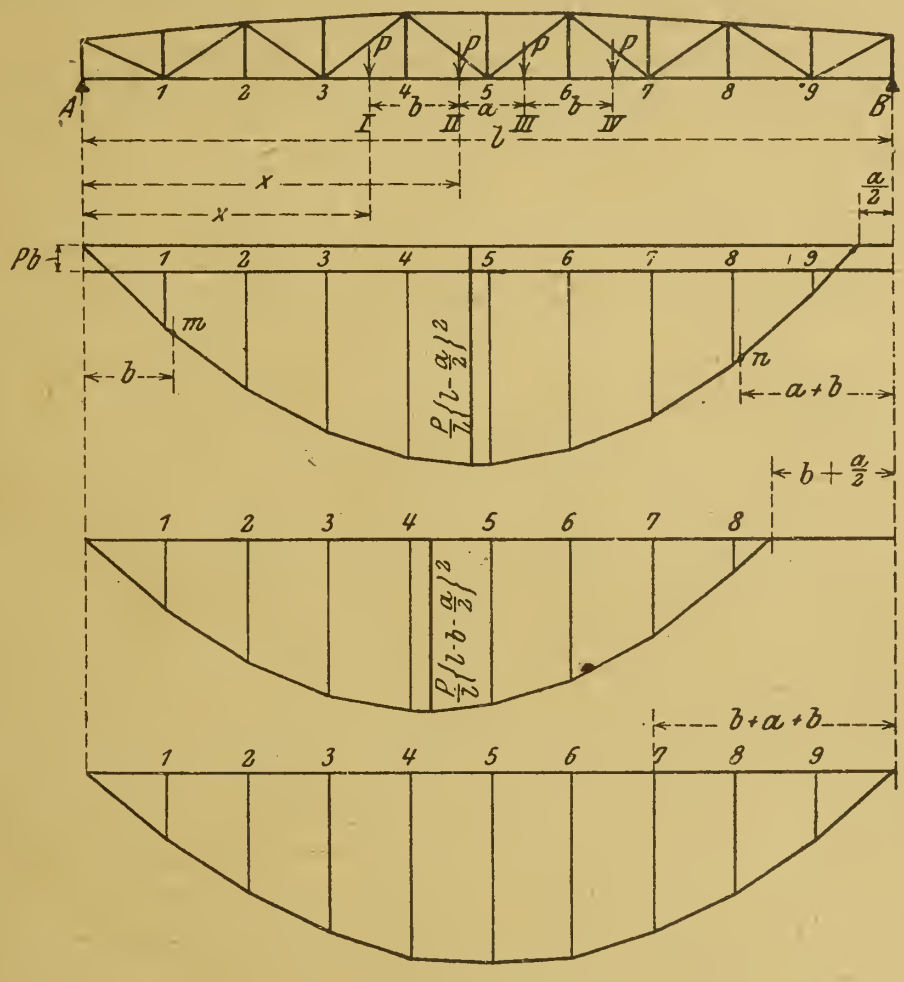


Fig. 13.

Fig. 13a.

Fig. 13b.

Fig. 13c.

Das Moment unter der Last I im Abstande x von A hat den Wert

$$M_x = \frac{4P}{l}\left\{\left(l - b - \frac{a}{2}\right) - x\right\}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Gleichung stellt wiederum eine Parabel dar von der Länge

$$\left(l - b - \frac{a}{2}\right)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{P}{l}\left\{l - b - \frac{a}{2}\right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Fig. 13b zeigt die Konstruktion der Linie.

Der größte Umriß der vereinigten Kurven (Fig. 13 a und 13 b) gibt die Maximalmomente des ganzen Trägers, und zwar gemessen unter der Last II und I (Fig. 13 c).

Infolge der symmetrischen Belastung erscheint derselbe Linienzug, nur umgekehrt, unter der Last III bzw. IV. Hieraus folgt, daß die Vereinigung (Fig. 13 c) nur bis zur Mitte des Tragers geführt werden braucht; ihre Symmetriehälfte ist zugleich gültig für die Trägerhälfte rechts.

Nunmehr können die Maximalgurtspannungen ohne weiteres berechnet werden, und zwar wie früher aus der Beziehung

$$S = \frac{M_m}{r};$$

wo r den senkrechten Hebelarm des dem Knoten m gegenüberliegenden Stabes bedeutet.

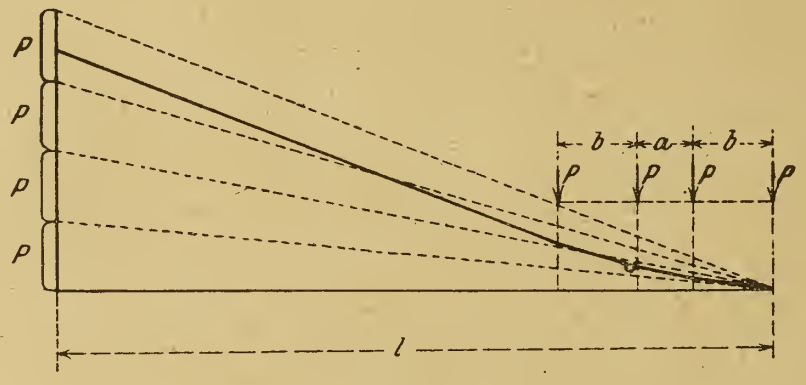


Fig. 13 d.

b) Die Maximaldiagonalspannungen.

Die einfachste Ermittelungsweise ist auch hier das Verfahren des Kräfteplanes für $A = 1$ t in Verbindung mit der A-Linie. Der Rechnungsgang wurde bereits bei der vorhergehenden Aufgabe gezeigt. Mitzuteilen ist nur noch die Konstruktion des Querkraftdiagramms für die Belastung durch vier Kräfte P; sie ist in der bekannten Weise zeichnerisch in Fig. 13 d angegeben.

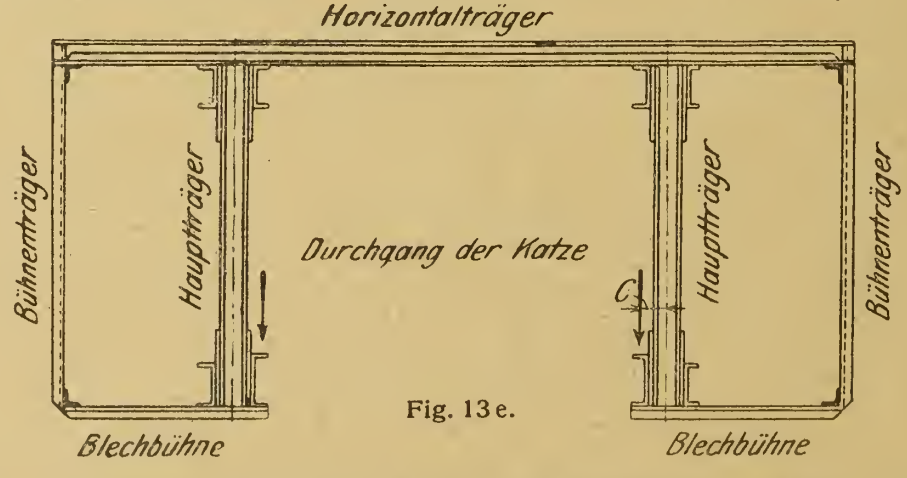


Fig. 13 e.

Fig. 13 e zeigt den Querschnitt des Laufkrans. Der Angriff des Raddruckes der Katzen liegt um c aus der Schwerachse des Haupt-

trägers. Infolgedessen tritt eine wagerechte Ausweichung des Untergurtes ein, die aber aufgehoben wird durch die auf der ganzen Länge des Trägers wirksame Blechbühne. Diese sowie der oben liegende Horizontalträger begegnen ferner dem Schrägzug der Last und verhindern ein seitliches Ausschwanken des Kranes infolge plötzlicher Hemmung beim Fahren. Vorstehende Kräfte sind nicht unwesentlich und müssen bei Anlage des Kranes in Rechnung gebracht werden.

Steht z. B. die belastete Katze in der Mitte des Trägers (für die wagerechte Inanspruchnahme am ungünstigsten) und wird der fahrende Kran plötzlich gebremst, so äußern die Radkränze der Katze in Summa eine ziemliche Schubkraft H, die sich annähernd nach

$$H_1 = Q_1 \cdot \mu = Q \cdot 0{,}15$$

berechnen läßt, wo Q_1 das Gewicht der belasteten Katze und $\mu = 0{,}15$ den Reibungskoeffizient bezeichnen.

Voraussetzung hierbei ist, daß sämtliche Räder des Kranes zugleich abgebremst werden. Würde beispielsweise nur die Hälfte der Räder abgebremst, dann ist

$$H_1 = \frac{Q_1}{2} \cdot \mu.$$

Näheres über Bremskräfte bei Kranen im dritten Abschnitt.

Beispiel 7. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit Unterteilung des Systems. Parallele Gurte. Obenlaufende Katze mit den Raddrucken P_1 und P_2 (Fig. 14).

Große Spannweiten bedingen große Feldweiten. Demzufolge rücken die Knoten der Gurte weit auseinander und es erleiden diejenigen Stäbe, die von der Last befahren werden, bedeutende Biegungsmomente. Dieserhalb kürzt man die Biegungslängen durch Unterteilung des Systems und gelangt zu dem in Fig. 14 dargestellten Netzwerk.

Die größten Stabspannungen werden hier am besten mit Hilfe des Einflußlinienverfahrens ermittelt.

a) Die Obergurtstäbe O_2 und O_2'.

Man denke sich die Zwischenglieder a und d als nicht vorhanden. Eine im Knoten n angreifende Last $P = 1$ t erzeugt eine Spannung

$$O_2 = O_2' = A \frac{x}{h} = \frac{1 \cdot x'}{l} \cdot \frac{x}{h},$$

oder umschrieben

$$(O_2 = O_2') : x' = \frac{x}{h} : l.$$

Diese Proportion läßt sich, wie in Fig. 14 a vollzogen, zeichnerisch darstellen, so daß die Ordinate unter n die Stabspannung (für $P = 1$ t angreifend im Knoten n) mißt.

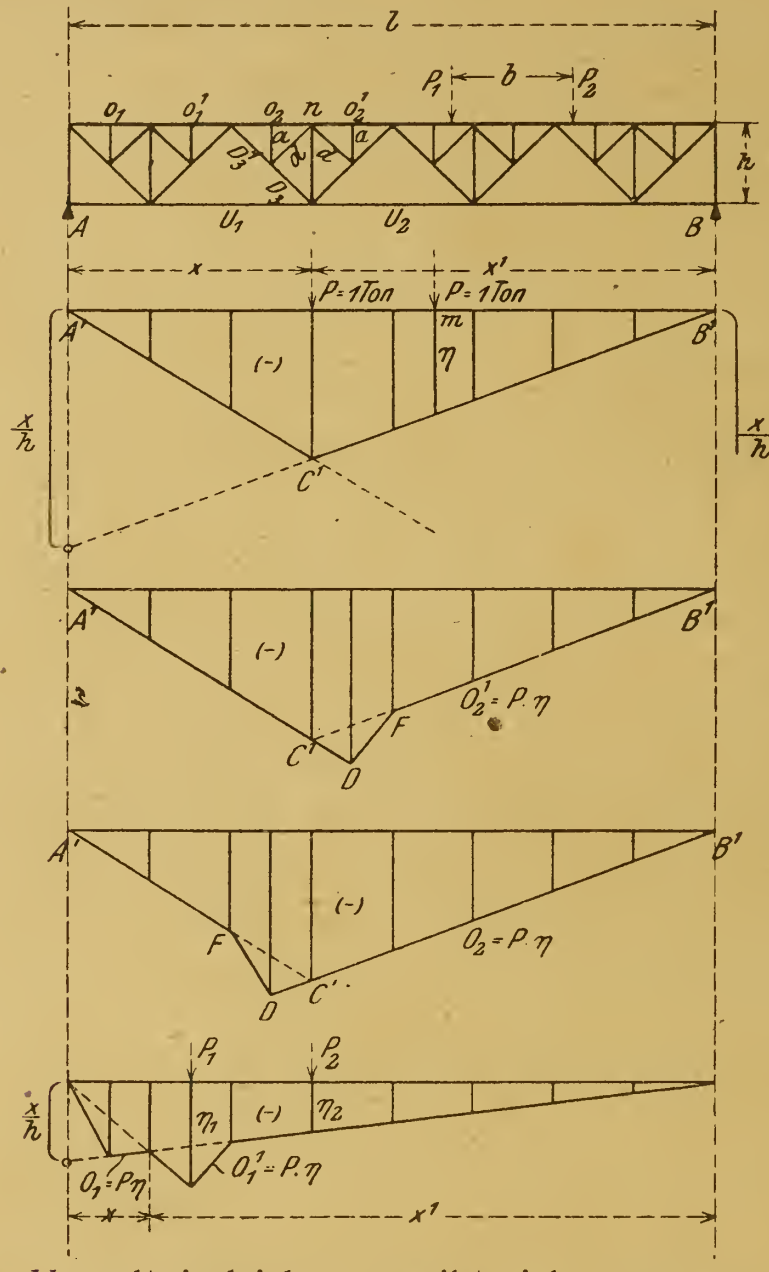


Fig. 14.

Fig. 14a.

Fig. 14b.

Fig. 14c.

Fig. 14d.

Dieselbe Verhältnisgleichung ergibt sich, wenn vom Auflager B ausgegangen wird:

$$(O_2 = O_2') : x = \frac{x'}{h} : l,$$

die in derselben Weise graphisch aufgetragen wird.

Der Umriß der Fig. 14 a liefert somit die Einflußlinie für die Stabspannung $O_2 = O_2'$ bei Inanspruchnahme des Trägers durch die wandernde Last $P = 1$ t. Befindet sich P z. B. im Knoten m, so ist die Spannung

$$(O_2 = O_2') = \text{der Ordinate } \eta.$$

Die Wiedereinführung der Stäbe a und b bewirkt nun aber eine kleine Veränderung der Einflußlinie, im weiteren eine Verschiedenheit

der Spannungen O_2 und O_2'. Demzufolge erfordert jeder Stab eine besondere Einflußlinie.

Die Einflußlinie des Stabes O_2' ist in Fig. 14 b gezeichnet. Sie ergibt sich durch Anhängung des Dreiecks $C'\,D\,F$, dessen eine Seite der gradlinig verlängerte Ast $A'\,C'$ bis zum Punkte D (die Viertelteilung des Trägerfeldes) ist.

In derselben Weise vollzieht sich die Konstruktion der Einflußlinie für die Spannung des Stabes O_2 (Fig. 14 c).

Selbstverständlich wird man fernerhin im Interesse der Zeit- und Raumersparnis die Einflußlinien für zwei Gurtstäbe O und O' auf einer gemeinsamen Basis entwerfen, wozu Fig. 14 d ein Beispiel gibt.

Liefert somit die Ordinate η unter der Last $P = 1$ Ton die Stabspannung, so beträgt diese, wenn P beliebig groß ist

$$S = P \cdot \eta.$$

Ferner, wenn außer P noch weitere Lasten P_1, P_2, P_3 . . . . auf den Träger wirken, berechnet sich S aus der Summe

$$S = P\eta + P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \text{- - -},$$

deren Größtwert erreicht wird, wenn möglichst viele und schwere Lasten in die Spitze der Einflußlinie geschoben werden.

Das Maximum der Stabspannung O_1' tritt ein (wenn vorausgesetzt wird, daß P_1 die größte Last ist) bei der in Fig. 14 d gekennzeichneten Katzenstellung, und zwar zu

$$O_1' = P_1\eta_1 + P_2\eta_2.$$

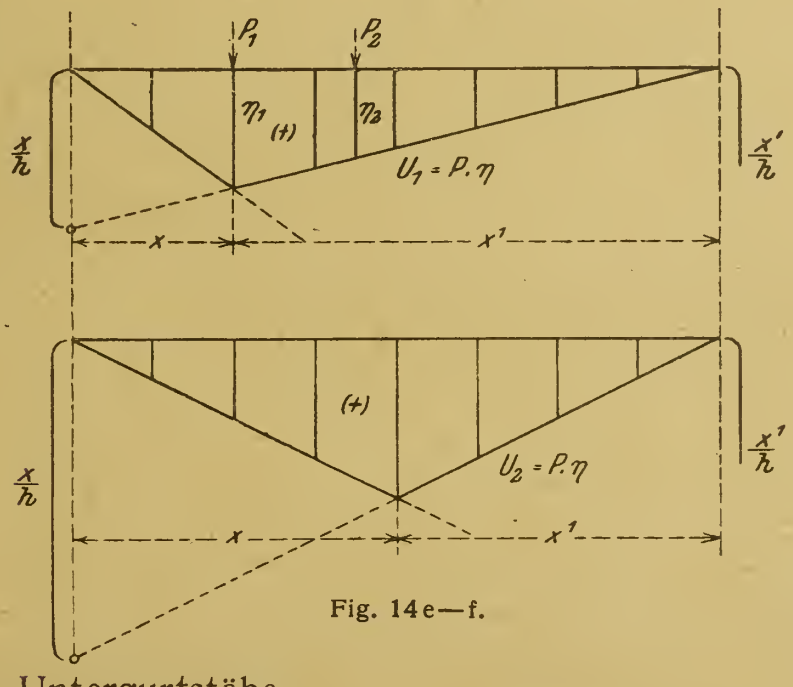


Fig. 14 e—f.

b) Die Untergurtstäbe.

Diese Stäbe werden von dem Zwischensystem nicht berührt. Infolgedessen ist die Einflußlinie dem Grundzuge nach übereinstim-

mend mit der in Fig. 14 a gezeichneten. Fig. 14 e und 14 f geben die Einflußlinien für U_1 und U_2.

c) Die Diagonalstäbe D_3 und D_3'.

Zunächst werden wiederum die Zwischenstäbe a und d beseitigt. (Fig. 14 g). Sodann bringt man eine Last $P = 1$ t in den Knoten n des Obergurtes. Sie ruft eine Spannung in D hervor von

$$(D_3 = D_3') = + \frac{A}{\sin \alpha} = + \frac{1 \cdot x'}{l \cdot \sin \alpha}.$$

Als Verhältnis

$$(D_3 = D_3') : x' = \frac{1}{\sin \alpha} : l$$

geschrieben, läßt sich der Ausdruck leicht graphisch auftragen (siehe Fig. 14 h).

Ebenso ist zu verfahren bei der Last $P = 1$ t im Knoten m des Obergurtes. Man erhält

$$(D_3 = D_3') = - \frac{B}{\sin \alpha} = - \frac{1 \cdot x}{l \sin \alpha},$$

oder

$$(D_3 = D_3') : x = \frac{1}{\sin \alpha} : l.$$

Der Wert $\frac{1}{\sin \alpha}$ wird diesmal über B' aufgetragen.

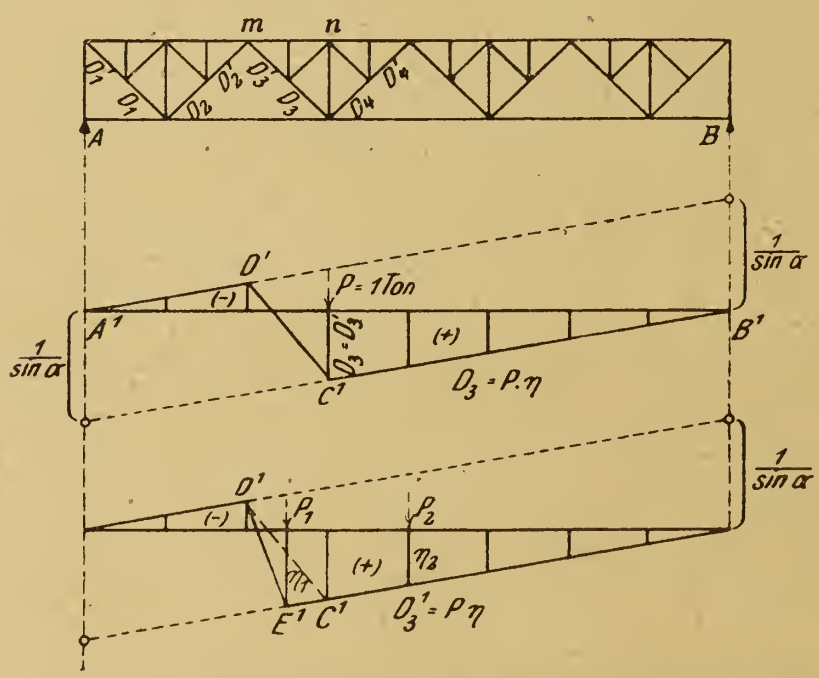


Fig. 14 g.

Fig. 14 h.

Fig. 14 i.

Verursacht eine Last zwischen B' und n Zugspannung im Stabe D_3, während sie Druckspannung bei Stellung zwischen A' und m bewirkt, so muß im Felde m — n bei weiterschreitender Last ein Wechsel

der Spannung eintreten; dieser wird durch die geradlinige Verbindung der Ecken D' und C' dargestellt.

Sodann werden die Zwischenstäbe wieder eingeführt.

Es ist ersichtlich, daß dadurch die Spannungswerte des Stabes D_3 keine Veränderung erfahren, infolgedessen für ihn die entworfene Einflußlinie (Fig. 14 h) maßgebend ist.

Jedoch erleidet der Stab D_3' eine Zusatzspannung, die nach Maßgabe der Fig. 14 i durch Anhängung des Dreiecks $C'\ D'\ E'$ in Rechnung gestellt wird.

Die Einflußlinien der Diagonalen zeigen negative und positive Beitragsstrecken. Der größte Zug des Stabes D_3' beispielsweise wird durch die in Fig. 14 i gekennzeichnete Laststellung herbeigeführt. Es ist

$$+ D_3'^{\max} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2,$$

während die größte Druckspannung eintritt, wenn die Katze (mit der Last P_1 rechts) bis ganz in die Spitze des oberen Dreiecks geschoben wird:

$$- D_3^{\max} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2.$$

In der Folge liefern die Figuren 14 k, 14 l und 14 m die Einflußlinien der übrigen Diagonalen.

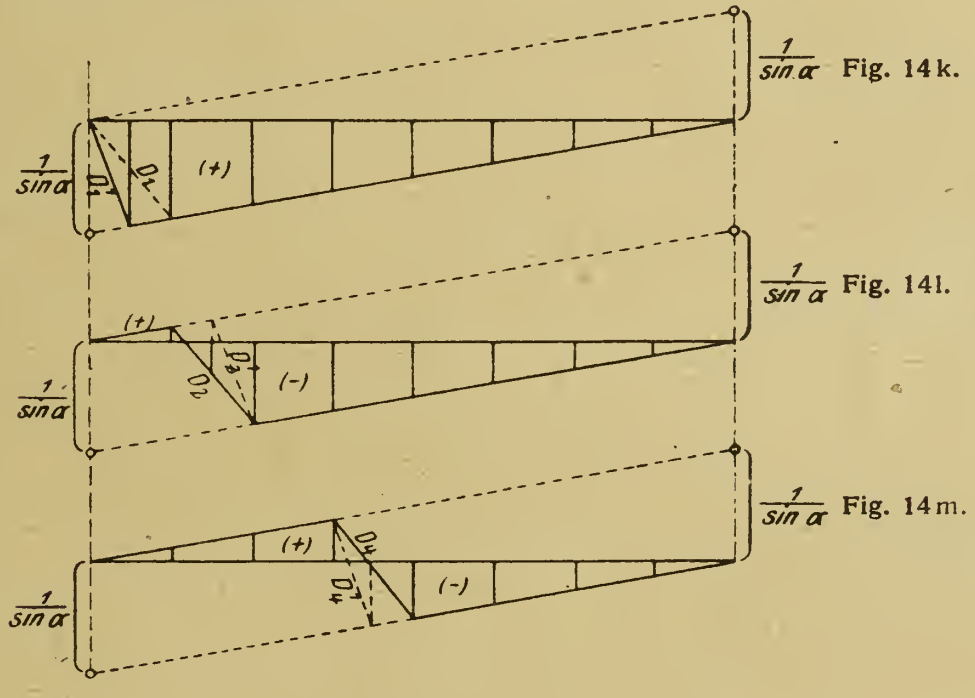


Fig. 14 k.

Fig. 14 l.

Fig. 14 m.

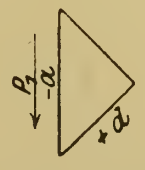


Fig. 14 m.

Wenngleich die Spannungen des Systems aus Eigengewicht leicht mit Hilfe eines Cremonaplanes festgelegt werden können, ist dennoch die Benutzung der Einflußlinien nicht ohne Vorteil.

Bezeichnet g das Gewicht in Ton pro m Träger, dann ist die Spannung eines Stabes aus Eigengewicht gleich der Fläche der Einflußlinie multipliziert mit g.

$$S_g = F_0 \cdot g.$$

Zu beachten ist, daß der wirkliche Inhalt der Einflußlinie der Diagonalen gleich ist der Differenz der positiven und negativen Beitragsstrecken.

Die Spannung der Zwischenstäbe a und d ergibt sich einfach durch Zerlegen der Last P (Fig. 14 n).

Beispiel 8. Ein Laufkranträger mit gebogenem Untergurt und unterteiltem System. Es ist angenommen, der Träger werde von vier verschieden großen Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 befahren. Für diesen Fall ist die Verwendung von Einflußlinien entschieden zweckmäßig (Fig. 15).

In der Folge sollen die Einflußlinien einiger Stäbe für die bewegliche Last $P = 1$ t entworfen werden.

Stab $O - O'$.

Die Spannung, entstanden durch die Last $P = 1$ im Knoten n des Obergurtes beträgt

$$(O - O') = \frac{x' x}{l r},$$

oder

$$(O - O') : x' = \frac{x}{r} : l.$$

Zugleich, vom Auflager B ausgehend, ergibt sich

$$(O - O') : x = \frac{x'}{r} : l.$$

Fig. 15 a zeigt die graphische Auftragung beider Verhältnisgleichungen. Nach Anhängung der beim vorhergehenden Beispiel erklärten Dreiecke erhält man die in Fig. 15 a vereinigten Einflußlinien der Stäbe $O - O'$.

Die Spannung aus den vorhandenen Lasten für O z. B. ist

$$-O = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + P_4 \eta_4,$$

deren Maximum durch versuchsweise Einstellung der Kräfte gesucht werden muß.

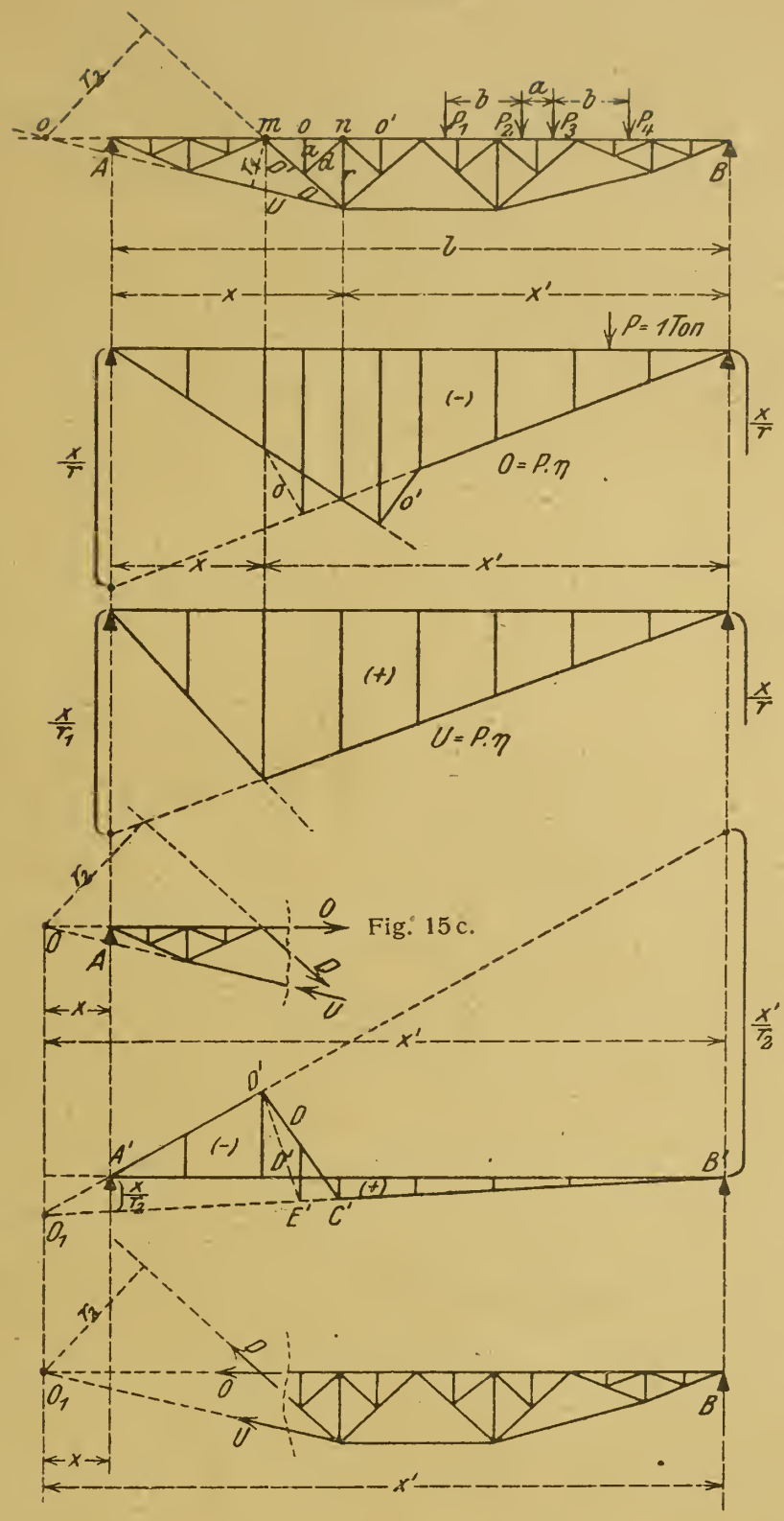


Fig. 15.

Fig. 15 a.

Fig. 15 b.

Fig. 15 c.

Fig. 15 d.

Fig. 15 e.

Stab U.

$P = 1$ t im Knoten m des Obergurtes bewirkt die Spannung

$$+U = \frac{x'}{l} \cdot \frac{x}{r_1}$$

oder

$$U : x' = \frac{x}{r_1} : l$$

zugleich

$$U : x = \frac{x'}{r_1} : l.$$

Die Konstruktion der Einflußlinie siehe Fig. 15 b.

Stab $D - D'$.

Zunächst Beseitigung der Zwischenglieder a und d.

Das Rittersche Schnittverfahren erlaubt, die Spannung D für irgendeinen Belastungszustand des Trägers zu berechnen. Man denke letzteren im Felde $m - n$ geteilt (Fig. 15 c), seinen rechten Teil fallen gelassen und das linke übrige Stück im Gleichgewicht schwebend. Dieser Zustand wird herbeigeführt durch die Weiterwirkung der ursprünglichen Stabkräfte O, U und D. Diese lassen sich der Größe nach ermitteln.

Zum Zweck, die Konstruktion der Einflußlinie möglichst einfach zu gestalten, denke man sich den Träger über A hinaus bis zum Schnittpunkt O der beiden Gurtstäbe verlängert und in diesem Schnittpunkt die Kraft $P = 1$ t angebracht. Dann ist die Auflagerreaktion

$$A = \frac{1 \cdot x'}{l},$$

und es berechnet sich die Spannung der Diagonale aus

$$(D = D')\, r_2 - A \cdot x = O$$

zu

$$(D = D') = + A \frac{x}{r_2} = + \frac{x'}{l} \cdot \frac{x}{r_2},$$

oder als Verhältnis geschrieben

$$(D = D') : x' = \frac{x}{r_2} : l,$$

dessen Auftragung in Fig. 15 d vorgenommen ist.

Sodann wird die Gleichgewichtsbedingung für den rechten Trägerteil bei demselben Belastungfall aufgestellt (Fig. 15 e). Es ergibt sich

$$-(D = D') \cdot r_2 + B\, x' = 0,$$

somit

$$(D = D') = + B \frac{x'}{r_2} = + \frac{x}{l} \cdot \frac{x'}{r_2},$$

oder

$$(D = D') : x = \frac{x}{r_2} : l.$$

Fig. 15 d gibt ebenfalls die Aufzeichnung dieser Beziehung, wobei $\frac{x'}{r_2}$ über B' aufzutragen ist.

Die Gültigkeit der so gefundenen Linienzüge geht einerseits von B' bis C', anderseits von A' bis D'; es entstehen also positive und negative Beitragsstrecken. Der Spannungswechsel im Felde $m — n$ bei fahrender Last wird durch die gerade Verbindung $D' — C'$ dargestellt.

Wenngleich die Glieder a und d wiederum eingeführt werden, haben sie jedoch keine Wirkung auf den Stabteil D, wonach für ihn die entworfene Einflußlinie gültig ist.

Demgegenüber üben die Zwischenglieder einen Einfluß auf den Stabteil D' aus, der wie früher durch die Anhängung des Dreiecks C' D' E' in Rechnung gebracht wird.

Bezüglich der Verwendung der Einflußlinien zur Bestimmung der Spannungen aus Eigengewicht gilt das beim vorletzten Beispiel Gesagte.

Beispiel 9. Ein Laufkranträger aus Fachwerk mit gezogenen Diagonalen.

Der Einführung nur gezogener Diagonalen hat man sich neuerdings ziemlich abgewendet, weil der Träger schwerer wird, weniger steif ist und zu voll erscheint.

Liegt ein Träger mit parallelen Gurten vor, so ermittelt man die Strecke, auf der die Diagonalen (Fig. 16) alle aufsteigend sind, d. h. bei von B nach A vorfahrender Katze nur Zugspannung erhalten, wie folgt:

Man zeichne das Querkraftdiagramm aus Eigengewicht, ferner die A-Linie bei von B nach A vorfahrenden Lasten. Dann erfordert der Träger die in Fig. 16 gezeichneten Diagonalen innerhalb des Bereiches der nach oben gerichteten Querkräfte (schraffierter Teil der Fig. 16 a. Bei von A nach B vorfahrenden Lasten ergibt sich dasselbe Bild, nur umgekehrt; man lege daher beide Systeme übereinander, um einen Träger mit nur gezogenen Diagonalen zu erhalten (Fig. 16 b).

Etwas umständlicher ist die Lösung bei einem Träger mit gebogenem Ober- oder Untergurt (Fig. 16 c).

Man lege zunächst für das Grundsystem (Fig. 16 c) die Spannungen aus dem Eigengewicht fest. Sodann fahre man die Katze von der Trägermitte nach links vor; es leuchtet ein, daß die Diagonalen D_5 bis D_1 nur Zug erhalten. Dasselbe gilt bei vorfahrender Last von Mitte bis B für die Stäbe D_5' bis D_1'. Die ermittelten Spannungen addieren sich zu den Spannungen aus dem Eigengewicht.

Aber die Katze, von B aus bis zum Knoten 2′ vorfahrend, wird Diagonale D_2' auf Druck in Anspruch nehmen. Man berechne die Spannung. Sie möge kleiner sein als die vorhandene Spannung aus Eigengewicht. Dann bleibt ein positiver Betrag übrig; die Diagonale kann bestehen bleiben, d. h., Feld 2′— 3′ bedarf keiner Gegendiagonale..

Dann schiebe man die Katze weiter vor bis zum Knoten 3′ und veranstalte dieselbe Untersuchung für Stab D_3'. Es zeigt sich, daß diese Diagonale einen größeren Druck erhält als die vorhandene Zugspannung aus Eigengewicht. Es folgt somit die Notwendigkeit der Einführung einer Gegendiagonale.

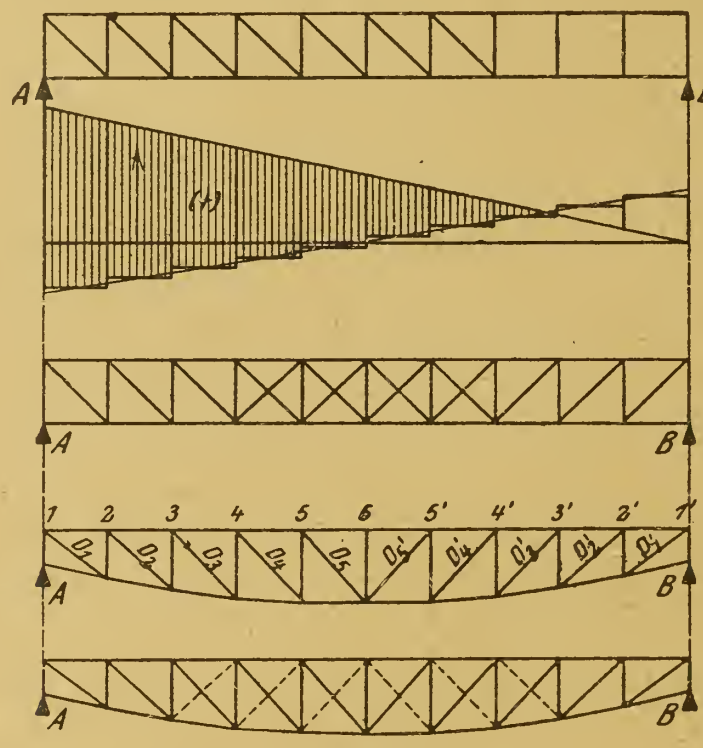


Fig. 16.

Fig. 16a.

Fig. 16b.

Fig. 16c.

Fig. 16d.

Die nun wirklich eintretenden Spannungswerte beider Stäbe können nicht so ohne weiteres ermittelt werden, weil im Augenblick, wo die Katze in die fragliche Stellung tritt, mit der Annahme der Zugspannung der Grunddiagonale eine Formverschiebung des Feldes anhebt, die eine sofortige Wirksamkeit der Gegendiagonale bedingt. Genügend genau ist die Annahme, daß die Grunddiagonale ihre Eigengewichtsspannung behält und nur die Gegendiagonale gegenüber der Katzenlast in Tätigkeit tritt.

Auf Grund derselben Überlegung kommt man zur Gegendiagonale des nächsten Feldes 4′ — 5′. Der Träger erhält schließlich die in Fig. 16 d ersichtliche Gliederung.

Es möge noch bemerkt werden, daß die Theorie „nur gezogener Diagonalen“ nur dann richtig ist, wenn die Stäbe auch tätsächlich als reine Zugglieder ausgebildet werden.

Beispiel 10. Ein Laufkranträger (Balken mit einem Zugband unterspannt). Fig. 17.

Diese Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Als fragliche Größe wird die wagerechte Seitenkraft X des Anzuges in dem unterspannten Stabe gewählt.

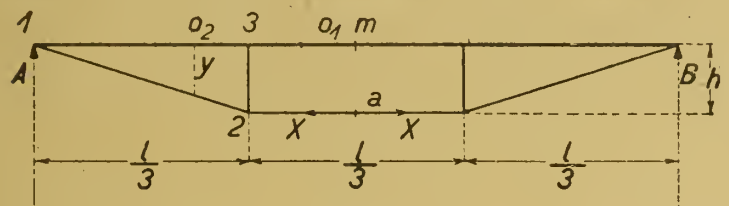


Fig. 17.

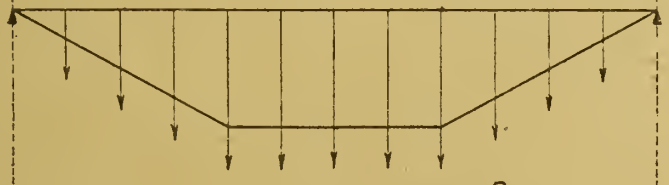


Fig. 17a.

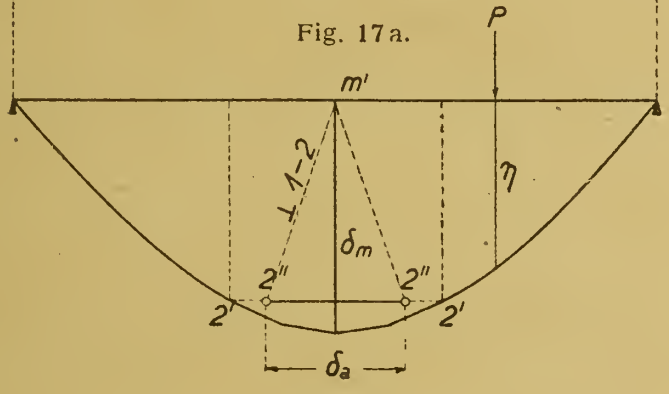


Fig. 17b.

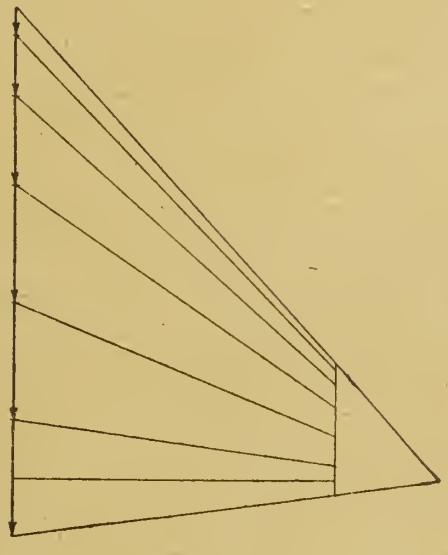


Fig. 17c.

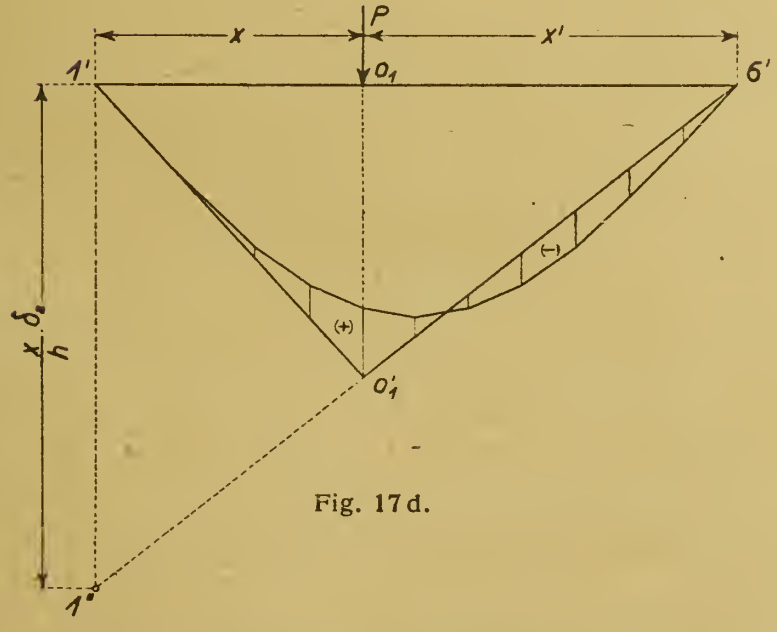


Fig. 17d.

Durchschneidet man diesen Stab in der Mitte bei a und bringt an den Schnittenden die Kräfte $-X$ entgegengesetzt gerichtet an, dann verbiegt sich der Balken, und es tritt eine Erweiterung δ_a der

Schnittstelle ein. Diese Erweiterung läßt sich, wenn man den geringen Einfluß der Längenänderung der Stäbe zunächst vernachlässigt, in sehr einfacher Weise graphisch ermitteln. Die Kräfte $-X$ verursachen Momente an dem Balken, die den grundsätzlichen Verlauf haben wie die Form der Unterspannung. Betrachtet man nun diese Momentenfläche als Belastung und zeichnet hierfür das Momentenpolygon, so stellt dieses die Biegungslinie des Balkens dar. Siehe Fig. 17 a, 17 b und 17 c. Die zugleich eintretende Erweiterung δ_a der Schnittstelle bei a läßt sich durch Zeichnung eines einfachen Verschiebungsplanes finden. Fig. 17 b. Linie $m' - 2''$ senkrecht zu Stab $1 - 2$. Linie $2' - 2''$ wagerecht.

Erfahrungsrechnungen zeigen, daß der Einfluß der Längenänderung der Stäbe etwa 5 bis 10 % beträgt. Hiernach ist der oben gefundene Wert δ_a um 5 bis 10% zu vergrößern.

Bezeichnet nun η die Ordinate der Biegungslinie, gemessen unter einer Last P auf dem Balken, dann besteht auf Grund der Gegenseitigkeit der Formveränderungen die Beziehung

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Nunmehr kann man die tatsächlichen Momente des Balkens aus den Raddrücken der Katze ermitteln. Gesucht das Moment an der Stelle o_1. Fig. 17 d. Befindet sich eine Einzellast P in diesem Punkte, dann beträgt das Moment

$$M = P \cdot \frac{x' \cdot x}{l} - X \cdot h$$

oder

$$M = P \cdot \frac{x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot h$$

oder, wenn $P = 1$

$$M = \frac{h}{\delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot x}{l} \cdot \frac{\delta_a}{h} - \eta \right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Das zweite Glied der Klammer ist durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben. Das erste Glied läßt sich als Verhältnisgleichung

$$M_0 : x' = x \cdot \frac{\delta_a}{h} : l$$

schreiben und zeichnerisch durch die Gerade $1'' - 0_1' - 6'$ darstellen. Zieht man noch die Linie $1' - 0_1'$, dann erhält man in der schraf-

fierten Fläche die Einflußlinie der Momente des Punktes o_1 für die Last $P = 1$

Wird der Balken nun von zwei beliebigen Lasten P_1, P_2 angegriffen, dann kann man schreiben

$$M = \frac{h}{\delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\},$$

wobei zu beachten ist, daß eine Last im negativen Einflußgebiet einen negativen Beitrag liefert.

Um das absolute Maximalmoment des Balkens zu finden, bedarf es einiger Versuche. Vielleicht liegt die kritische Stelle nicht im mittleren, sonden im äußeren Felde in der Nähe des senkrechten Stabes. Hierfür schreibt man folgende Gleichung an

$$M = P \cdot \frac{x' \cdot x}{l} - X \cdot y,$$

wo y das in der Fig. 17 angegebene Maß bedeutet.

Man erhält dann weiter für $P = 1$

$$M = \frac{y}{\delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot x}{l} \cdot \frac{\delta_a}{y} - \eta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die zeichnerische Auftragung dieses Ausdruckes wird in derselben Weise wie vorher vorgenommen. Der Abschnitt auf der Senkrechten unter A beträgt $\frac{x \cdot \delta_a}{y}$.

Der Größtwert von X wird unmittelbar nach der Biegungslinie Fig. 17 b bestimmt:

$$X = \frac{1}{\delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

Hiermit sind dann auch die größten Stabkräfte der unterspannten Stäbe gegeben.

Bei der Querschnittsermittelung des Balkens ist darauf zu achten, daß außer dem Moment noch die zugehörige Längskraft $-X$ auf ihn wirkt.

Soll der genaue Einfluß der Längenänderung der Stäbe berücksichtigt werden, dann ergibt sich folgendes:

Es war

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a}.$$

Der Wert δ_a ermittelt sich nach

$$\delta_a = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot d x.$$

(Von 1 — 3.)

$$M_x = X \cdot y = X \cdot \frac{3 \cdot h}{l} \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{3 \cdot h}{l} \cdot x,$$

$$\frac{1}{J E} \int_0^{\frac{l}{3}} X \cdot \frac{9 \cdot h^2}{l^2} \cdot x^2 \cdot d x = \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J \cdot E} \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

(Von 3 — m.)

$$M_x = X \cdot h, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = h,$$

$$\frac{1}{J E} \int_0^{\frac{l}{6}} X \cdot h^2 \cdot d x = \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{6 \cdot J \cdot E} \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\delta_a}{2} = \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J \cdot E} + \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{6 \cdot J \cdot E} = \frac{5 \cdot X \cdot h^2 \cdot l}{18 \cdot J \cdot E},$$

$$\delta_a = \frac{5 \cdot X \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J \cdot E}.$$

oder für $X = 1$

$$\delta_a = \frac{5 \cdot 1 \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J \cdot E}.$$

Zu dieser Verschiebung tritt eine weitere Verschiebung δ_a' aus der Längenänderung der Stäbe. Diese Verschiebung beträgt für $X = 1$

$$\delta_a' = 1 \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Es muß also jetzt geschrieben werden (bei $E = 1$)

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a + \delta_a'} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a + \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad \ldots \quad (19)$$

Nur ist zu beachten, daß der Wert δ_a in der Zeichnung in einem anderen, zufälligen Maßstab, also nicht in der wahren nach

$$\delta_a = \frac{5 \cdot 1 \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J} \; (E = 1)$$

gerechneten Größe vorhanden ist. Der Maßstab sei $\mathfrak{M}$. Dann wird schließlich

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a + \mathfrak{M} \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

(Der Beitrag $\mathfrak{M} \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}$ war oben mit etwas 5 bis 10% des Wertes δ_a in der Zeichnung angegeben.)

Zu dem Werte $\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}$ ist zu erwähnen, daß die Spannkräfte S_1 durch die Belastung $X = -1$ entstehen und durch einen einfachen Cremonaplan ermittelt werden können. Hinsichtlich des Maßstabes sei noch folgendes bemerkt: Liefert beispielsweise die Zeichnung $\delta_a = 20$ mm, wohingegen die Formel

$$\delta_a = \frac{5 \cdot 1 \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J}$$

4 mm ergibt, dann ist $\mathfrak{M} = 5$.

Vorstehendes Berechnungsverfahren kann bei jedem Balken, gleichgültig wie der Linienzug der Unterspannung ist, angewendet werden. Stets führt man den Umriß der Unterspannung zwecks Ermittelung der Biegungslinie aus $-X$ als Belastungsfläche des Balkens ein.

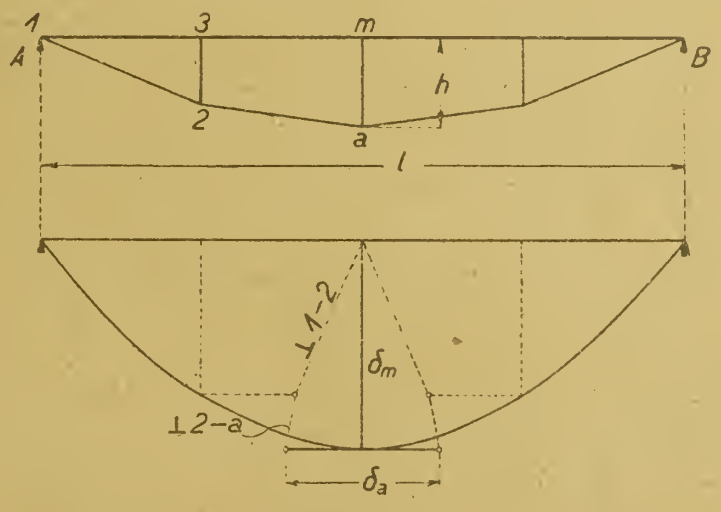


Fig. 18—18a.

In den Fig. 18 und 18 a wird schließlich noch die Auffindung der Verschiebungen η und δ_a bei einem Balken mit vierteiliger Unterspannung angegeben.

Nachstehend mögen noch einige nach

$$\delta_a = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx$$

ermittelte Werte für $X = 1$ für verschiedene Arten von Unterspannungen mitgeteilt werden.

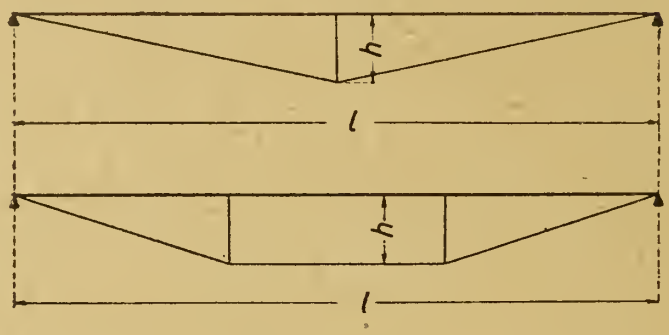


Fig. 19—19a.

Fig. 19. Zweiteilige Unterspannung

$$\delta_a = \frac{1 \cdot h^2 \cdot l}{3 \cdot J \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Fig. 19 a. Die oben behandelte dreiteilige Unterspannung

$$\delta_a = \frac{5 \cdot h^2 \cdot l}{9 \cdot J \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Fig. 19 b. Eine dreiteilige Unterspannung mit großem Mittelfeld

$$\delta_a = \frac{2 \cdot 1 \cdot h^2}{J \cdot E} \left(\frac{l}{2} - \frac{2a}{3} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Fig. 19 c. Eine vierteilige Unterspannung (Parabelbogen)

$$\delta_a = \frac{23 \cdot 1 \cdot h^2 \cdot l}{48 \cdot J \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Fig. 19 d. Eine fünfteilige Unterspannung (Parabelbogen)

$$\delta_a = \frac{89 \cdot 1 \cdot h^2 \cdot l}{135 \cdot J \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

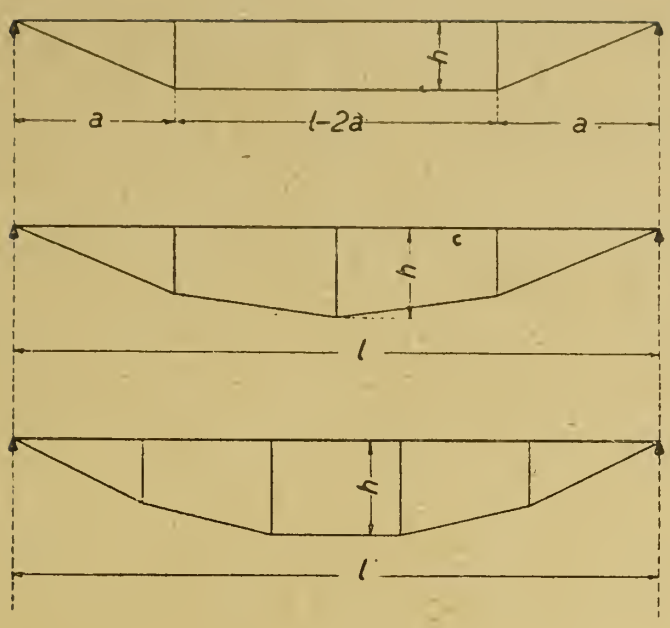


Fig. 19b.

Fig. 19c.

Fig. 19d.

Ausführliches Zahlenbeispiel siehe Abschnitt 2, wo auch die Durchbiegungen behandelt sind.

Beispiel 11. Ein Kopfträger zu einem Laufkran. (Fig. 20.)

Die Momente und Querkräfte sind leicht zu bestimmen. (Siehe Fig. 20 a und 20 b.)

Das größte Moment ist $M = P \cdot b$, die größte Querkraft $T = P$.

Meistens liegen die statischen Verhältnisse nicht so einfach, vielmehr hat man mit dem in der Fig. 20 c dargestellten Träger zu tun. Die Konstruktion ist einfach statisch unbestimmt. Als Unbekannte wählt man zweckmäßig den Druck X in dem wagerechten oberen Stab. Die Ermittelung dieser Größe gelingt leicht mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx + \int \frac{S}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot ds = 0.$$

Der Balken.

Strecke 1—2.

$$M_x = -V \cdot x = -X \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot x,$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^a X \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x^2 \cdot dx = \frac{X \cdot a^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{3 \cdot J \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Strecke 2—3.

$$M_x = -X \cdot \operatorname{tg}\alpha\,(a+x) + P \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -\operatorname{tg}\alpha\,(a+x),$$

$$\frac{1}{J \cdot E}\int_0^b \left\{X \cdot \operatorname{tg}^2\alpha\,(a^2 + 2ax + x^2) - P \cdot \operatorname{tg}\alpha\,(ax + x^2)\right\} dx$$

$$= \frac{X \cdot b\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\right)\operatorname{tg}^2\alpha}{J \cdot E} - \frac{P \cdot b^2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)\operatorname{tg}\alpha}{J \cdot E} \qquad \text{(II)}$$

Strecke 3 — m.

$$M_x = -X \cdot l_1 + P \cdot b, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -l_1,$$

$$\frac{1}{J \cdot E}\int_0^{\left(\frac{m}{2}-b\right)} \left\{X \cdot l_1^2 - P \cdot b \cdot l_1\right\} dx$$

$$= \frac{X \cdot l_1^2\left(\frac{m}{2} - b\right)}{J \cdot E} - \frac{P \cdot b \cdot l_1\left(\frac{m}{2} - b\right)}{J \cdot E} \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Die überspannten Stäbe. (Die verschwindend geringe Längenänderung des schweren Balkens kann vernachlässigt werden.)

Stab S_3.

$$S_3 = X, \quad \frac{\partial S_3}{\partial X} = 1,$$

$$\frac{1}{F_3 \cdot E}\int_0^{\left(\frac{m}{2}-b\right)} X \cdot ds = \frac{X \cdot \left(\frac{m}{2} - b\right)}{F_3 \cdot E} \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

Stab S_2.

$$S_2 = X \cdot \sec\alpha, \quad \frac{\partial S_2}{\partial X} = \sec\alpha,$$

$$\frac{1}{F_2 \cdot E}\int_0^{l_2} X \cdot \sec^2\alpha \cdot ds = \frac{X \cdot l_2 \cdot \sec^2\alpha}{F_2 \cdot E} \quad \ldots \quad \text{(V)}$$

Stab S_1.

$$S_1 = X \cdot \operatorname{tg}\alpha - P, \quad \frac{\partial S_1}{\partial X} = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{1}{F_1 \cdot E}\int_0^{l_1} \left\{X \cdot \operatorname{tg}^2\alpha - P \cdot \operatorname{tg}\alpha\right\} ds = \frac{X \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{F_1 \cdot E} - \frac{P \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{F_1 \cdot E} \quad \text{(VI)}$$

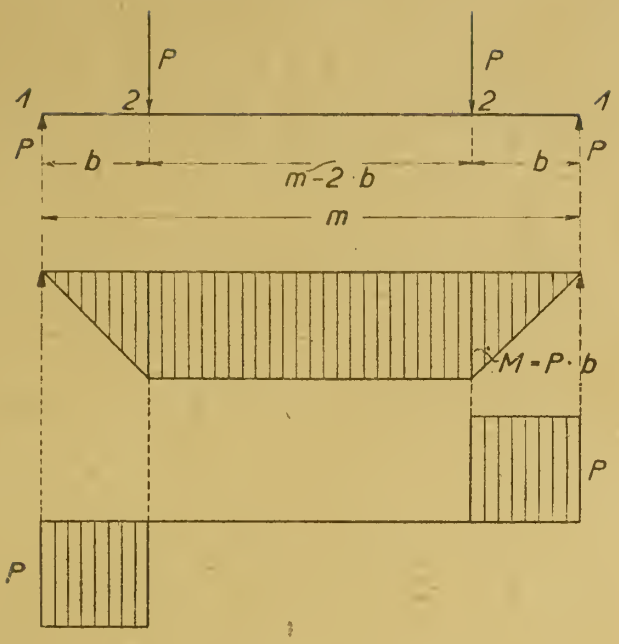


Fig. 20.

Fig. 20a.

Fig. 20b.

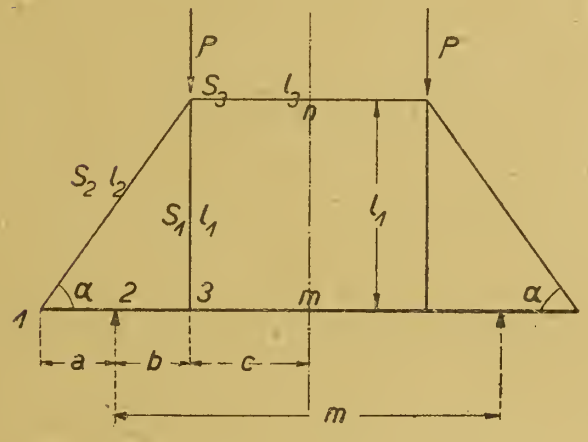


Fig. 20c.

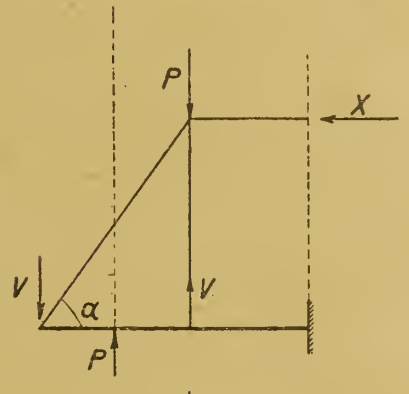


Fig. 20d.

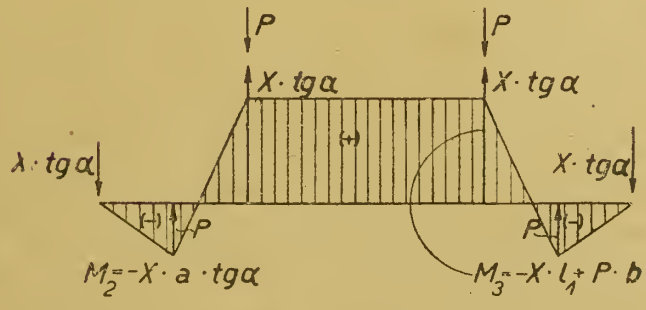


Fig. 20e.

Die Summenbildung ergibt

$$\frac{X \cdot a^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{3J} + \frac{X \cdot b \left(a^2 + a \cdot b + \frac{b^2}{3}\right) \operatorname{tg} \alpha}{J} + \frac{X \cdot l_1^2 \left(\frac{m}{2} - b\right)}{J}$$

$$+ \frac{X \left(\frac{m}{2} - b\right)}{F_3} + \frac{X \cdot l_2 \cdot \sec^2 \alpha}{F_2} + \frac{X \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{F_1} - \frac{P \cdot b^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \operatorname{tg} \alpha}{J}$$

$$\frac{P \cdot b \cdot l_1 \left(\frac{m}{2} - b\right)}{J} - \frac{P \cdot l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{F_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Hieraus läßt sich X nach Einführung der Zahlenwerte ohne große Mühe ermitteln.

Vernachlässigt man den geringeren Einfluß der Längenänderung der Stäbe, dann bleibt

$$X = P \cdot b \, \frac{b \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \operatorname{tg} \alpha + l_1 \left(\frac{m}{2} - b\right)}{\frac{a^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{3} + b \left(a^2 + a \cdot b + \frac{b^2}{3}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha + l_1^2 \left(\frac{m}{2} - b\right)} \quad (27)$$

Die an dem Balken wirkenden Momente sind in der Fig. 20e angegeben.

Wird $a = o$, das heißt, wenn der Stützpunkt der Schrägstäbe über der Laufradachse liegt, dann folgt

$$X = P \cdot b \, \frac{\frac{b^2}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha + l_1 \left(\frac{m}{2} - b\right)}{\frac{b^3}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + l_1^2 \cdot \left(\frac{m}{2} - b\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die nachstehenden Tabellen geben die Tragkraft und die Hauptabmessungen von normalen, von der deutschen Maschinenfabrik A.-G. in Duisburg ausgeführten Laufkranen an. Diese Angaben dürften nicht nur dem Krankonstrukteur, sondern auch dem Eisenhochbauer bei dem Entwurf und der Ausführung von Hallen, Werkstätten, Laufbahnen usw. von Nutzen sein.

Bei Kranen von über 10 t Tragkraft ordnet man zweckmäßig ein Hilfshubwerk an, um kleinere Lasten leichter und schneller heben zu können. Steht unter Tragkraft in der Tabelle z. B. $\frac{25}{5}$, dann

bedeutet 25 die normale Tragkraft, 5 dagegen die Tragkraft des Hilfshubwerkes.

Die Raddrucke in der Tabelle gelten für Krane ohne Hilfshubwerk. Mit Hilfshubwerk erhöhen sie sich um die nachstehenden Beträge.

Tragkraft *t* . . .	10	12,5	15	20	25	30	40	50	60	75
Mehrbetrag *t* . .	0,9	0,95	1,0	1,2	1,3	1,4	1,6	2,1	2,4	2,6

Die große Tabelle weist drei Ziffern auf: 1, 2 und 3.

Unter Ziffer 1: Laufkrane für Hütten- und Stahlwerke (scharfe Betriebsbedingungen).

Unter Ziffer 2: Laufkrane für Werkstätten, Montagehallen, Eisengießereien (Normalbetrieb).

Unter Ziffer 3: Laufkrane für Elektr. Zentralen, Maschinenhäuser (leichter Betrieb).

Sämtliche Angaben in der Tabelle gelten für Krane in überdeckten Gebäuden. Bei im Freien laufenden Kranen erhalten Katze und Führerstand eine Eindeckung. Hierdurch vergrößert sich das Maß *A* um 0,2 m.

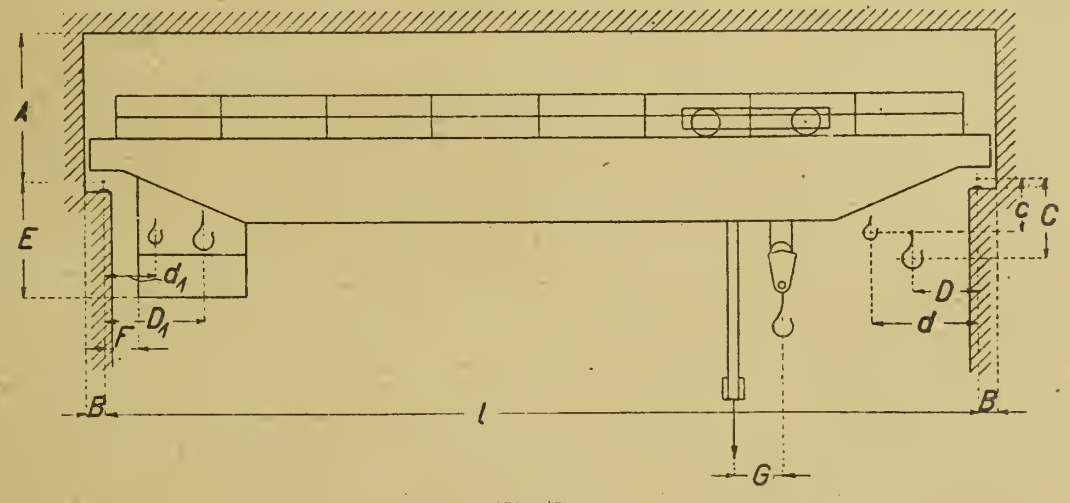


Fig. 21.

Tragkraft	Spannweite	Gewicht des kompletten Krans						Maße für				
		ohne Hilfshub			mit Hilfshub			A			B	C
		1	2	3	1	2	3					
t	m	kg	kg	kg	kg	kg	kg	1	2	3	1—3	1—3
	10	11200	10000	9200				1600	1600	1600	200	400
	12	12100	11000	10100				.	.	.	.	.
	14	13400	12000	11000				.	.	.	.	.
	16	14300	13000	21900				.	.	.	.	.
	18	15900	14100	13000				.	.	.	.	.
5	20	17200	15500	14200	ohne Hilfshub!			.	.	.	.	.
	22	19000	17000	15600				1700	1700	1700	.	300
	24	20700	18500	17000				.	.	.	.	.
	26	22600	20200	18500				.	.	.	.	.
	28	24700	21900	20000				.	.	.	.	.
	30	26600	23700	21700				.	.	.	.	.
	10	12600	11200	10300				1700	1700	1700	220	400
	12	13800	12200	11200				.	.	.	.	.
	14	15000	13400	12200				.	.	.	.	.
	16	16200	14400	13300				.	.	.	.	.
	18	17800	15800	14500				.	.	.	.	.
7,5	20	19500	17200	15800	ohne Hilfshub!			.	.	.	.	.
	22	21500	19100	17500				1800	1800	1800	.	300
	24	23600	20900	19000				.	.	.	.	.
	26	25600	22500	20500				.	.	.	.	.
	28	28000	24500	22300				.	.	.	.	.
	30	30400	26600	24000				.	.	.	.	.
	10	14500	13000	12000	17000	15000	13900	1800	1800	1800	230	400
	12	15600	14000	12900	18100	16100	14800	.	.	.	.	.
	14	17000	15100	14000	19600	17300	15900	.	.	.	.	.
	16	18500	16500	15200	21000	18700	17100	.	.	.	.	.
	18	20200	18000	16500	22700	20200	18500	.	.	.	.	.
10/3	20	22100	19600	18000	24600	21800	19900	.	.	.	.	.
	22	24500	21600	20000	27000	23900	21900	1900	1900	1900	.	300
	24	26800	23600	21600	29400	25800	23500	.	.	.	.	.
	26	29000	25600	23400	31500	27700	25300	.	.	.	.	.
	28	31700	27600	25200	34100	30000	27200	.	.	.	.	.
	30	34300	30000	27300	37000	32200	29200	.	.	.	.	.

das Durchgangsprofil und Hauptabmessungen der Krane in mm

	$\frac{D}{D_1}$ mit Hilfshub	$\frac{D}{D_1}$ ohne Hilfshub	E	F	G	c	d	$d1$	Radstand	maximaler Raddruck ohne Hilfshub			Laufschienenbreite	Spannweite
			1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1	2	3	1 3	m
ohne Hilfshub!		850	2000	400	—	—	—	—	2400	6300	6000	5800	50	10
		750	2200	.	.	.	.	.	.	6600	6300	6000	.	12
		.	2400	.	.	.	.	.	2600	6900	6500	6300	.	14
		.	2600	.	.	.	.	.	.	7200	6800	6600	.	16
		.	2800	.	.	.	.	.	2800	7500	7100	6800	.	18
		.	3000	.	.	.	.	.	3000	7800	7400	7100	.	20
		.	3200	.	.	.	.	.	3200	8300	7800	7500	55	22
		.	3400	.	.	.	.	.	3400	8600	8100	7800	.	24
		.	3600	.	.	.	.	.	3600	9000	8500	8100	.	26
		.	3800	.	.	.	.	.	3800	9500	8900	8500	.	28
		.	4000	.	.	.	.	.	4000	10000	9300	8900	.	30
ohne Hilfshub!		900	2000	400	—	—	—	—	2600	8000	7500	7200	50	10
		800	2200	.	.	.	.		.	8300	7800	7500	.	12
		.	2400	.	.	.	.	.	.	8700	8100	7800	.	14
		.	2600	.	.	.	.	.	.	9000	8400	8100	.	16
		.	2800	.	.	.	.	.	2800	9400	8800	8400	.	18
		.	3000	.	.	.	.	.	3000	9800	9100	8700	.	20
		.	3200	.	.	.	.	.	3200	10300	9500	9100	55	22
		.	3400	.	.	.	.	.	3400	10700	10000	9500	.	24
		.	3600	.	.	.	.	.	3600	11200	10300	9800	.	26
		.	3800	.	.	.	.	.	3800	11700	10700	10200	.	28
		.	4000	.	.	.	.	.	4000	12300	11300	10600	.	30
	900	900	2000	400	750	200	1650	650	2800	9700	9000	8800	55	10
	1400	900	2200	.	.	.	.	.	.	10100	9300	9100	.	12
	.	.	2400	.	.	.	.	.	.	10500	9700	9400	.	14
	.	.	2600	.	.	.	.	.	.	10900	10000	9700	.	16
	.	.	2800	.	.	.	.	.	.	11300	10400	10000	.	18
	.	.	3000	.	.	.	.	.	3000	11800	10800	10400	.	20
	.	.	3200	.	.	100	.	.	3200	12300	11300	10900	60	22
	.	.	3400	.	.	.	.	.	3400	12900	11800	11300	.	24
	.	.	3600	.	.	.	.	.	3600	13400	12200	11700	.	26
	.	.	3800	.	.	.	.	.	3800	14000	12800	12200	.	28
	.	.	4000	.	.	.	.	.	4000	14600	13400	12800	.	30

Tragkraft t	Spannweite m	Gewicht des kompletten Krans ohne Hilfshub 1 kg	ohne Hilfshub 2 kg	ohne Hilfshub 3 kg	mit Hilfshub 1 kg	mit Hilfshub 2 kg	mit Hilfshub 3 kg	Maße für A 1	A 2	A 3	B 1–2	C 1–3
12,5/3	10	15500	13800	12800	18000	16000	14800	1900	1900	1900	240	400
	12	16800	15000	13900	19400	17100	15900	.	.	.	.	.
	14	18400	16300	15000	21000	18500	17000	.	.	.	.	.
	16	20000	17800	16500	22600	20000	18400	.	.	.	.	.
	18	21800	19400	17900	24500	21600	19900	.	.	.	.	.
	20	23900	21100	19400	26500	23400	21400	.	.	.	.	.
	22	26400	23300	21300	29000	25500	23400	2000	2000	2000	.	300
	24	28600	25200	23000	31300	27500	25000	.	.	.	.	.
	26	31100	27400	25000	34000	29600	27000	.	.	.	.	.
	28	33600	29600	27000	36500	32000	29000	.	.	.	.	.
	30	36500	32000	29200	39400	34400	31200	.	.	.	.	.
15/3	10	18200	16200	14400	20800	18300	16300	2100	2100	2100	250	400
	12	19600	17600	15600	22400	19700	17600	.	.	.	.	.
	14	21400	19100	17000	24000	21200	18900	.	.	.	.	.
	16	23500	20700	18500	26000	22900	20400	.	.	.	.	.
	18	25500	22400	20000	28000	24600	22000	.	.	.	.	.
	20	27700	24500	21800	30300	26600	23600	.	.	.	.	.
	22	30000	26500	23900	32800	28700	25800	2200	2200	2200	.	300
	24	32600	28500	25600	35300	30800	27600	.	.	.	.	.
	26	35200	30800	27600	38000	33000	29500	.	.	.	.	.
	28	38000	33200	29700	41000	35400	31600	.	.	.	.	.
	30	41000	36000	32000	44000	38000	33800	.	.	.	.	.
20/5	10	20500	18500	16600	23500	21000	18900	2150	2150	2150	275	500
	12	22200	20000	18000	25400	22500	20200	.	.	.	.	.
	14	24100	21500	19400	27300	24100	21600	.	.	.	.	.
	16	26200	23500	21000	29300	26000	23300	.	.	.	.	.
	18	28600	25500	22800	31800	28000	25000	.	.	.	.	.
	20	31000	27500	24600	34200	30000	26900	.	.	.	.	.
	22	34300	30200	27000	37300	32800	29400	2250	2250	2250	.	400
	24	37000	32500	29100	40000	35000	31500	.	.	.	.	.
	26	40000	35000	31200	43000	37500	33600	.	.	.	.	.
	28	43000	37500	33500	46000	40000	36000	.	.	.	.	.
	30	46000	40000	36000	49000	42800	38300	.	.	.	.	.

das Durchgangsprofil und Hauptabmessungen der Krane in mm

$\frac{D}{D_1}$ mit Hilfshub	$\frac{D}{D_1}$ ohne Hilfshub	E 1–3	F 1–3	G 1–3	c 1–3	d 1–3	$d1$ 1–3	Radstand 1–3	maximaler Raddruck ohne Hilfshub 1	2	3	Laufschienenbreite 1–3	Spannweite m
950	950	2000	400	800	200	1750	650	3000	11000	10300	10100	55	10
1450	1000	2200	.	.	.	.	.	.	11400	10700	10400	.	12
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	11800	11100	10800	.	14
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	12300	11500	11200	.	16
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	12800	12000	11600	.	18
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	13300	12500	12000	.	20
.	.	3200	.	.	100	.	.	3200	13900	13000	12500	60	22
.	.	3400	.	.	.	.	.	3400	14400	13500	13000	.	24
.	.	3600	.	.	.	.	.	3600	15100	14000	13400	.	26
.	.	3800	.	.	.	.	.	3800	15700	14500	13900	.	28
.	.	4000	.	.	.	.	.	4000	16300	15100	14500	.	30
1000	1000	2200	500	850	200	1850	650	3200	12600	12200	11800	55	10
1500	1100	2300	.	.	.	.	.	.	13100	12600	12200	.	12
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	13600	13100	12600	.	14
.	.	2500	.	.	.	.	.	.	14200	13500	13000	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	14800	14000	13500	.	18
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	15400	14600	14000	.	20
.	.	3000	.	.	100	.	.	.	16000	15200	14500	60	22
.	.	3200	.	.	.	.	.	3400	16600	15700	15000	.	24
.	.	3400	.	.	.	.	.	3600	17300	16200	15500	.	26
.	.	3600	.	.	.	.	.	3800	18000	16800	16000	.	28
.	.	3800	.	.	.	.	.	4000	18600	17400	16500	.	30
1050	1050	2200	600	900	300	1950	650	3400	16000	15300	14700	65	10
1550	1100	2300	.	.	.	.	.	.	16500	15700	15100	.	12
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	17000	16000	15600	.	14
.	.	2500	.	.	.	.	.	.	17600	16600	16100	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	18200	17200	16500	.	18
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	18800	17800	17000	.	20
.	.	3000	.	.	200	.	.	.	19600	18500	17700	.	22
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	20300	19100	18200	.	24
.	.	3400	.	.	.	.	.	3600	21000	19700	18700	.	26
.	.	3600	.	.	.	.	.	3800	21700	20300	19300	.	28
.	.	3800	.	.	.	.	.	4000	22400	20900	19800	.	30

Tragkraft	Spannweite	Gewicht des kompletten Krans						Maße für				
		ohne Hilfshub			mit Hilfshub			A			B	C
		1	2	3	1	2	3					
t	m	kg	kg	kg	kg	kg	kg	1	2	3	1–3	1–3
	10	22200	20100	18100	25700	23000	20700	2200	2200	2200	275	600
	12	24100	21800	19600	27600	24600	22200	.	.	.	.	.
	14	26000	23500	21000	29500	26500	23700	.	.	.	.	.
	16	28500	25500	22800	32000	28500	25500	.	.	.	.	.
	18	31000	27600	24800	34500	30500	27300	.	.	.	.	.
25/5	20	33500	29600	26500	37000	32700	29200	.	.	.	.	.
	22	36600	32600	29100	40000	35500	31900	2300	2300	2300	.	500
	24	39500	35000	31200	43000	38000	34000	.	.	.	.	.
	26	42400	37300	33500	46000	40500	36200	.	.	.	.	.
	28	46000	40000	36000	49500	43200	38500	.	.	.	.	.
	30	49300	43000	38400	53000	46200	41000	.	.	.	.	.
	10	25200	22900	20500	29000	26000	23500	2300	2300	2300	300	700
	12	27200	24500	22100	31000	27800	25200	.	.	.	.	.
	14	29500	26500	23800	33000	29600	27000	.	.	.	.	.
	16	31800	28500	25600	35400	31600	28800	.	.	.	.	.
	18	34200	30700	27500	38000	34000	30600	.	.	.	.	.
30/7,5	20	37000	33000	29500	40800	36200	32600	.	.	.	.	.
	22	40000	35300	31800	43600	38600	34800	2400	2400	2400	.	600
	24	43000	38000	34000	46700	41000	37000	.	.	.	.	.
	26	46000	40700	36300	49900	44000	39400	.	.	.	.	.
	28	49500	43500	39000	53100	47000	42000	.	.	.	.	.
	30	53300	46700	41900	57000	50000	44800	.	.	.	.	.
	10	31300	27400	24500	35200	30800	27900	2500	2500	2500	325	750
	12	33500	29400	26400	37400	32800	29600	.	.	.	.	.
	14	36000	31600	28300	40000	35100	31600	.	.	.	.	.
	16	38800	33900	30400	42700	37400	33700	.	.	.	.	.
	18	41400	36300	32600	45400	39700	36000	.	.	.	.	.
40/7,5	20	44000	38600	34600	48000	42000	38000	.	.	.	.	.
	22	47500	41500	37200	51500	45000	40600	2600	2600	2600	.	650
	24	50700	44300	39700	54800	47900	43000	.	.	.	.	.
	26	53800	47100	42400	58000	50700	45700	.	.	.	.	.
	28	57800	50200	45000	61600	53800	48300	.	.	.	.	.
	30	61400	53500	47900	65500	57000	51200	.	.	.	.	.

das Durchgangsprofil und Hauptabmessungen der Krane in mm

$\frac{D}{D_1}$ mit Hilfshub	$\frac{D}{D_1}$ ohne Hilfshub	E 1–3	F 1–3	G 1–3	c 1–3	d 1–3	d 1 1–3	Radstand 1–3	maximaler Raddruck ohne Hilfshub 1	2	3	Laufschienenbreite 1–3	Spannweite m
1100	1100	2200	600	950	300	2050	650	3800	18400	17800	17400	65	10
1600	1150	2300	.	.	.	.	.	.	19000	18400	17900	.	12
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	19600	19000	18400	.	14
.	.	2500	.	.	.	.	.	.	20300	19500	18900	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	21000	20100	19500	.	18
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	21700	20700	20100	.	20
.	.	3000	.	.	200	.	.	.	22500	21400	20700	.	22
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	23200	22100	21300	.	24
.	.	3400	.	.	.	.	.	.	24000	22800	21900	.	26
.	.	3600	.	.	.	.	.	.	24800	23500	22500	.	28
.	.	3800	.	.	.	.	.	4000	25800	24200	23200	.	30
1200	1200	2200	600	1050	400	2250	650	4000	21300	20600	20100	75	10
1700	1150	2300	.	.	.	.	.	.	22100	21300	20800	.	12
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	22900	22000	21500	.	14
.	.	2500	.	.	.	.	.	.	23600	22700	22100	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	24400	23400	22700	.	18
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	25200	24100	23400	.	20
.	.	3000	.	.	300	.	.	.	26000	24800	24000	.	22
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	26600	25400	24600	.	24
.	.	3400	.	.	.	.	.	.	27500	26100	25200	.	26
.	.	3600	.	.	.	.	.	.	28300	26800	25800	.	28
.	.	3800	.	.	.	.	.	.	29200	27600	26500	.	30
1300	1300	2200	600	1150	400	2450	700	4000	27500	26400	25700	75	10
1850	1400	2200	.	.	.	.	.	.	28300	27200	26400	.	12
.	.	2200	.	.	.	.	.	.	29200	28000	27200	.	14
.	.	2300	.	.	.	.	.	.	30100	28800	28000	.	16
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	31000	29600	28700	.	18
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	31800	30400	29400	.	20
.	.	2800	.	.	300	.	.	.	32700	31200	30100	.	22
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	33600	32000	30800	.	24
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	34400	32700	31500	.	26
.	.	3400	.	.	.	.	.	.	35300	33500	32100	.	28
.	.	3600	.	.	.	.	.	.	36200	34300	32900	.	30

Tragkraft t	Spannweite m	Gewicht des kompletten Krans ohne Hilfshub 1 kg	ohne Hilfshub 2 kg	ohne Hilfshub 3 kg	mit Hilfshub 1 kg	mit Hilfshub 2 kg	mit Hilfshub 3 kg	Maße für A 1	A 2	A 3	B 1–3	C 1–3
	10	36600	32000	28800	42300	36900	33200	2600	2600	2600	350	800
	12	38900	33800	30700	44500	38900	35000	.	.	.	.	.
	14	41400	36100	32600	47000	41100	37000	.	.	.	.	.
	16	44400	38600	35000	50000	43700	39300	.	.	.	.	.
50	18	47700	41400	37200	53400	46500	41600	.	.	.	.	.
10	20	51000	44200	39900	56600	49300	44100	.	.	.	.	.
	22	55000	47800	43200	60600	53000	47500	2700	2700	2700	.	700
	24	58800	51000	45900	64600	56000	50500	.	.	.	.	.
	26	63200	54800	49300	69000	60000	53800	.	.	.	.	.
	28	68300	58800	52800	74000	64000	57000	.	.	.	.	.
	30	73300	62800	56200	79000	68000	60600	.	.	.	.	.
	10	41700	36800	33700	47900	42300	38500	2800	2800	2800	375	900
	12	44400	39200	35900	50500	44600	40600	.	.		.	.
	14	47600	42000	38000	53700	47300	43000	.	.		.	.
	16	51200	44800	40700	57200	50300	45400	.	.		.	.
60	18	55000	48000	43600	61200	53300	48400	.	.	.	.	.
10	20	58500	51500	46700	65200	57000	51500	.	.	.	.	.
	22	63800	55400	50200	70000	61000	55000	2900	2900	2900	.	800
	24	68600	59400	53800	75000	65000	58500	.	.	.	.	.
	26	74200	64000	57500	80300	69500	62300	.	.	.	.	.
	28	80000	68800	61800	86000	74200	66400	.	.	.	.	.
	30	85500	73500	66000	91800	79000	71000	.	.	.	.	.
	10	47500	42300	38800	54000	48300	44200	3000	3000	3000	400	1000
	12	50600	45200	41500	57500	51200	46900	.	.	.	.	.
	14	54300	48200	44500	61000	54400	49800	.	.	.	.	.
	16	59000	52200	47600	65600	58200	53000	.	.	.	.	.
75	18	63500	56200	51300	70300	62300	56700	.	.	.	.	.
15	20	68500	60300	55000	75300	66400	60400	.	.	.	.	.
	22	75000	65300	59500	81600	71600	65000	3100	3100	3100	.	900
	24	80500	70300	64000	87400	76600	69400	.	.	.	.	.
	26	86500	75500	68500	93400	81600	74000	.	.	.	.	.
	28	93200	81200	73200	100000	87300	78600	.	.	.	.	.
	30	100000	86800	78200	107000	93000	83500	.	.	.	.	.

das Durchgangsprofil und Hauptabmessungen der Krane in mm													
$\frac{D}{D_1}$ mit Hilfshub	$\frac{D}{D_1}$ ohne Hilfshub	*E*	*F*	*G*	*c*	*d*	*d* 1	Radstand	maximaler Raddruck ohne Hilfshub			Laufschienenbreite	Spannweite
		1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1–3	1	2	3	1–3	m
1400	1400	2200	600	1150	400	2550	900	4200	33100	31800	31100	90	10
2050	1500	2200	.	.	.	.	.	.	34200	32800	32000	.	12
.	.	2200	.	.	.	.	.	.	35300	33700	32900	.	14
.	.	2300	.	.	.	.	.	.	36400	34800	33900	.	16
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	37500	35700	34800	.	18
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	38500	36700	35700	.	20
.	.	2800	.	.	300	.	.	.	39500	37500	36500	100	22
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	40500	38400	37300	.	24
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	41600	39400	38200	.	26
.	.	3400	.	.	.	.	.	.	42800	40300	39000	.	28
.	.	3600	.	.	.	.	.	.	44000	41300	39900	.	30
1450	1450	2200	600	1150	500	3000	1100	4400	38700	37300	36600	100	10
2650	1550	2200	.	.	.	.	.	.	40000	38400	37700	.	12
.	.	2300	.	.	.	.	.	.	41300	39500	38800	.	14
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	42700	40700	40000	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	44000	41900	41000	.	18
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	45300	43100	42000	.	20
.	.	2800	.	.	400	.	.	.	46500	44300	43000	110	22
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	47800	45400	44000	.	24
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	49300	46500	45100	.	26
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	50700	47700	46100	.	28
.	.	3400	.	.	.	.	.	.	52000	48800	47200	.	30
1500	1500	2200	600	1600	500	3100	1150	4600	46400	45000	44100	110	10
2750	1600	2200	.	.	.	.	.	.	48200	46700	45700	.	12
.	.	2300	.	.	.	.	.	.	50000	48400	47400	.	14
.	.	2400	.	.	.	.	.	.	51800	50000	48900	.	16
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	53200	51300	50000	.	18
.	.	2600	.	.	.	.	.	.	54700	52600	51200	.	20
.	.	2800	.	.	400	.	.	.	56300	54000	52500	120	22
.	.	2800	.	.	.	.	.	.	57800	55400	53800	.	24
.	.	3000	.	.	.	.	.	.	59500	56700	55100	.	26
.	.	3200	.	.	.	.	.	.	61200	58200	56300	.	28
.	.	3300	.	.	.	.	.	.	63000	59700	57700	.	30

Zweiter Abschnitt.

Kranlaufbahnen.

Die Biegungsbeanspruchung[1]) der in der Fig. 22 abgebildeten, von einer Last R befahrenen Kranlaufbahn, wie auch die Pressung der aus Beton, Mauerwerk oder einem andern Material bestehenden Unterlage dürften nicht genau ermittelbar sein. Ein Versuch zur genauen Lösung der Aufgabe würde nicht nur außerordentlich weit führen, sondern auch Formeln ergeben, die wegen ihres Umfanges praktisch kaum Verwendung finden könnten.

Eine angenäherte, brauchbare Beziehung zwischen der zulässigen Beanspruchung σ der Laufbahn und der größten Pressung k der Unterlage liefert folgender Ausdruck

$$\sigma = \frac{9 \cdot R^2}{64 \cdot W \cdot b \cdot k} \qquad (29)$$

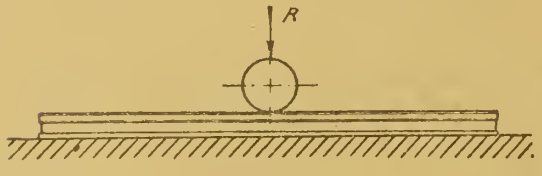


Fig. 22.

wo W das Widerstandsmoment und b die Fußbreite des Eisenquerschnitts bedeuten.

Der Ausdruck ergibt sich (Fig. 22 b), wenn man annimmt, daß die Pressungslinie zwischen der Schiene und der Unterlage nach einer symmetrischen Kurve (Parabel) verläuft, deren Scheitel unter der Lastangriffsstelle die größte Beanspruchung k der Unterlage darstellt.

Der Inhalt des Pressungsschemas ist

$$R = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot k,$$

hieraus

$$a = \frac{3 \cdot R}{4 \cdot b \cdot k}.$$

[1]) Siehe mein Aufsatz im »Eisenbau«, Jahrgang 1912, Heft 7. (Verlag W. Engelmann, Leipzig.)

Das Moment der Schiene unter dem Lastangriff beträgt

$$M = \frac{R}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot a = \frac{3 \cdot R \cdot a}{16}.$$

Nach Einführung des für a gefundenen Wertes folgt

$$M = \frac{9 \cdot R^2}{64 \cdot b \cdot k}$$

und wegen

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

ergibt sich schließlich

$$\sigma = \frac{9 \cdot R^2}{64 \cdot W \cdot b \cdot k}.$$

Beispiel 12 (Zahlenaufgabe).

$R = 14\,000$ kg
$W = 280$ cm³
$b = 30$ cm
$k = 8$ kg/cm² (Mauerwerk),

Beanspruchung der Schiene

$$\sigma = \frac{9 \cdot \overline{14000}^2}{64 \cdot 280 \cdot 30 \cdot 8} = \sim 410 \text{ kg/cm}^2.$$

Nun läßt sich aber nicht sagen, ob die angesetzte Pressung k und die Spannung σ wie gerechnet eintreten, weil die Werte in Wirklichkeit abhängig sind von dem elastischen Verhalten der Schiene und des Mauerwerks (Fig. 22 a). Wohl ist das Produkt aus k und σ als richtig anzusehen, nämlich

$$k \cdot \sigma = 8 \cdot 410 = 3280 = \text{konstant}.$$

Es läßt sich aber folgendes überlegen: Je elastischer die Unterlage ist, um so länger wird die Berührungsfläche (Tragfläche) zwischen Schiene und Unterlage sein. Damit ist aber zugleich, weil die sich biegende Schiene einem Weitersenken entgegenstrebt, ein Nachlassen der Pressung k und eine Steigerung der Spannung σ verbunden. Bis schließlich ein Ausgleich der elastischen Formänderung beider Teile unter bestimmten Werten von k und σ zustande kommt.

Hiernach erscheint es notwendig, eine weitere, nicht zu verwickelte, die Elastizität der Materialien berücksichtigende Formel zu suchen, die es ermöglicht, obige Resultate zu prüfen, bzw. die Teilgrößen k und σ festzustellen.

Es bezeichnen weiter

J das Trägheitsmoment der Laufbahn
E ihre Elastizitätszahl
h die Höhe der Unterlage (Fundament)
E_m deren Elastizitätszahl.

Unter der Wirkung der Pressung Fig. 22 a und 22 b tritt eine Verbiegung der Schiene ein, deren größter Wert unter der Last R aus der Bedingung

$$\delta = \frac{1}{J \cdot E} \int M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx$$

hergeleitet ist

$$\delta = \frac{9 \cdot R^4}{1536 \cdot J \cdot E \cdot b^3 \cdot k^3} \quad . \quad (30)$$

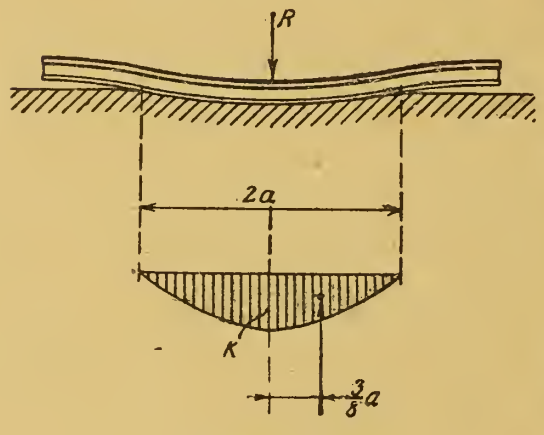


Fig. 22 a — b.

Zugleich wird die Unterlage entsprechend der Biegungsform der Schiene eingedrückt. Hierbei verbiegt sich auch die Unterlage, aber diese Biegung, die in derselben Weise wie die Biegung der Schiene erfolgt, ist bei der stets verhältnismäßig großen Höhe des Fundaments sehr gering. Infolgedessen kann die Deformation daraus gegenüber der direkten Zusammenpressung vernachlässigt werden. Weiter dürfte es zulässig sein, das ganze Fundament mit dem tragenden Boden als verwachsen anzusehen, weil die Zusammenpressung hauptsächlich in den oberen Schichten der Unterlage stattfindet, also dort, wo die Schiene aufliegt.

Der Schienendruck oder die Pressung der Schiene verteilt sich strahlenförmig in dem Fundamentkörper. Wir betrachten die Unterlage an der Stelle unter R, also dort, wo sie durch die größte Pressung k belastet wird.

Die Zusammendrückung dieser Stelle, wenn man sich als tragenden Körper einen kegelförmigen Stab von großer Länge mit dem mittleren Querschnitt F_m denkt, würde etwa sein

$$\delta = \frac{k \cdot h}{E_m \cdot F_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Der mittlere Querschnitt F_m ergibt sich, wenn man annimmt, daß die Ausstrahlung der Druckverteilung unter 45° erfolgt (Fig. 22 c)

$$F_m = \frac{3 \cdot R + 2 \cdot b \cdot h \cdot k}{3 \cdot R} \cdot$$

In den Gleichungen 30 und 31 waren die Durchbiegung der Schiene sowie die Zusammenpressung der Unterlage gefunden worden. Beide Formänderungen müssen einander gleich sein, somit

$$\frac{9 \cdot R^4}{1536 \cdot J \cdot E \cdot b^3 \cdot k^3} = \frac{k \cdot h}{E_m \cdot F_m}.$$

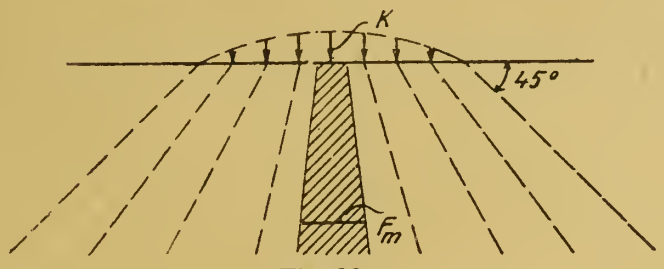


Fig. 22c.

Hieraus läßt sich die Pressung k der Unterlage berechnen, und zwar zu

$$k = 0{,}28 \cdot \frac{R}{b} \sqrt[4]{\frac{E_m \cdot F_m \cdot b}{E \cdot J \cdot h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Weiter liefert Gl. 29

$$\sigma = 0{,}50 \cdot \frac{R}{W \cdot \sqrt[4]{\frac{E_m \cdot F_m \cdot b}{E \cdot J \cdot h}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Setzt man $h = \infty$, so ergibt sich

$$k = 0{,}28 \cdot \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt[4]{R}}{b} \cdot \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34$$

und

$$\sigma = 0{,}50 \cdot \frac{R \cdot \sqrt[4]{R}}{W \cdot \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

worin

$$\eta = \sim \sqrt[4]{\frac{b^2 \cdot k \cdot E_m}{J \cdot E} \cdot \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Bei Benutzung der Formeln muß k in dem letzten Ausdruck zunächst geschätzt werden. Die mehr oder weniger zutreffende Schätzung des Wertes hat aber wegen der Wurzel keine nennenswerte Wirkung auf das Ergebnis der Gleichungen 34 und 35.

Nachprüfung der Resultate des obigen Zahlenbeispiels.

$$J = 2800 \text{ cm}^4 \cdot$$
$$E = 2\,150\,000$$
$$E_m = 93\,000$$

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{30^2 \cdot 6 \cdot 93000 \cdot 2}{2800 \cdot 2150000 \cdot 3}} = 0{,}485$$

$$\sigma = 0{,}50 \cdot \frac{14000 \sqrt[4]{14000}}{280 \cdot 0{,}485} = \sim 500 \text{ kg/cm}^2$$

$$k = 0{,}28 \cdot \frac{\sqrt{14000} \cdot \sqrt[4]{14000}}{30} \cdot 0{,}485 = \sim 6 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 13. (Zahlenaufgabe.) Laufschiene Preußische Staatsbahnschiene Nr. 9

$J = 1363$ cm^4 $\quad R = 20$ t
$W = 197$ cm^3 $\quad$ Unterlage Beton
$b = 11$ cm $\quad E_m = 140000$
$E = 2150000$

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{11^2 \cdot 25 \cdot 140000 \cdot 2}{1363 \cdot 2150000 \cdot 3}} = 0{,}555$$

$$\sigma = 0{,}50 \cdot \frac{20000 \cdot \sqrt[4]{20000}}{197 \cdot 0{,}555} = 1090 \text{ kg/cm}^2$$

$$k = 0{,}28 \cdot \frac{\sqrt{20000} \cdot \sqrt[4]{20000}}{11} \cdot 0{,}555 = 24 \text{ kg/cm}^2.$$

Wie aus den Darlegungen hervorgeht, machen die Ermittelungen keinen Anspruch auf Genauigkeit; der Natur der Sache nach lassen sich aber genaue Beziehungen kaum aufstellen, es sei denn auf außerordentlich weitläufigen Wegen. Die hierbei erzielten Formeln dürften dann aber derart umständlich sein, daß sie, wie eingangs schon bemerkt, praktisch kaum Verwendung finden könnten. Demgegenüber geben die Formeln 34 und 35 schnell einen ungefähren Anhalt über die Festigkeit der Laufbahn; es wird nur geboten sein, eben aus dem Grunde, weil die Ermittelungen nur angenäherte sind, die spezifischen Beanspruchungen k und σ in niedrigen Grenzen zu halten.

In den nachstehenden Tabellen sind eine Anzahl häufig vorkommender, nach obigen Formeln berechneter Laufbahnen aufgeführt. Die Unterlage der Schienen besteht aus Beton mit $E = 140\,000$ kg/cm^2.

Es bedeuten:

R den Raddruck in t.
σ die Beanspruchung der Schiene in kg/cm^2,
k die Beanspruchung der Unterlage in kg/cm^2,
g das Gewicht der Laufbahn in kg pro m,
γ das Verhältnis von $g : R$.

Schiene	R	σ	k	g	γ
Aach. Hütte Nr. 1	6,96	1000	18,3	22,5	3,23
Aach. Hütte Nr. 2	9,54	1000	18,0	32,2	3,28
Aach. Hütte Nr. 3	12,91	1000	18,0	43,8	3,39
Aach. Hütte Nr. 4	15,60	1000	17,1	57,0	3,66
Westf. Stahlwerk Bochum (W. S.) .	25,78	1000	20,6	82,9	3,22
A. H. Nr. 1, Lamelle 180 · 10 . . .	8,98	1000	15,1	36,7	4,07
A. H. Nr. 2, Lamelle 200 · 10 . . .	12,07	1000	15,6	47,9	3,98
A. H. Nr. 3, Lamelle 250 · 12 . . .	16,66	1000	15,1	67,4	4,04
A. H. Nr. 4, Lamelle 300 · 20 . . .	21,65	1000	14,1	104,1	4,82
W. S., Lamelle 300 · 20	34,48	1000	16,6	130,0	3,77
Preußen Nr. 6	15,49	1000	20,7	33,4	2,16
Preußen Nr. 7	15,64	1000	20,6	37,3	2,39
Preußen Nr. 8	18,02	1000	21,4	41,1	2,28
Preußen Nr. 9	18,28	1000	21,6	43,4	2,38
Preußen Nr. 15	19,71	1000	22,2	45,0	2,29
Preußen Nr. 6, Lamelle 200 · 12 . .	20,16	1000	14,52	52,3	2,60
Preußen Nr. 7, Lamelle 200 · 12 . .	20,99	1000	15,0	56,1	2,67
Preußen Nr. 8, Lamelle 220 · 14 . .	24,81	1000	15,1	65,0	2,62
Preußen Nr. 9, Lamelle 230 · 16 . .	25,16	1000	14,6	72,3	2,88
Preußen Nr. 15. Lamelle 250 · 18 .	27,91	1000	14,2	80,4	2,89

Es kommt vor, daß die Laufschiene auf einer durchgehenden Längsschwelle aus Holz, die in regelmäßigen Abständen l auf Querschwellen ruht, verlegt wird. Dann hat man zwei lose aufeinander gelegte Biegungsträger mit verschiedenen Trägheitsmomenten J und verschiedenen Elastizitätszahlen E, von denen jeder einen bestimmten Teil des Raddruckes aufnimmt. In Frage steht die Pressung zwischen dem Holz und der aufliegenden Schiene. Diese Pressung ist die positive Belastung der Längsschwelle, während sie die aufliegende Schiene von unten herauf gegen den Raddruck entlastet. Man kann annehmen, daß die Pressung nach einer Parabel verläuft, mit der Scheitelhöhe p in der Mitte des Feldes unterhalb des Raddruckes.

Zur Schiene gehören J_1 und E_1.
Zur Längsschwelle J_2 und E_2.

Die Durchbiegung eines der beiden Träger in der Mitte, allein aus der parabelförmigen Pressung berechnet sich zu

$$f_p = \frac{p \cdot l^4}{100 \cdot J \cdot E},$$

Die Durchbiegung der Schiene beträgt demnach

$$\frac{R\,l^3}{48 \cdot J_1 \cdot E_1} - \frac{p \cdot l^4}{100 \cdot J_1 \cdot E_1},$$

die der Holzwelle

$$\frac{p \cdot l^4}{100 \cdot J_2 \cdot E_2}.$$

Beide Verbiegungen müssen einander gleich sein, somit

$$\frac{R \cdot l^3}{48 \cdot J_1 \cdot E_1} - \frac{p \cdot l^4}{100 \cdot J_1 \cdot E_1} = \frac{p \cdot l^4}{100 \cdot J_2 \cdot E_2}.$$

Hieraus folgt

$$p = \frac{25 \cdot R}{12 \cdot l \left(1 + \frac{J_1 \cdot E_1}{J_2 \cdot E_2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (36a)$$

Das Moment in der Mitte des Balkens aus p ist

$$M_p = \frac{p \cdot l^2}{10}.$$

Es bestehen somit folgende Momente

Schiene $$M_m = \frac{R \cdot l}{4} - \frac{p \cdot l^2}{10},$$

Längsschwelle $$M_m = \frac{p \cdot l^2}{10}.$$

Diese Momente können, um der Kontinuität der Laufbahn Rechnung zu tragen, mit dem Faktor $n = 0{,}75$ multipliziert werden.

Legt man in der Feldmitte und an den Auflagern zwischen die Schiene und die Längsschwelle ein kurzes Futter, so daß die Schiene nur an diesen Stellen auf der Holzschwelle ruht, dann gibt der Raddruck, wenn das Rad in der Feldmitte steht, folgenden Einzeldruck durch das Futter auf die Holzschwelle ab

$$X = \frac{R}{1 + \frac{J_1 \cdot E_1}{J_2 \cdot E_2}} \quad \ldots\ldots \quad (36b)$$

Berücksichtigt man wieder angenähert die Kontinuität der Laufbahn, dann werden Schiene und Längsschwelle von folgenden Momenten angegriffen

$$\text{Schiene} \qquad M_m = (P - X) \cdot \frac{l}{4} \cdot 0{,}75$$

$$\text{Längsschwelle} \quad M_m = \frac{X \cdot l}{4} \cdot 0{,}75.$$

Beispiel 14. Ein Laufbahnträger, befahren von beliebig vielen Lasten P_1, P_2, P_3 usw. (Fig. 23).

Wir haben eine möglichst schnelle und genaue Ermittelung der Maximalmomente im Auge. Das übliche Verfahren ist das des Seilpolygons, d. h. nach Aufzeichnung desselben durch vieles Verschieben des Trägers und durch Probieren den Größtwert des Momentes für jede Stelle des Balkens festzulegen. Allein diese Arbeit läßt an Umständlichkeit und Zeitaufwendung nichts zu wünschen übrig und liefert nicht einmal genaue Resultate.

Viel besser ist die im vorigen Abschnitt an einfachen Belastungsfällen nachgewiesene Methode der Parabeln (Fig. 23). Das Moment im Angriffspunkt einer der Lasten IV liefert im allgemeinen die Gleichung

$$M_x = \frac{R}{l} \{(l - t) - x\}\, x - R_1 t_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

wo R die Resultierende aller Kräfte und R_1 die Resultierende derjenigen Kräfte ist, die rechts vom Kraftangriff IV liegen.

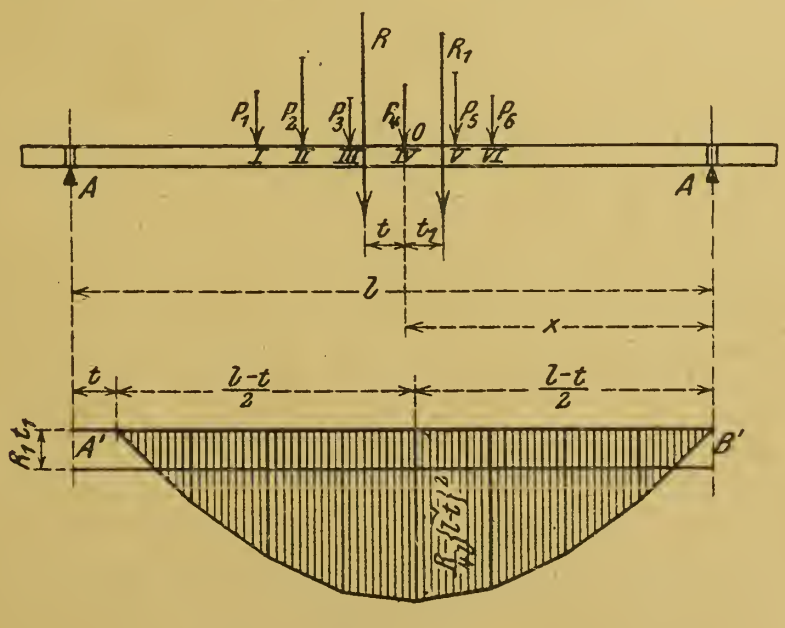


Fig. 23 — 23 a.

Das erste Glied der Gleichung stellt eine Parabel dar von der Länge

$$(l - t)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{R}{4\,l}\,(l - t)^2,$$

während das zweite Glied eine Gerade ist, die auf der ganzen Strecke von der zu konstruierenden Kurve in Abzug gebracht wird.

Die schraffierte Fläche (Fig. 23 a) gibt den Verlauf der Maximalmomente unter der Last IV der fahrenden Lastengruppe an und ist so lange gültig, als letztere in ihrer Gesamtheit sich zwischen den Auflagern bewegt.

Was für die Momente unter dem Kraftangriff IV gilt, gilt natürlich auch für die Momente unter jeder der übrigen Lasten, woraus zu schließen ist, daß die Maximalmomente des ganzen Trägers sich aus einzelnen Parabelbogen zusammensetzen, deren Abmessungen erfahren werden durch die allgemeine Gleichung (37).

Auf Grund dieser Beziehungen mögen nachfolgend einige zahlenmäßige Aufgaben gelöst werden.

Beispiel 15. Ein Kranbahnträger, befahren von zwei 50 t-Kranen mit je vier bzw. zwei Laufrädern (Fig. 24).

a) Die Momente unter der Last IV in der veränderlichen Entfernung x vom rechten Auflager ermitteln sich wie folgt (Fig. 24 a).

Die Auflagerreaktion B beträgt

$$B = \frac{120}{10}\,(10 - x + 0{,}25) = 123 - 12\,x,$$

daher

$$M_x = (123 - 12\,x)\,x - 60 \cdot 2 = 12\,x\left(\frac{123}{12} - x\right) - 120.$$

Das erste Glied der Gleichung ist eine Parabel mit folgenden Verhältnissen:

$$\text{für } x = \frac{123}{12} = 10{,}25 \qquad \text{wird } y = M_x = 0,$$

$$\text{für } x = \frac{123}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10{,}25}{2} \text{ wird } y = M_x = \text{maximum}$$

$$M_{\max} = \frac{\overline{123}^2}{4 \cdot 12} = 315{,}19 \text{ mt}.$$

In Fig. 24 a ist die Parabel aufgezeichnet, sodann von ihr das zweite Glied (120 mt) als Gerade abgezogen, so daß der schraffierte Umriß die Maximalmomente unter der Last IV liefert. Die Grenzen, außerhalb deren der Umriß seine Gültigkeit verliert, sind gegeben mit dem Augenblick, wo die Lasten I und VI über die Auflager schreiten.

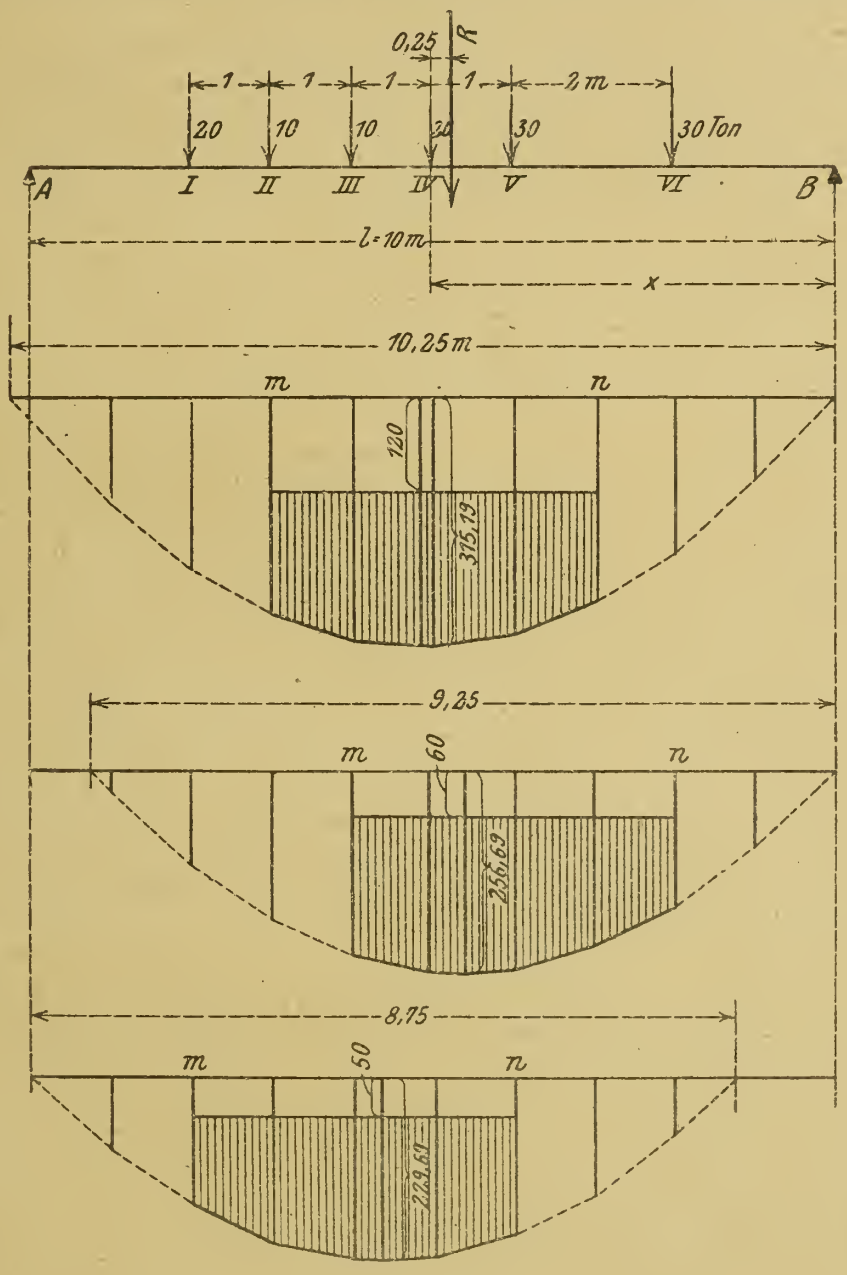


Fig. 24.

Fig. 24 a.

Fig. 24 b.

Fig. 24 c.

b) Die Momente unter der Last V im Abstande x vom rechten Auflager (Fig. 24 b).

Die Auflagerreaktion

$$B = \frac{120}{10}(10 - x - 0{,}75) = 111 - 12\,x,$$

daher

$$M_x = (111 - 12\,x)\,x - 2 \cdot 30 = 12\,x\left(\frac{111}{12} - x\right) - 60.$$

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\frac{111}{12} = 9{,}25 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{111}^2}{4 \cdot 12} = 256{,}69 \text{ mt.}$$

Fig. 24 b Aufzeichnung der Parabel und Subtraktion des zweiten Gliedes. Die schraffierte Fläche liefert die Maximalmomente unter der Last V zwischen den Grenzen *m* und *n*.

c) Die Momente unter der Last III im Abstand *x* vom linken Auflager (Fig. 24 c).

$$A = \frac{120}{10}(10 - x - 1{,}25) = 105 - 12\,x$$

$$M_x = (105 - 12\,x)\,x - (20 \cdot 2 + 10 \cdot 1) = 12\,x\left(\frac{105}{12} - x\right) - 50.$$

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\frac{105}{12} = 8{,}75 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{105}^2}{4 \cdot 12} = 229{,}69 \text{ mt.}$$

Fig. 24 c. Konstruktion der Maximalmomente unter der Last III zwischen den Grenzen *m* und *n*.

d) Die Momente unter der Last II im Abstande *x* vom linken Auflager (Fig. 24 d).

$$A = \frac{120}{10}(10 - x - 2{,}25) = 93 - 12\,x$$

$$M_x = (93 - 12\,x)\,x - 20 \cdot 1 = 12\,x\left(\frac{93}{12} - x\right) - 20.$$

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\frac{93}{12} = 7{,}75 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{93}^2}{4 \cdot 12} = 180 \text{ mt.}$$

Fig. 24 d. Konstruktion der Maximalmomente unter der Last II zwischen den Grenzen *m* und *n*.

e) Die Momente unter der Last I im Abstande x vom linken Auflager (Fig. 24 e).

$$A = \frac{120}{10}(10 - x - 3{,}25) = 81 - 12\,x$$

$$M_x = (81 - 12\,x)\,x = 12\,x\left(\frac{81}{12} - x\right).$$

Hier fällt das zweite Glied fort; man hat nur eine Parabel zu zeichnen von der Länge

$$\frac{81}{12} = 6{,}75 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{81^2}{4 \cdot 12} = 136{,}69 \text{ mt.}$$

Die Grenzen m und n ergeben sich wie oben.

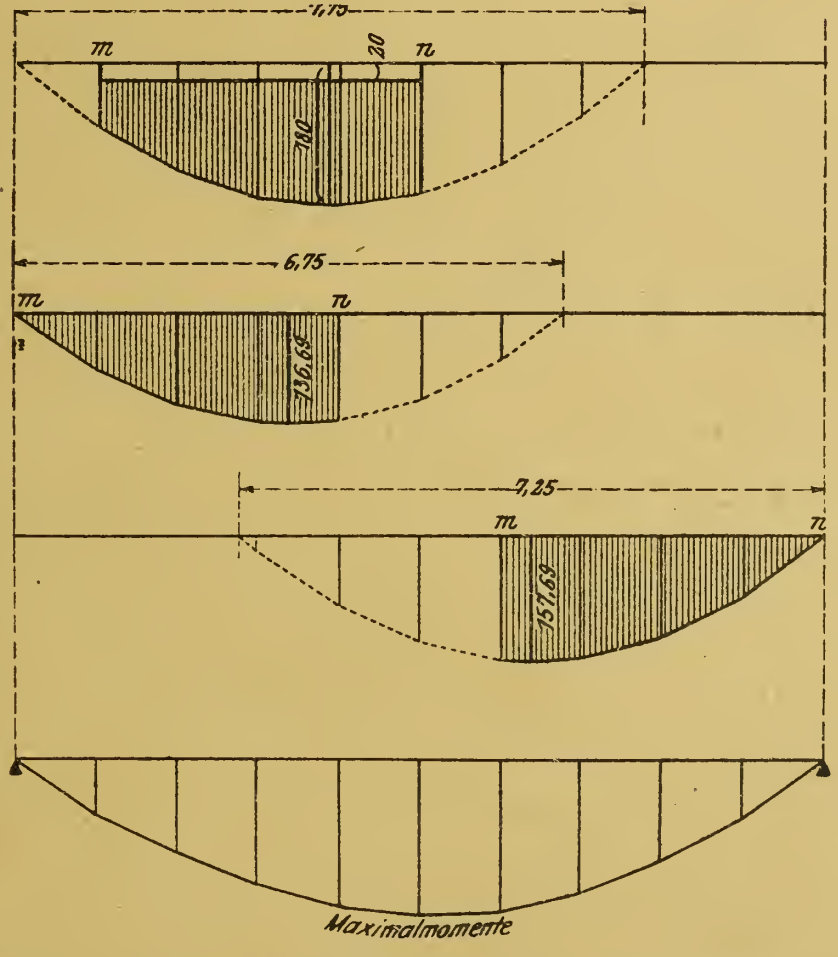


Fig. 24 d.

Fig. 24 e.

Fig. 24 f.

Fig. 24 g.

f) Die Momente unter der Last VI im Abstande x vom rechten Auflager (Fig. 24 f).

$$B = \frac{120}{10}(10 - x - 2{,}75) = 87 - 12\,x)$$

$$M_x = (87 - 12\,x)\,x = 12\,x\left(\frac{87}{12} - x\right).$$

Eine Parabel von der Länge

$$\frac{87}{12} = 7{,}25 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{87}^2}{4 \cdot 12} = 157{,}69 \text{ mt.}$$

Fig. 24 f gibt die Konstruktion der Maximalmomente unter der Last VI zwischen den Grenzen *m* und *n*.

Nunmehr werden sämtliche Umrisse auf der gemeinsamen Basis *l* zusammengeworfen, und es erscheint ein Gebilde, das in seinen äußersten Grenzen die gesuchten größten Momente des Trägers liefert (Fig. 24 g).

Es ist zu beachten, daß Belastungsarten vorkommen, bei denen die Momente in der Nähe der Stützen erst am größten werden, wenn die äußersten Lasten bereits über das Auflager hinweggeschritten sind. Es soll nicht versäumt werden, diese Fälle im Rechnungsgang der nächsten Aufgabe zu betrachten.

Beispiel 16. Ein Träger, befahren von vier ungleichen Lasten (Fig. 25).

a) Die Momente unter der Last III im Abstande x vom rechten Auflager (Fig. 25 a). Die Auflagereaktion

$$B = \frac{120}{10}(10 - x - 0{,}75) = 111 - 12x$$

$$M_x = (111 - 12x)\,x - 10 \cdot 2 = 12x\left(\frac{111}{12} - x\right) - 20.$$

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\frac{111}{12} = 9{,}25 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{111}^2}{4 \cdot 12} = 256{,}609 \text{ mt.}$$

Fig. 25 a. Konstruktion der Maximalmomente unter der Last III zwischen den Grenzen *m* und *n*.

b) Die Momente unter der Last II im Abstande x vom linken Auflager (Fig. 25 b).

$$A = \frac{120}{10}(10 - x - 0{,}25) = 117 - 12x.$$

$$M_x = (117 - 12x)\,x - 20 \cdot 2 = 12x\left(\frac{117}{12} - x\right) - 40.$$

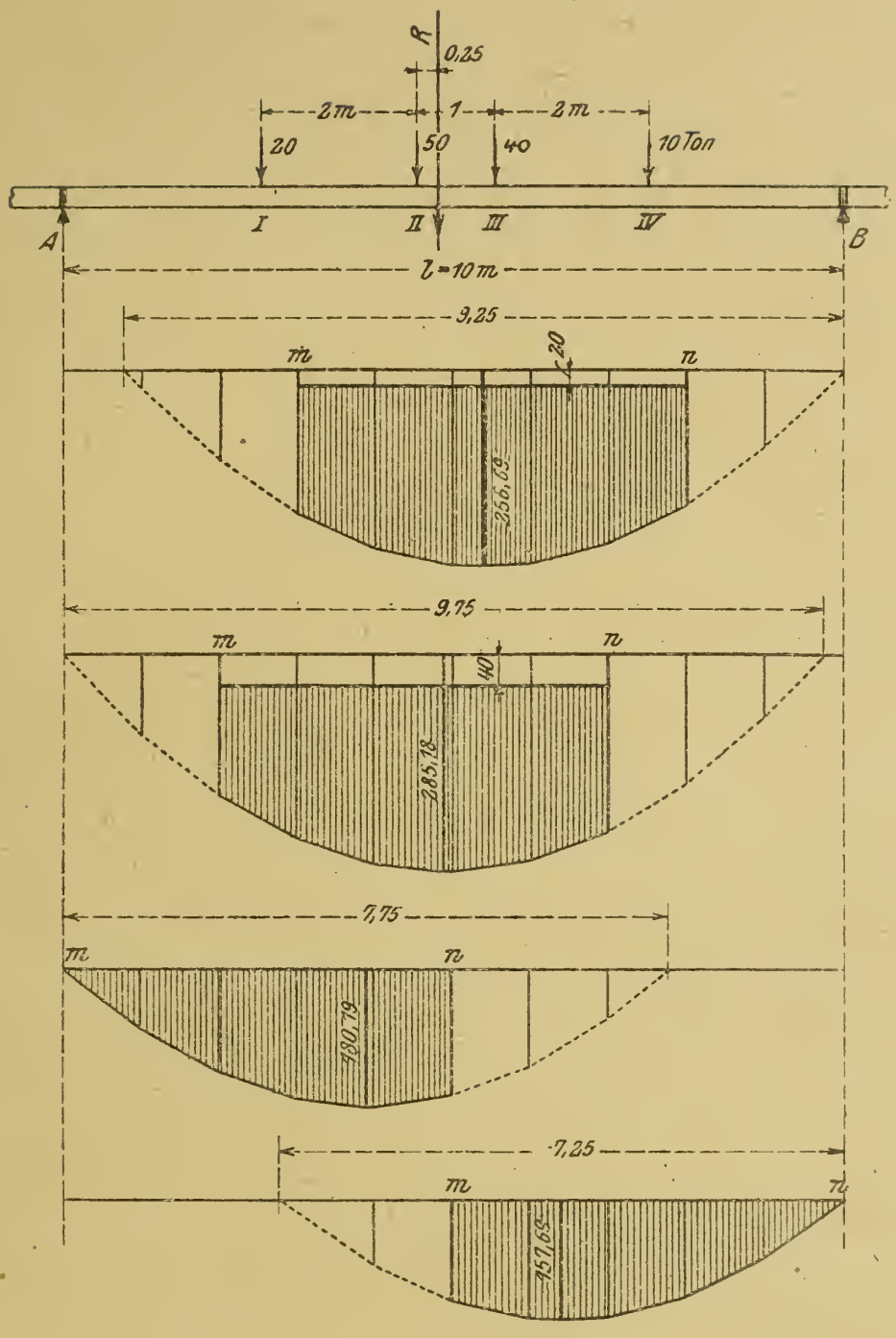


Fig. 25.

Fig. 25 a.

Fig. 25 b.

Fig. 25 c.

Fig. 25 d.

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\frac{117}{12} = 9{,}75 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{117}^2}{4 \cdot 12} = 285{,}18 \text{ mt.}$$

Fig. 25 b Konstruktion der Maximalmomente unter der Last II zwischen den Grenzen *m* und *n*.

c) Die Momente unter der Last I im Abstande x vom linken Auflager (Fig. 25 c).

$$A = \frac{120}{10}(10 - x - 2{,}25) = 93 - 12x,$$

$$M_x = (93 - 12x)\,x = 12x\left(\frac{93}{12} - x\right).$$

Eine Parabel mit der Länge

$$\frac{93}{12} = 7{,}75 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{93}^2}{4 \cdot 12} = 180{,}19 \text{ mt.}$$

Fig. 25 c Konstruktion der Maximalmomente unter der Last I zwischen den Grenzen m und n.

d) Die Momente unter der Last IV im Abstande x vom rechten Auflager (Fig. 25 d).

$$B = \frac{120}{10}(10 - x - 2{,}75) = 87 - 12x,$$

$$M_x = (87 - 12x)\,x = 12x\left(\frac{87}{12} - x\right).$$

Eine Parabel mit der Länge

$$\frac{87}{12} = 7{,}25 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\overline{87}^2}{4 \cdot 12} = 157{,}69 \text{ mt.}$$

Fig. 25 d Konstruktion der Maximalmomente unter der Last IV zwischen den Grenzen m und n.

Wie erwähnt, ist es möglich, daß die größten Momente in der Nähe der Stutzen auftreten, wenn die erste Last links oder rechts über das Auflager hinwegrollt. In Frage hierfür kommen die Momente unter den Lasten II und III.

e) Nach Maßgabe der Fig. 25 e, wo die Last IV den Träger verlassen hat, entwickeln sich die Momente unter der Last III im Abstande x vom rechten Auflager folgendermaßen:

$$B = \frac{110}{10}(10 - x - 1) = 99 - 11x,$$

$$M_x = (99 - 11x)\,x = 11x\left(\frac{99}{11} - x\right).$$

Eine Parabel von der Länge

$$\frac{99}{11} = 9 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{\frac{99}{2}^2}{4 \cdot 11} = 222{,}75 \text{ mt.}$$

Fig. 25 f Konstruktion der Maximalmomente unter der Last III zwischen den Grenzen *m* und *n*. Die Grenze *m* bestimmt sich mit dem Augenblick, wo die Last IV wieder auf den Träger rollt.

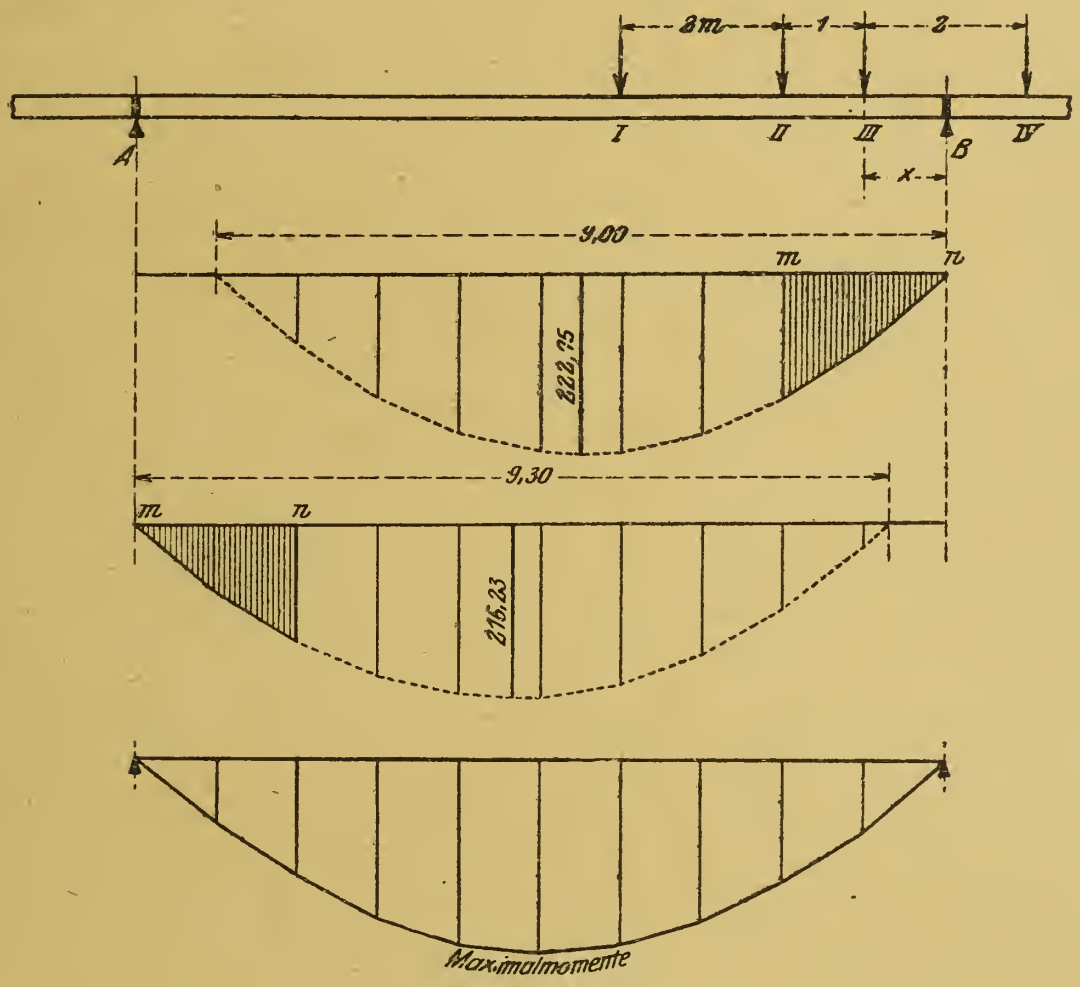


Fig. 25 e.

Fig. 25 f.

Fig. 25 g.

Fig. 25 h.

f) Ebenso ermitteln sich, wenn die Last I außer Wirkung getreten ist, die Momente unter der Last II im Abstande x vom linken Auflager (Fig. 25 g).

$$A = \frac{100}{10}(10 - x - 0{,}7) = 93 - 10\,x,$$

$$M_x = (93 - 10\,x)\,x = 10\,x\left(\frac{93}{10} - x\right).$$

Eine Parabel on der Länge

$$\frac{93}{10} = 9{,}3 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{93^2}{4 \cdot 10} = 216{,}23 \text{ mt.}$$

Fig. 25 g Konstruktion der Maximalmomente unter der Last II zwischen den Grenzen *m* und *n*.

Ein Vergleich der Momente unter *e* und *f* mit den Momenten unter *c* und *d* zeigt, daß es notwendig war, sie festzustellen.

Nunmehr werden, wie früher, sämtliche Flächen auf der gemeinsamen Grundlinie *l* zusammengeworfen, und man erhält in dem größten Umriß die Maximalmomente des Trägers (Fig. 25 h).

Ist die Kranlaufbahn ein Blechträger, dann können aus den Momenten nach

$$W = \frac{M}{K_b}$$

die erforderlichen Widerstandsmomente gerechnet werden.

Anderseits, wenn der Träger aus Fachwerk besteht, ist man in der Lage, mit Hilfe von

$$S = \frac{M_n}{r}$$

die größten Gurtspannungen zu bestimmen, wobei wie früher bereits gesehen, *r* den senkrechten Hebelarm des dem Knoten *n* gegenüberliegenden Stabes bedeutet.

Schließlich bedarf man noch, beim Fachwerkträger beispielsweise zur Ermittelung der größten Füllgliederspannungen, der Querkraft- oder *A*-Linie.

Es steht nun frei, falls unregelmäßige Belastungsgruppen vorliegen, die vorgeführte Momentenmethode zu benutzen oder sich der Einflußlinien zu bedienen. Wir glauben aber, im Interesse der Zeitersparnis zu ersterem Mittel greifen zu müssen.

Beispiel 17. Eine im Freien stehende Kranlaufbahn auf eisernen Stützen, befahren von einem Laufkran, dessen Maximalraddrucke $P = P = 13{,}50$ t sind, im Abstande $b = 3{,}2$ m. Fig. 26 zeigt die Längsansicht der Bahn, während in Fig. 26 a das Querschnittsprofil abgebildet ist.

Das Eigengewicht des Trägers sei $g = 0{,}350$ t pro m.

Als Windkraft bei senkrecht getroffener Fläche der Konstruktion werden eingeführt:

25 kg pro m², wenn die Bahn maximal belastet ist,

250 kg pro m² bei leerem Kran und zufälligen Stellungen desselben; der Minimalraddruck für diesen Fall sei $P_1 =$ $P_1 = 6$ t.

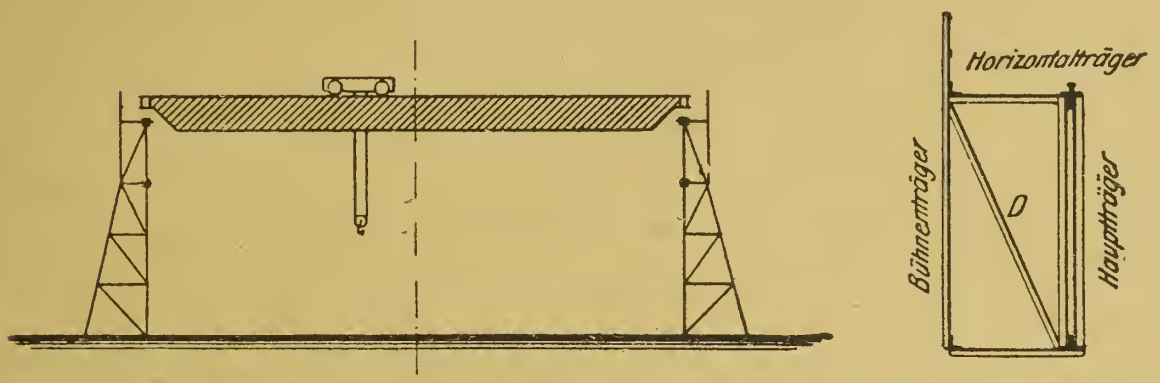


Fig. 26 a — b.

Die Mittelstützen, indem sie mit dem Träger ein starres System bilden, bieten einen sicheren Widerstand gegen Schwanken und Schübe in Längsrichtung der Bahn. Die Endstützen sind elastisch genug, um der Längenänderung der Träger infolge Temperaturwechsel nachgeben zu können. Die durch letzteren verursachten Schübe am Fuße der Mittelstützen dürfen, da sie wegen der geringen Trägerlänge unbedeutend sind, vernachlässigt werden.

Die Bahn ruht auf vier Punkten, ist daher zweifach statisch unbestimmt. Zudem sind die Füße der Mittelstützen wagerecht festgehalten, wodurch eine dritte statisch Unbestimmbare, der Horizontalschub daselbst hinzukommt. Letzterer wird, da er nur geringen Einfluß auf die Trägerspannungen hat, außer acht gelassen. Die zuerst bemerkte statische Unbestimmtheit soll durch Einfügung der Gelenke a und a' bzw. durch Entfernung der letzteren gegenüberliegenden Stäbe beseitigt werden.

Dem Wind quer zur Längsrichtung der Bahn sowie eventuellem Schrägzug der Last widersteht der Horizontalträger oben, der zugleich die Bühne bildet. Die Bühne wird einerseits vom Hauptträger, anderseits von einem besonders vorgebauten Bühnenträger gestützt. Schließlich, wie Fig. 26 b zeigt, verhindert die Schräge D die Ausbiegung des Hauptträgergurtes bei Windangriff, bei Druckinanspruchnahme oder sonstigen Kräften.

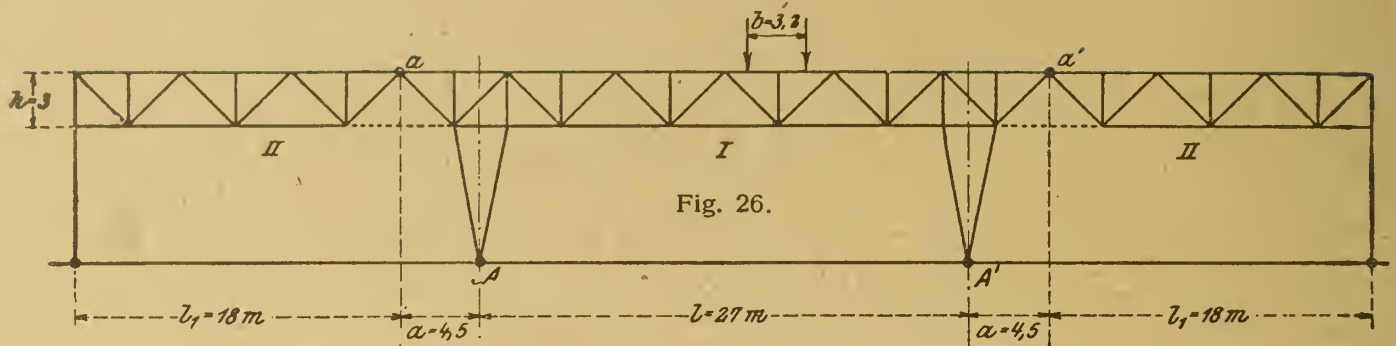


Fig. 26.

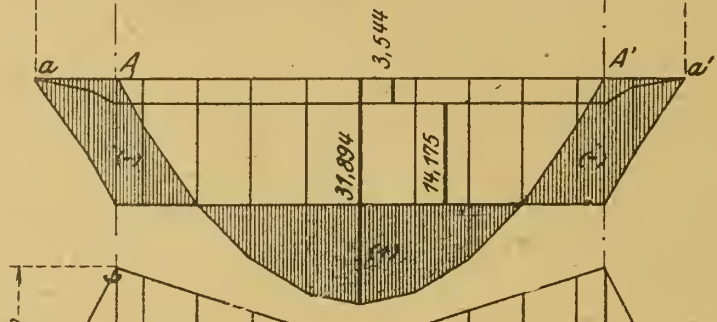


Fig. 26 c.

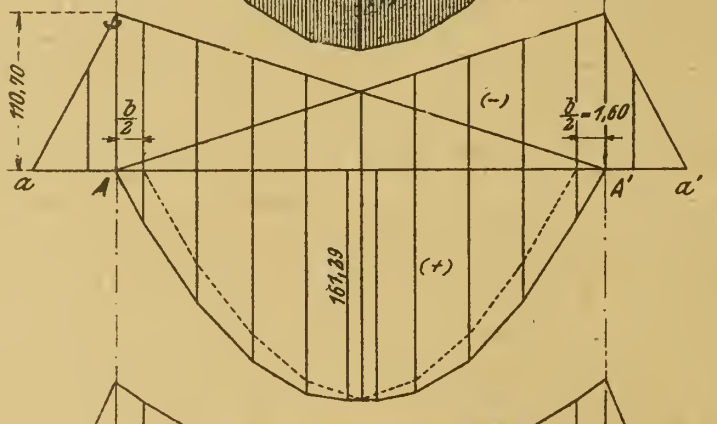


Fig. 26 d.

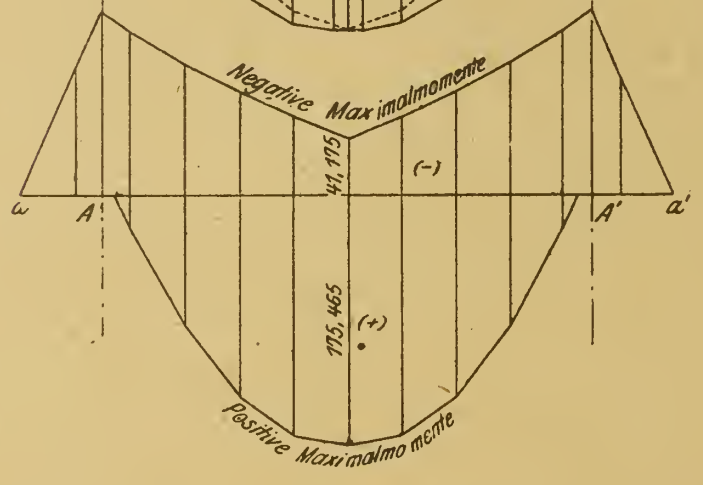


Fig. 26 e.

Träger I.

1. Ermittelung der größten Gurtspannungen auf Grund der Maximalmomente.

a) Man denke zunächst nur das Eigengewicht des Trägers von Stütze bis Stütze wirksam. Die Momente hieraus sind positiv und beschreiben eine Parabel von der Länge

$$l = 27 \text{ m}$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{g \cdot l^2}{8} = \frac{0{,}35 \cdot \overline{27}^2}{8} = 31{,}894 \text{ mt.}$$

Die Kurve ist in Fig. 26 c aufgerissen.

Sodann sind die Gewichte der Kragarme einzuführen. Sie verursachen entgegengesetzte Momente, und zwar verlaufen diese vom Ende a bis A nach einer Parabel, deren Scheitel bei a liegt und deren Höhe über A beträgt

$$\frac{g\,a^2}{2} = \frac{0{,}35 \cdot \overline{4{,}5}^2}{2} = 3{,}544 \text{ mt.}$$

Dieses Moment von 3,544 mt erstreckt sich unveränderlich über den ganzen Träger von A bis A'.

Schließlich hängt noch die halbe Last des Trägers II beiderseitig in den Punkten a und a'. Die Last ist

$$\frac{g \cdot l_1}{2} = \frac{0{,}35 \cdot 18}{2} = 3{,}15 \text{ t}$$

und erzeugt ein negatives Moment über den Stützen (ebenfalls unveränderlich zwischen A und A') von

$$3{,}15 \cdot a = 3{,}15 \cdot 4{,}5 = 14{,}175 \text{ mt.}$$

Die tatsächlichen Momente aus dem Eigengewicht ergeben sich nunmehr (schraffierter Teil der Fig. 26 c) aus der Differenz der positiven und negativen Beiträge.

b) Die Momente, verursacht durch die Maximalraddrucke des fahrenden Kranes.

Nach früherem bilden die Momente zwischen den Stützen eine Herzlinie, die entstanden war aus der Übereinandertragung zweier Parabeln, die die Länge

$$\left(l - \frac{b}{2}\right)$$

und die Bogenhöhe

$$\frac{P}{2\,l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2$$

hatten. Für vorliegendes Beispiel ist

$$\left(l - \frac{b}{2}\right) = 27 - \frac{3{,}2}{2} = 25{,}4 \text{ m}$$

und

$$\frac{P}{2\,l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2 = \frac{13{,}5}{2 \cdot 27}\left(27 - \frac{3{,}2}{2}\right)^2 = 161{,}29 \text{ mt.}$$

Die Konstruktion der als positiv zu erkennenden Momente ist in Fig. 26 d vorgenommen.

Verläßt der Kran das Mittelfeld und rollt über die Stützen hinweg, so wird der Träger von negativen Momenten angegriffen. Diese werden je größer, je mehr sich die Lasten im Gelenkpunkt *a* häufen. Die ungünstigste Stellung des Kranes ist, wenn ein Rad über *a* steht, das andere auf dem eingehängten Träger II.

Hierfür berechnen sich die Widerlagerdrucke in *a* zu

$$A_a = P + \frac{P(l_1 - b)}{l_1} = 13{,}5 + \frac{13{,}5\,(18 - 3{,}2)}{18} = 24{,}60 \text{ t}.$$

Das Moment über der Stütze beträgt daher

$$M_A = A_a \cdot a = 24{,}60 \cdot 4{,}5 = 110{,}70 \text{ mt}.$$

Von hier aus nehmen die Momente beiderseitig gradlinig ab und werden sowohl über der anderen Stütze als auch im Knoten *a* gleich Null.

Das so entworfene Momentendreieck gilt natürlich, nur umgekehrt, auch für die Belastung des anderen Kragarmes.

Der Zweck der Arbeit ist, die größten rechts- und linksdrehenden Momente des Trägers bei Zusammenwirkung des Eigengewichtes und der fahrenden Last festzulegen. Das geschieht durch Addition bzw. Subtraktion der Ordinaten der Fig. 26 c und 26 d; mit anderen Worten, es werden die resultierenden positiven und negativen Momente gebildet (Fig. 26 e).

Man sieht, daß Teile des Trägers, je nach Stellung des Kranes, sowohl rechts als auch links gedreht werden. Daraus folgt eine wechselnde Inanspruchnahme einiger Gurtstäbe. Die nach unten getragenen positiven Momente bewirken Druckspannung im Obergurt, dagegen Zugspannung im Untergurt. Umgekehrt ist die Inanspruchnahme der Stäbe bei Angriff der negativen Momente.

Die Spannungen sind

$$S = \frac{M}{H}.$$

Nicht in eben der Weise läßt sich die Spannung des Stabes U_1 berechnen; sie wird beeinflußt durch die Schrägstützen, indem diese eine Zusatzkraft, und zwar für jede Laststellung Zug hervorrufen. Man wird für diesen Stab zweckmäßig eine Einflußlinie zeichnen, die sich wie folgt entwickelt.

Zunächst ohne Rücksicht auf den Schrägangriff der Stützen bei der Last $P = 1$ t im Knoten n, Fig. 26 f, ergibt sich

$$U_1 = \frac{A \cdot x}{h} = \frac{1 \cdot x'}{l} \cdot \frac{x}{h}$$

oder

$$U_1 : x' = \frac{x}{h} : l.$$

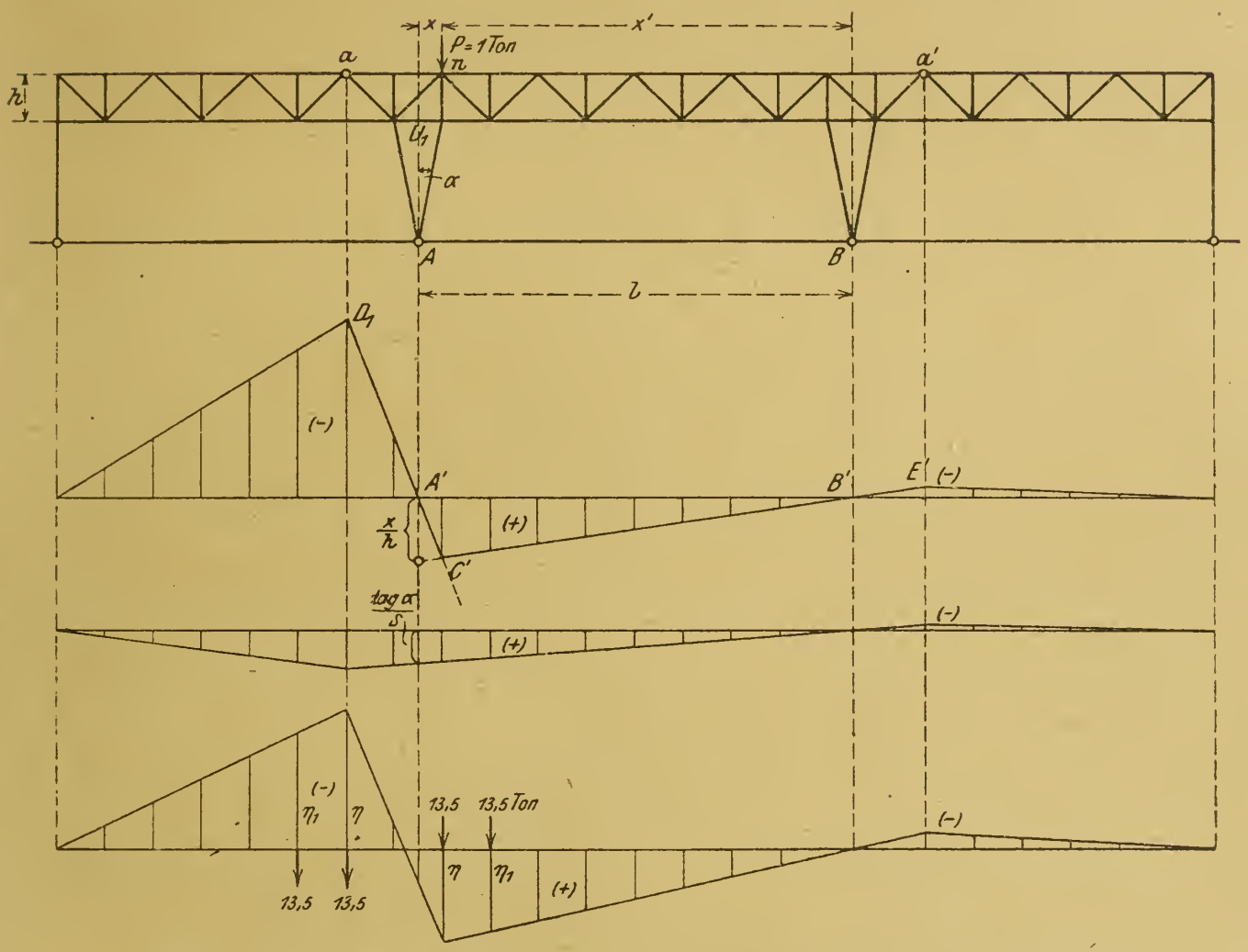


Fig. 26 f.

Fig. 26 g.

Fig. 26 h.

Fig. 26 i.

Fig. 26 g zeigt die graphische Auftragung des Verhältnisses. Die Äste $A'C'$ und $B'C'$ werden gradlinig bis nach den Enden der Kragarme durchgezogen. Ferner bedarf es keines Beweises, daß der weitere Verlauf der Einflußlinie der ist, wie ihn die Figur angibt.

Bezeichnet α den halben Fußwinkel der Stütze, dann ist die durch den Auflagerdruck erzeugte Spannung in fraglichem Stabe

$$U_1 = + \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Bei $P = 1$ t im Knoten n daher

$$U_1 = + \frac{1 \cdot x'}{2\,l} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$U_1 : x' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} : l.$$

Auch dieses Verhältnis wird nach Beispiel Fig. 26 h zeichnerisch aufgetragen; dieselbe Abbildung gibt den vollständigen Linienzug bis zu den äußersten Stützen.

Die Vereinigung der Fig. 26 g und 26 h führt schließlich zu der gewünschten Einflußlinie des Stabes U_1 (Fig. 26 i).

Nunmehr können leicht die größten Druck- und Zugspannungen, bewirkt durch den fahrenden Kran, ermittelt werden. Die Maximalzuginanspruchnahme tritt ein, wenn die Lasten im Mittelfelde bis zum Knoten n vorfahren. Sie beträgt

$$+ U_1^{max} = P(\eta + \eta_1).$$

Die Maximaldruckinanspruchnahme dagegen bei Stellung des einen Rades in a, während das andere sich auf dem eingehängten Träger II befindet.

$$- U_1^{max} = P(\eta + \eta_1).$$

Die Spannung aus dem Eigengewicht berechnet sich wie früher nach

$$U_1 = F_0 \cdot g.$$

Die zahlenmäßige Verfolgung der Zusatzkräfte aus Schrägzug der Last in Zusammenwirkung mit einer Windkraft von 25 kg pro m² dürfte hier zu weit führen. Es sei nur folgendes angeführt:

Der Wind quer zur Längsrichtung der Bahn faßt sowohl den Hauptträger als auch den Bühnenträger. Man ermittle die Windfläche der Gesamtkonstruktion. Es berechnet sich daraus eine Windkraft W pro m, die zur Hälfte am Obergurt und zur Hälfte am Untergurt zum Angriff kommt. $\frac{W}{2}$ oben geht unmittelbar in den Horizontalträger. $\frac{W}{2}$ unten bewirkt eine Verdrehung der Konstruktion; es treten die Vertikalkräfte

$$V = \frac{W}{2} \cdot \frac{h}{b}$$

auf. Schließlich gelangt auch $\frac{W}{2}$ unten vermittelst der Schrägen S nach oben, so daß der Horizontalträger den Gesamtwind W aufzunehmen hat.

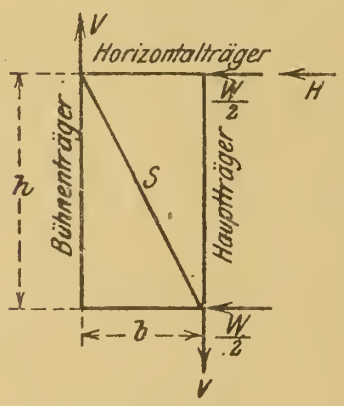


Fig. 26 k.

Die in Fig. 26 k vermerkten Kraftrichtungen entsprechen dem Wind von innen gegen die Kranlaufbahn. Man nehme an, der Wind treffe gleichmäßig die ganze Anlage und entwickle, analog der Fig. 26 c, die Momentenlinie für die Kräfte W. Die Division der Momente M_w

durch die Höhe b des Horizontalträgers liefert dann die Spannungen S_w, die als Zusatzkräfte den Spannungen des Hauptträger-Obergurtes zuzuschlagen sind. Dasselbe geschieht mit den den Hauptträger vertikal belastenden V-Kräften; die durch diese hervorgerufenen Momente M_v stehen im geraden Verhältnis wie die Kräfte $V : W$. Die entsprechenden Zusatzspannungen sind

$$S_v = \frac{M_v}{h}.$$

Es folgt daher als Gesamtzusatzspannung aus W und V

$$S_w + S_v = \frac{M_w}{b} + \frac{M_v}{h} = \frac{M_w}{b} + \frac{M_w}{h}\,\frac{V}{W}$$

$$= \frac{M_w}{b} + \frac{M_w}{h}\,\frac{W\,h}{b\,W} = \frac{M_w}{b} + \frac{M_w}{b} = \frac{2\,M_w}{b} = 2\,S_w.$$

Bei Schrägzug der Last entstehen die wagerechten Radschübe H. Sie werden vom Bühnenträger aufgenommen und erzeugen Momente, deren Verlauf ähnlich ist den Momenten der Fig. 26 d. Der Größe nach entsprechen sie dem Verhältnis

$$\frac{P}{H}$$

können also unmittelbar der Fig. 26 d entnommen und umgerechnet werden.

$$M_H = M_P \cdot \frac{H}{P}.$$

Die hieraus für den Obergurt des Hauptträgers in Frage kommenden Zusatzspannungen sind somit

$$S_H = \frac{M_H}{b}.$$

2. Ermittelung der größten Diagonalspannungen mit Hilfe der Querkräfte.

a) Wirkung des Eigengewichtes.

Die Querkraft in einem beliebigen Knoten wird zweckmäßig für die Betrachtung aufgestellt, daß der rechts liegende Trägerteil eingespannt ist, so daß jene in dem Vermögen, den linken übrigen Teil abzuscheren, zum Ausdruck kommt.

Die als Auflagerdrucke geltenden Vertikalkomponenten der Stützenschrägen A bzw. A' sind einander gleich.

Der in Frage stehende Träger I liefert

$$A = A' = \frac{l + 2a}{4} \cdot g = \frac{36}{4} \cdot 0{,}35 = 3{,}15 \text{ t}.$$

Aus den eingehängten Teilen werden beigetragen

$$A = A' = \frac{l_1 \cdot g}{4} = \frac{18 \cdot 0{,}35}{4} = 1{,}575 \text{ t}.$$

Die in allen vier Punkten gleichen Auflagerdrucke sind daher

$$(A = A) = (A' = A') = 3{,}15 + 1{,}575 = 4{,}725 \text{ t}.$$

Träger II hängt mit

$$\frac{l_1 \cdot g}{2} = \frac{18 \cdot 0{,}35}{2} = 3{,}15 \text{ t}$$

im Knoten a. Daselbst wirkt auch, wenn mit λ die Feldweite des Trägers I bezeichnet wird, das Gewicht des halben Feldes, nämlich

$$\frac{\lambda \cdot g}{2} = \frac{3 \cdot 0{,}35}{2} = 0{,}525 \text{ t}.$$

Die Querkraft im Knoten a beträgt daher

$$T_a = 3{,}15 + 0{,}525 = 3{,}675 \text{ t}.$$

Ihre Richtung von oben nach unten, also links scherend, soll die Bezeichnung (—) erhalten, während die rechtsscherenden mit (+) benannt werden.

T_a ist, wie Fig. 26 m zeigt, konstant bis zur Knotenachse 1. Hier tritt hinzu das Gewicht des Trägerfeldes

$$\lambda \cdot g = 3 \cdot 0{,}35 = 1{,}050 \text{ t}.$$

Zugleich wirkt entgegengesetzt der Auflagerdruck

$$A = 4{,}725 \text{ t}.$$

Die in Knotenachse 1 übrigbleibende Querkraft ist daher

$$T_1 = -3{,}675 - 1{,}050 + 4{,}725 = 0.$$

In Knotenachse 2 schert links das bereits ermittelte Feldgewicht

$$1{,}050 \text{ t},$$

wahrend der Auflagerdruck

$$4{,}725 \text{ t}$$

positiv gerichtet ist. Es verbleiben somit

$$T_2 = -1{,}050 + 4{,}725 = +3{,}675 \text{ t}.$$

Von hier aus kommt für jede weitere Knotenachse das Feldgewicht

$$1{,}050 \text{ t}$$

in Abzug. Die Querkraftlinie durchschneidet infolgedessen in der Mitte die Nullinie und erreicht den Größtwert

$$-3{,}675\ \text{t}$$

in Knotenachse 3′. Die weiteren Querkräfte bis zum Ende a' entwickeln sich in derselben Weise wie beim linken Teil. Fig. 26 m gibt schließlich das vollständige Diagramm.

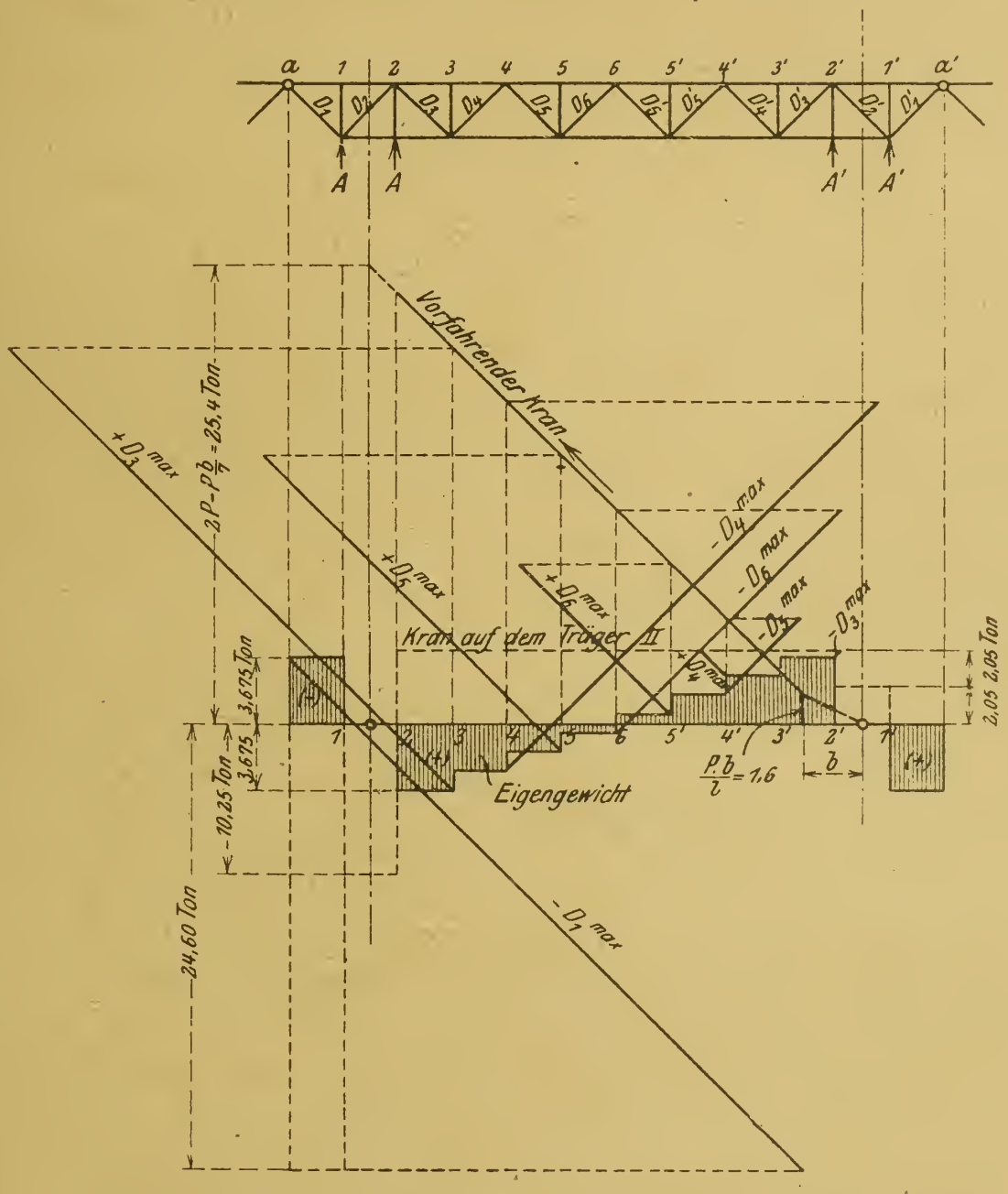


Fig. 26 l – 26 m.

b) Wirkung des fahrenden Kranes.

Werden die Stützenmitten als Auflager des Trägers betrachtet, dann ist der Verlauf des Querkraftdiagramms bei von rechts nach links vorfahrendem Kran nach früherem bekannt. Wenngleich die

Querkräfte positiv gerichtet sind, werden sie doch zweckmäßig nach oben aufgetragen, d. h. zu den Querkräften aus Eigengewicht addiert bzw. subtrahiert. Es muß nur beachtet werden, daß die zur Bestimmung der größten Diagonalspannung D_2 maßgebende Querkraft in Knotenachse 1 (wegen der doppelten Auflagerung) halb so groß ist als die in Fig. 26 m gezeichnete Ordinate.

Ferner sind die Querkräfte für eine Grenzstellung des Kranes über die Stützen hinaus einzuführen und zwar, wenn das eine Rad in a steht, das andere auf dem eingehängten Träger II. Dann ist die Querkraft in a der bereits früher gerechnete Widerlagerdruck in a, nämlich

$$A_a = P + \frac{P\,(l_1 - b)}{l_1} = 13{,}5 + \frac{13{,}5\,(18 - 3{,}2)}{18} = 24{,}6\text{ t}.$$

Dieser bewirkt den Stützendruck

$$A = A = \frac{A_a\,(l + a)}{2\,l} = \frac{24{,}6\,(27 + 4{,}5)}{2 \cdot 27} = 14{,}35\text{ t}$$

zugleich

$$A' = A' = \frac{24{,}6 - 28{,}7}{2} = -2{,}05\text{ t}.$$

Die Auftragung der Querkräfte ist leicht vorgenommen, und zwar in Addition mit den Querkräften aus dem Eigengewicht.

Mit Ausnahme des Stabes D_2, der seinen größten Zug bei einer noch näher zu betrachtenden Kranstellung erreicht, können auf Grund des in Fig. 26 m gezeichneten Diagramms die positiven und negativen Maximalspannungen sämtlicher Diagonalen bestimmt werden. Sie ergeben sich, weil der Träger parallele Gurte hat, einfach durch Zerlegung der Querkraft wagerecht und in Richtung der Schrägen selbst.

Im folgenden möge der fahrende Kran im Mittelfeld mit Laststellung L_I, hingegen der Kran auf dem Träger II (wenn Rad rechts in a) mit Laststellung L_{II} bezeichnet werden.

Stab	D_1	größter	Druck	bei	Laststellung	L_{II}	(zugleich	D_1)
»	D_3	»	Zug	»	»	L_I	(»	D_3')
»	D_3'	»	Druck	»	»	L_{II}	(»	D_3)
»	D_4	»	Druck	»	»	L_I	(»	D_4')
»	D_4'	»	Zug	»	»	L_{II}	(»	D_4)
»	D_5	»	Zug	»	»	L_I	(»	D_5')
»	D_5'	»	Druck	»	»	L_I	(»	D_5)
»	D_6	»	Druck	»	»	L_I	(»	D_6)
»	D_6'	»	Zug	»	»	L_I	(»	D_6)

Stab D_2. Die Druckspannung wird zum Maximum, wenn der Kran von rechts bis zum ersten Auflager A vorfährt. Rollen die Lasten weiter, dann tritt ein Spannungswechsel ein; der Druck geht über in Zug; dieser wird am größten bei Stellung des linken Rades etwas über a hinaus, während das Rad rechts im Knoten 1 steht bzw. über dem linken Auflager A. Um dieses einzusehen, bedarf es der Aufzeichnung der Einflußlinie des Stabes.

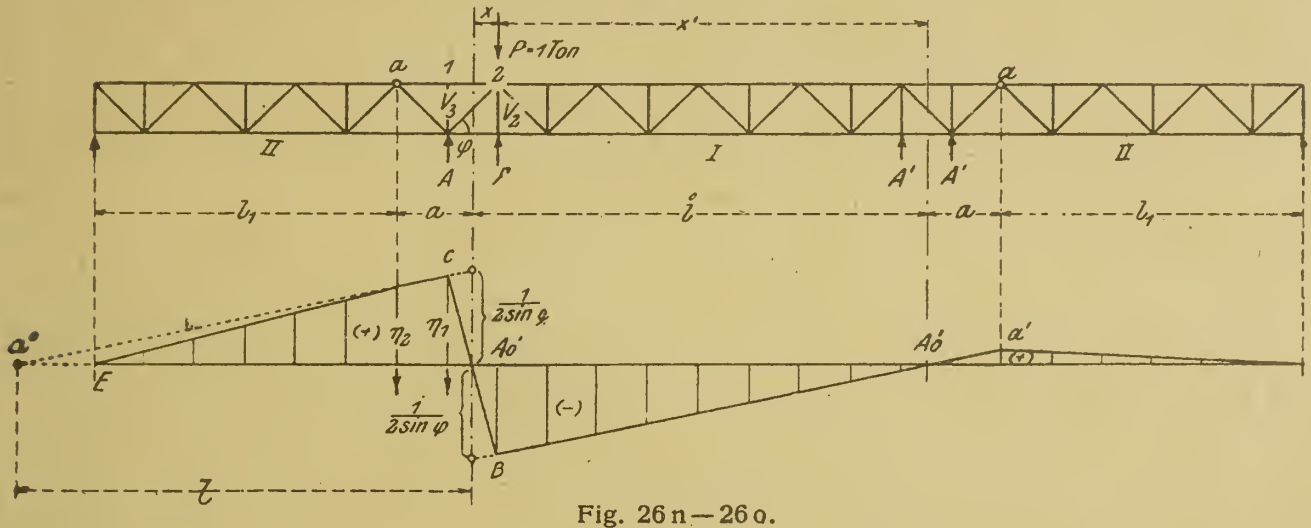


Fig. 26 n—26 o.

Man stelle die Last $P = 1$ t in Knoten 2. Dann sind die beiden Auflagerdrucke

$$A = A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{x'}{l}.$$

A links liefert die Diagonalspannung

$$-D_2 = \frac{A}{\sin \varphi} = \frac{x'}{2\, l \sin \varphi}$$

oder

$$D_2 : x' = \frac{1}{2 \sin \varphi} : l.$$

Fig. 26 o zeigt die Auftragung des Verhältnisses. Somit wäre zunächst die Einflußlinie des Mittelfeldes gegeben. Ihr weiterer Verlauf über die ganze Trägeranlage ist durch folgende einfache Überlegung bestimmt.

Die Last $P = 1$ t genau über der Stützmitte ruft keine Spannung D_2 hervor; infolgedessen ist der Linienzug $B — C$ bedingt. Ferner wäre der Stab spannungslos, wenn der Kragarm die Länge l hätte und die Last bis zum äußersten Ende a^0 gebracht würde. Dieser Tatbestand läßt die ideelle Gerade $C—a^0$ erscheinen, die aber nur gültig ist bis zum Knoten a. Hier setzt der eingehängte Träger II an und bestimmt

die lineare Richtung $a - E$. Der rechtsseitige Verlauf der Einfluß linie ist ohne weiteres erkennbar.

Die Eintragung der vorhin vermerkten Kranstellung in die Einflußlinie bestätigt die Angabe betreffend den größten Zug des Stabes D_2

$$+ D_2^{max} = P(\eta_1 + \eta_2).$$

Um bei der bisher geführten Ermittelungsweise der Diagonalspannungen zu bleiben, bestimmt sich

$$A = A = \frac{13{,}5 \cdot 28{,}5}{2 \cdot 27} + \frac{13{,}5 \cdot 17{,}8}{18} \cdot \frac{31{,}5}{2 \cdot 27} = 14{,}912 \text{ t}.$$

Und weiter die Querkraft in Knotenachse 1 bzw. in A

$$T_1 = 14{,}912 - 13{,}5 - 13{,}5 \cdot \frac{17{,}8}{18} = -11{,}938 \text{ t},$$

woraus sich die Stabspannung bestimmt zu

$$+ D_2^{max} = \frac{T_1}{\sin \varphi} \text{ (zugleich } D_2'^{max}).$$

Bei Entwicklung der Windkräfte quer zur Längsrichtung der Bahn war eine Vertikalkraft

$$V = \frac{W}{2} \cdot \frac{h}{b}$$

pro m gefunden worden. Infolge dieser Belastung ΣV über die ganze Trägeranlage entstehen Zusatzkräfte für die Diagonalen. Ihre Ermittelung geschieht mit Hilfe der Querkräfte; diese entsprechen den Querkräften aus Eigengewicht der Fig. 26 m; die Ordinaten daselbst brauchen nur multipliziert zu werden mit dem Verhältnis

$$\frac{W}{2} \cdot \frac{h}{b} : g = \frac{W h}{2 b g}.$$

Es muß nur beachtet werden, daß V, je nach der Windrichtung, sowohl nach oben als auch nach unten wirken kann, als dessen Folge die berechneten Zusatzspannungen D_v wechseln, daher ihrer absoluten Größe nach den oben bestimmten Maximalzug- und -druckspannungen zuzuschlagen sind.

Der Schrägzug der Last hat auf die Diagonalen keine Wirkung.

Die den Obergurt stützenden senkrechten Stäbe V tragen das Eigengewicht

$$\frac{g \cdot \lambda}{2} = -0{,}525 \text{ t},$$

sowie den Raddruck

$$P = -13{,}50 \text{ t}.$$

Ihre größte Spannung beträgt daher

$$V = -0{,}525 - 13{,}500 = -14{,}025 \text{ t.}$$

Stab V_2 bildet die Fortsetzung der Stützenschrägen. Seine Spannung aus dem Eigengewicht der Konstruktion ist der bereits früher ermittelte Auflagerdruck

$$(A = A) = (A' = A') = -4{,}725 \text{ t.}$$

Der Kran liefert den größten Druck bei gänzlicher Ausfahrt auf dem Ausleger zu

$$(A = A) = \frac{P}{l}\left(l + a - \frac{b}{2}\right) = \frac{13{,}5}{27}(27 + 4{,}5 - 1{,}6) = -14{,}95 \text{ t.}$$

Schließlich sind noch die Spannungen des Stabes aus Wind und Schrägzug der Last festzustellen. Bei Wind quer zur Längsrichtung der Bahn war nach früherem W die horizontale Kraft pro m Konstruktion. Unter der Voraussetzung, daß der Windträger oben dieselben Auflagerbedingungen wie der Hauptträger hat (doppelte Auflager), berechnet sich der Widerlagerdruck daselbst zu

$$\text{horizontal } (A = A) = (A' = A') = \frac{l + 2a}{4} \cdot W + \frac{l_1 W}{4} = H_w.$$

Fig. 26 p zeigt eine Bockhälfte im Zustande des Windangriffs von außen. Zugleich sind wirksam die nach aufwärts gerichteten Vertikalkomponenten. Ihre Summe über die ganze Trägeranlage (d. h. der am Stützenkopf angreifende Betrag) ist

$$V_w = \frac{H_w}{2} \cdot \frac{h}{b}.$$

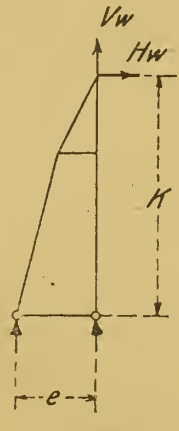


Fig. 26 p.

Infolgedessen beträgt die Druckspannung fraglichen Stabes aus Wind

$$V_2 = H_w \cdot \frac{h}{b} - V_w = -\frac{H_w \cdot h}{2 \cdot b}.$$

Die aus Schrägzug der Last bewirkte Horizontalkraft am Kopf des Bockes wird am größten bei vollständiger Ausladung des Krans auf dem Ausleger und entspricht dem Verhältnis

$$\frac{H}{P}.$$

Es kann daher, mit Benutzung des weiter oben berechneten Wertes für P geschrieben werden

$$\text{horizontal } (A = A) = 14{,}95 \cdot \frac{H}{P} = H_s.$$

Stab V_2 erhält daraus die Druckkraft

$$-V_2 = H_s \cdot \frac{h}{b}.$$

Endlich noch die Inanspruchnahme des Stabes V_3. Er bildet wie V_2 die Fortsetzung der Stützenschrägen. Daher sind die Spannungen aus Wind und Schrägzug der Last dieselben wie bei Stab V_2. Bezüglich der Kranlast und des Eigengewichtes aber erleidet er die für die V-Stäbe bestimmten Werte.

Die Untersuchung der Stützen, ferner des Wind- und Bühnenträgers dürfte, da sie dem Leser nichts Neues bringt, beiseite gelassen werden.

Vorstehender Rechnungsgang wird grundzüglich zum zweitenmal für die Inanspruchnahme der Bahn durch Wind 250 kg/m² und unbelasteten Kran ($P_1 = 6$ t), wobei ein Schrägzug der Last natürlich fortfällt, durchgeführt.

Schließlich erscheint die Anlage nicht unbedeutend unter dem Längsangriff des Windes zu leiden, zudem mit diesem die plötzliche Hemmung des fahrenden Krans infolge Bremsens oder Hindernisse zusammenfallen kann.

Versuche, aus der Massenbewegung des Kranes, dem Bremsweg, momentanen Hindernissen, den Stoßgesetzen etc. sichere am Schienenkopf sich äußernde wagerechte Kräfte herzuleiten, glauben wir als Unwahrscheinlichkeitsrechnungen bezeichnen zu müssen. Denn es leuchtet ein, daß die Elastizität der Gesamtkonstruktion erhebliche Faktoren hineinwirft, die zu berücksichtigen unmöglich ist. Einen allerdings zu hoch gegriffenen aber brauchbaren Wert für die durch plötzliche Bremsung des Kranes bewirkte Horizontalkraft erhält man, wenn (wie früher) angenommen wird, daß die Räder sämtlich schleifen, so daß zum Ausdruck kommen

$$H_f = 2\,P \cdot \mu,$$

wo μ der Koeffizient der gleitenden Reibung ist, der mit 0,15 eingeführt werden kann. Im vorliegenden Falle ergibt sich

$$H_f = 2 \cdot 13{,}5 \cdot 0{,}15 = 4{,}05 \text{ t}.$$

Zugleich kann in derselben Richtung der Wind mit 25 kg/m² gegen die Anlage wehen. Der ermittelte Winddruck sei W_e. Beide Kräfte

$$W_e + H_f = \mathfrak{H}$$

dürfen der Einfachheit wegen am Obergurt angreifend angenommen werden.

Als Widerlager gegen den Schub treten die Füße der beiden Schrägstützen in Tätigkeit. Sie nehmen annähernd jeder die Hälfte $\frac{1}{2}\,\mathfrak{H}$ auf. Zugleich sind daselbst die Vertikalreaktionen

$$V = \pm\,\mathfrak{H}\,\frac{k}{l}$$

wirksam.

Fig. 26 q gibt das Bild der Bahn im Augenblick dieser Inanspruchnahme. Die Aufsuchung der Stabkräfte erfolgt leicht mit Hilfe eines Cremonaplanes, wobei bemerkt werden muß, daß sämtliche Spannungen bei umgekehrt gerichtetem $\mathfrak{H}$ wechseln.

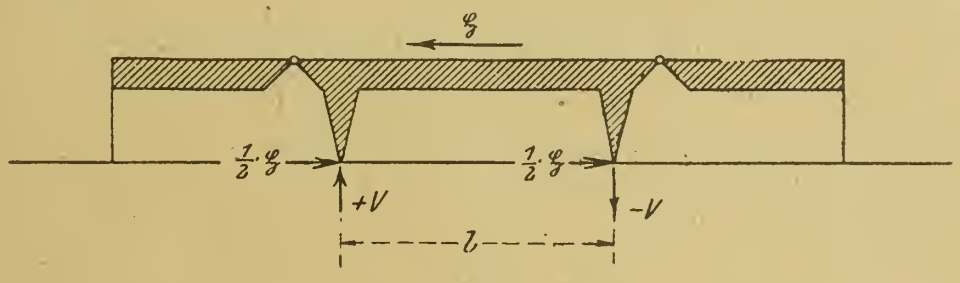


Fig. 26q.

Schließlich werden die vorstehend ermittelten Stabkräfte mit den Maximalspannungen aus Eigengewicht und fahrendem Kran vereinigt, d. h. die ungünstigsten Werte aufgesucht.

Beispiel 18. Einfluß der Temperaturänderung bei einer Laufbahn.

In dem vorhergehenden Beispiel wurde bezüglich der Längenänderung der Träger durch Temperaturwechsel bemerkt, daß die Endstützen elastisch genug sind, um dieser Wirkung nachgeben zu können. Werden jedoch die Träger länger und besitzen die Stützen eine größere Steifigkeit, dann wird man gezwungen sein, die statische Wirkung der Ausdehnung der Konstruktion zu untersuchen. (Vergl. Fig. 27.)

Das Trägheitsmoment der Stütze sei J. Die Längenänderung der Träger infolge Temperatureinfluß betrage δ ($\delta = l \cdot \alpha \cdot t$). Dann tritt die in der Fig. 27 a angedeutete Inanspruchnahme der Stütze und der Trägergurte ein. Die Spannkräfte in den Gurten werden mit X_1 und X_2 bezeichnet.

Diese Größen lassen sich mit Hilfe der Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X_1} \cdot dx = \delta$$

und

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X_2} \cdot dx = \delta$$

eicht ermitteln.

(Von 1—2.)

Nach X_1)

$$M_x = X_1 \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_1} = x,$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^h X_1 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{X_1 \cdot h^3}{3 \cdot J \cdot E} \qquad \text{(Nach } X_1\text{)}$$

(Von 2—m.)

Nach X_1)

$$M_x = X_1 (h + x) - X_2 \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_1} = (h + x), \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_2} = -x,$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^b \{X_1 (h^2 + 2h \cdot x + x^2) - X_2 (h \cdot x + x^2)\} dx$$

$$= \frac{X_1 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h^2}{b} + h + \frac{b}{3}\right) - \frac{X_2 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right) \qquad \text{(Nach } X_1\text{)}$$

Nach X_2)

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^b \{-X_1 (h \cdot x + x^2) + X_2 \cdot x^2\} dx$$

$$= -\frac{X_1 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right) + \frac{X_2 \cdot b^3}{3 \cdot J \cdot E} \qquad \text{(Nach } X_2\text{)}$$

I) $$\delta = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X_1} \cdot dx = -\frac{X_1 \cdot h^3}{3 \cdot J \cdot E} - \frac{X_1 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h^2}{b} + h + \frac{b}{3}\right) + \frac{X_2 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right)$$

II) $$\delta = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X_2} \cdot dx = -\frac{X_1 \cdot b^2}{J \cdot E} \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right) + \frac{X_2 \cdot b^3}{3 \cdot J \cdot E}$$

oder

I) $$-\frac{X_1 \cdot h^3}{3} - X_1 \cdot b^2 \left(\frac{h^2}{b} + h + \frac{b}{3}\right) + X_2 \cdot b^2 \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right) = \delta \cdot J \cdot E$$

II) $$-X_1 \cdot b^2 \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right) + \frac{X_2 \cdot b^3}{3} = \delta \cdot J \cdot E.$$

Diese beiden Gleichungen liefern

$$X_1 = \frac{18 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{a \cdot b \,(4h + 3b)} \qquad (38)$$

$$X_2 = \frac{18 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{a \cdot b \,(4h + 3b)} \left\{1 + \frac{2h}{b} \left(1 + \frac{h}{3b}\right)\right\} \qquad (39)$$

Nach Maßgabe der Bezeichnung in der Fig. 27 b betragen die Momente an der Stütze

$$M_2 = X_1 h = \frac{18 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b\,(4 \cdot h + 3 \cdot b)}$$

und

$$M_m = X_1 (h + b) - X_2 \cdot b$$
$$= -\frac{18 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b\,(4 \cdot h + 3 \cdot b)} \left(1 + \frac{2 \cdot h}{3 \cdot b}\right).$$

Hat der Träger eine sehr geringe Höhe, oder ist er als Blechbalken ausgebildet, dann setzt man $h = 0$, und die obigen Formeln ergeben (Fig. 27 c).

$$M_2 = \frac{6 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b^2}$$

und

$$M_m = -\frac{6 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b^2}.$$

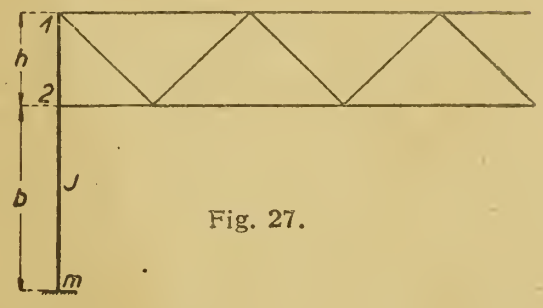


Fig. 27.

In der Fig. 27 d wird angenommen, daß der Stützenfuß gelenkig gelagert ist. Als unbekannte Größe erscheint der wagerechte Schub X am Fuße der Stütze. Dieser Schub läßt sich wie oben nach der Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = \delta$$

schnell ermitteln. Er beträgt

$$X = \frac{3 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b^2\,(h + b)} \quad . \quad . \quad (40)$$

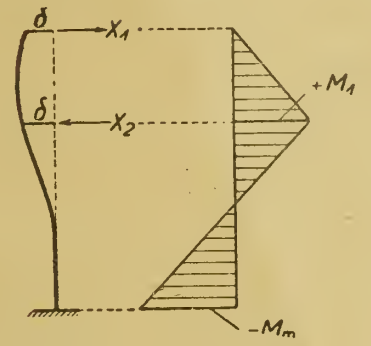


Fig. 27 a. Fig. 27 b.

Das Stützenmoment ist

$$M_2 = X \cdot b = \frac{3 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b\,(h + b)}$$

Läßt man auch hier $h = o$ werden, dann wird

$$M_2 = \frac{3 \cdot \delta \cdot J \cdot E}{b^2}.$$

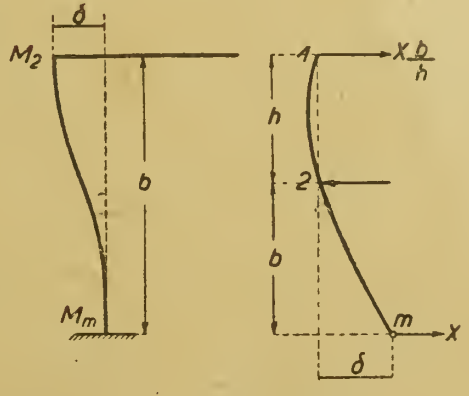


Fig. 27 c. Fig. 27 d.

Beispiel 19. Eine Kranlaufbahn, vollwandiger Hauptträger, unterspannt mit einem parabelförmigen Zugband (Fig. 28). Vergleiche die Ausführungen über unterspannte Balken im ersten Abschnitt.

Der Träger ist einfach statisch unbestimmt; die Unbekannte X, nämlich der Zug im Unterbogen, ist an die Elastizitätsgesetze gebunden.

J sei das Trägheitsmoment des Hauptbalkens,
F sein Querschnitt,
F_1 der Querschnitt des Zugbandes.

Ferner bezeichnen:

l die Spannweite des Trägers,
n die Anzahl der Felder (wenn möglich ungerade),
h die Höhe der Parabel,
V die Spannung in den senkrechten Stäben.

Man denke das Zugband in der Mitte durchschnitten und daselbst die Kräfte $X = -1$ t entgegengesetzt gerichtet angreifend. Dann entstehen die in Plan Fig. 28 b aufgerissenen Spannungen der Zugbandglieder, der Vertikalstäbe und des Hauptbalkens.

Die Spannungen der Vertikalstäbe sind alle gleich und betragen

$$V_1 = \frac{8h}{ln} \cdot 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Dieser Wert entwickelt sich wie folgt.

Das Koordinatenkreuz liegt im Punkte b. Die Gleichung des Parabelbogens ist

$$y = \frac{4h}{l^2} x\,(l - x) = \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$$

Die Tangente an die Kurve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4h}{l} - \frac{8hx}{l^2}.$$

Für $x = o$ wird

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{4h}{l}.$$

Nach Fig. 28 b ist

$$\frac{1}{2} V_1 \cdot n = \frac{4h}{l}$$

oder

$$V_1 = \frac{8h}{ln} \cdot 1.$$

Der Hauptbalken wird mithin zunächst von den Kräften V_1 herabziehend in Anspruch genommen, erleidet daher eine Durchbie-

gung, deren Folge eine Erweiterung der Schnittstelle bei a ist. Die Erweiterung sei mit

$$\delta_{aa}'$$

bezeichnet und im folgenden ermittelt.

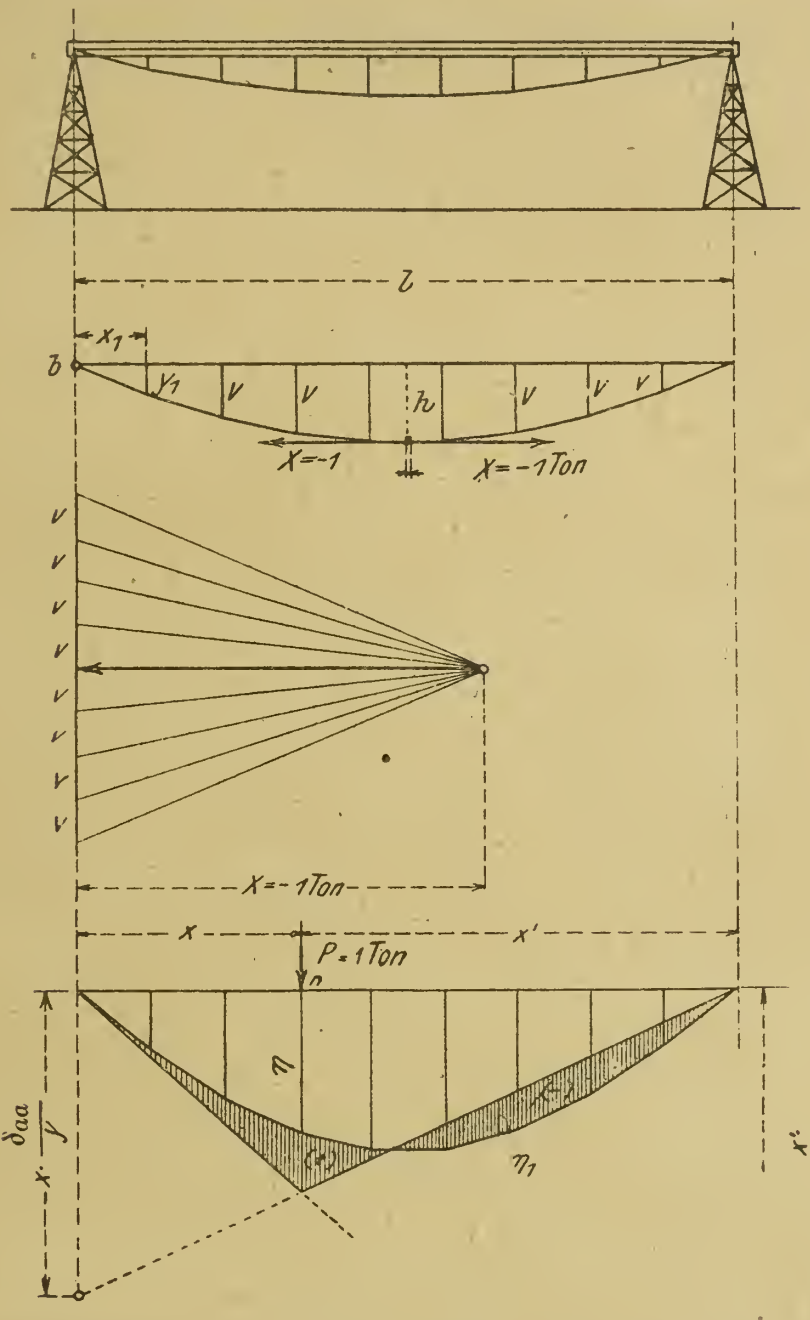


Fig. 28.

Fig. 28a.

Fig. 28b.

Fig. 28c.

Zur Vereinfachung der Aufgabe darf mit genügender Genauigkeit angenommen werden, daß an Stelle der Lastenreihe V_1 die gleichmäßig verteilte Belastung

$$p = \frac{n\,V_1}{l} = \frac{8\,h}{l\,n} \cdot \frac{n}{l} = \frac{8\,h}{l^2} \cdot 1$$

pro Längeneinheit tritt.

Dieser Annahme entspricht eine stetige Krümmung des Unterbogens. Es läßt sich daher bei der Herleitung von δ_{aa}' unmittelbar von $X = -1$ t ausgehen.

Das Moment in einem Balkenquerschnitt ist

$$M_x = X \cdot y,$$

oder weil

$$y = \frac{4h}{l^2} x (l - x)$$

folgt

$$M_x = X \frac{4h}{l^2} x (l - x).$$

Die Bedingungsgleichung lautet

$$\frac{1}{JE} \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx = \delta_{aa}'$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{4h}{l^2} x (l - x)$$

$$\delta_{aa}' = \frac{1}{JE} \int_0^l X \frac{4hx}{l^2} (l - x) \cdot \frac{4hx}{l^2} (l - x) dx$$

$$= \frac{1}{JE} \int_0^l X \frac{16 h^2 x^2 (l - x)^2}{l^4} \cdot dx$$

$$\delta_{aa}' = \frac{8 X h^2 l}{15 JE}$$

oder da

$$X = 1 \text{ t},$$

$$\delta_{aa}' = \frac{8 h^2 l}{15 JE} \cdot 1 \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Die Schnittstelle erweitert sich ferner um den Betrag, der durch die Längenänderung sämtlicher Stäbe entsteht. Diese Größe ist

$$\delta_{aa}'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Die Spannungen S_1 entstehen bei der Belastung $X = -1$ t.

Die Gesamterweiterung der Schnittstelle ergibt sich daher zu

$$\delta_{aa} = \delta_{aa}' + \delta_{aa}''.$$

Nun ist die unter der Belastung

$$p = \frac{8h}{l^2} \cdot 1$$

entstehende Biegungslinie des Hauptbalkens zu ermitteln. Das zweckmäßigste Verfahren hierzu dürfte das von Mohr sein, wonach die mit

$$\frac{1}{JE}$$

multiplizierten Ordinaten des Seilpolygons aus der Momentenfläche als Belastung die Durchbiegung ergeben. Vorläufig soll die Biegungslinie als gegeben betrachtet werden (Fig. 28 c).

Die nun folgenden Beziehungen seien für eine wandernde Last $P = 1$ t auf dem Hauptbalken aufgestellt.

Bezeichnet η die Ordinate der Biegungslinie, gemessen unter P, dann ist auf Grund der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen (Maxwell) die Biegungslinie zugleich die Einflußlinie des durch P erzeugten Zuges im Mittelstab des Unterbogens. Es kann geschrieben werden

$$X = P \frac{\eta}{\delta_{aa}}.$$

In Frage stehen die Momente, hervorgerufen durch die wandernde Last $P = 1$ t für jede Stelle des Hauptbalkens. Man bediene sich zu ihrer Lösung des Verfahrens der Einflußlinien. Beispielsweise soll die Einflußlinie der Momente für den Querschnitt n im Abstande x und x^1 von den Auflagern entworfen werden.

Man stelle P in n. Dann ist, bei Gebrauch der Bezeichnungen der Fig. 28 a und 28 c,

$$M_n = \frac{P\,x^1}{l} \cdot x - X \cdot y$$

oder nach Einführung des Wertes für X

$$M_n = \frac{P\,x^1}{l} \quad x - P \frac{\eta}{\delta_{aa}} \cdot y$$

und wegen $P = 1$ t

$$M_n = \frac{y}{\delta_{aa}} \left\{ \frac{\delta_{aa}}{y} \cdot \frac{x^1\,x}{l} - \eta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Das Glied η der Klammer ist unmittelbar in Fig. 28 c gegeben. Das erste Glied ist das gewöhnliche Balkenmoment; es läßt sich als Verhältnis

$$M_0 : x^1 = x \frac{\delta_{aa}}{y} : l$$

bzw.

$$M_0 : x = x^1 \frac{\delta_{aa}}{y} : l$$

schreiben und in Fig. 28 c eintragen. Die schraffierte Fläche liefert sodann die Einflußlinie der Momente des Querschnittes n für die wandernde Last $P = 1$ t.

Nennen wir die unter der Last gemessene Ordinate der Einflußlinie (Einfiußfläche) η_1, dann beträgt das Moment

$$M_n = \frac{y}{\delta_{aa}} \cdot \eta_1$$

oder, wenn P beliebig groß ist,

$$M_n = P \frac{y}{\delta_{aa}} \cdot \eta_1.$$

Wie schon früher gezeigt, kann die Einflußlinie auch zur Ermittelung der Momente aus dem Eigengewicht benutzt werden. Bezeichnet g das Gewicht der Laufbahn pro Längeneinheit m, dann ist

$$M_n^g = \frac{y}{\delta_{aa}} \cdot F_0 g.$$

Bei dieser Gelegenheit möge noch einmal das im ersten Abschnitt dargelegte Verfahren zur Berechnung unterspannter Balken auch an diesem Träger mit Zahlen angewendet werden.

Beispiel 20. Zahlenaufgabe. Der Träger hat eine Länge von $l = 22$ m und wird befahren von einem Kran, dessen Raddrucke $P = 6\,t$ bei einer Achsentfernung von $b = 4$ m. Die Konstruktion des Trägers ist in der Fig. 29 wiedergegeben. Der Hauptbalken wird durch ein $I\,N\,P\,42\,1/2$ gebildet mit dem Trägheitsmoment $J = 37\,000$ cm⁴ und dem Querschnitt $F = 132$ cm². Der unterspannte Bogen besteht aus $2 \sphericalangle 130 \cdot 65 \cdot 10$, deren Querschnitt $F = 37{,}2$ cm².

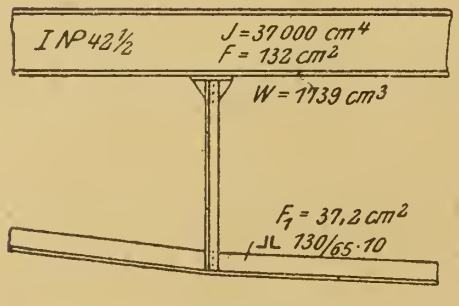


Fig. 29.

Für die vertikalen Stäbe sind $2 \sphericalangle 55 \cdot 55 \cdot 6$ mit $F = 12{,}6$ cm² angenommen.

Die Anzahl der Felder sei $n = 11$. Die Höhe des Trägers ist $h = 1{,}5125$ m. (Vgl. die Fig. 29 a.)

Man denke sich wie früher das Zugband in der Mitte bei a durchschnitten und an den Schnittenden die Kräfte $X = -1$ entgegengesetzt gerichtet angebracht. Dann entstehen zunächst die im Plan Fig. 29 b ermittelten Stabkräfte. Sodann wird der Balken von Momenten angegriffen, die ihn verbiegen und die den Verlauf haben wie der Umriß der Unterspannung.

Betrachtet man nun die Momentenfläche als Belastung, indem man sie in einzelne Belastungsstreifen teilt, und zeichnet hierfür das Seilpolygon, so stellt dieses die Biegungslinie des Trägers dar. (Siehe Fig. 29 c, 29 d und 29 e.) Die Ordinaten der Biegungslinie mögen mit η bezeichnet werden.

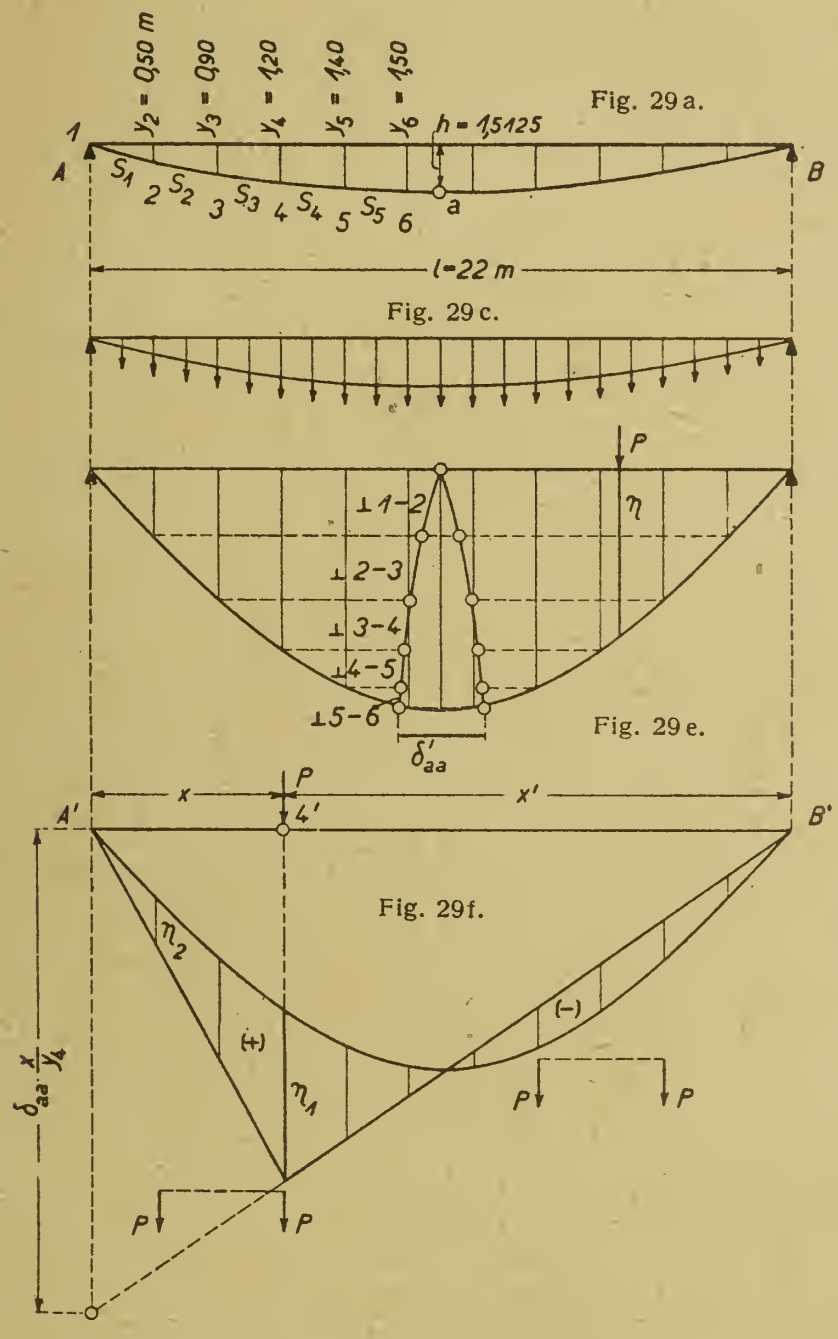


Fig. 29 a.

Fig. 29 c.

Fig. 29 e.

Fig. 29 f.

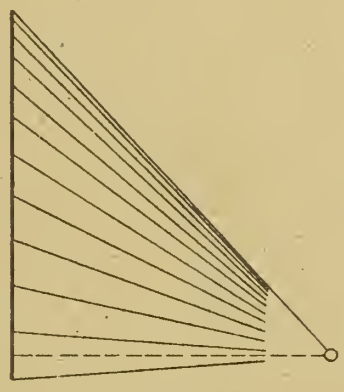


Fig. 29 d.

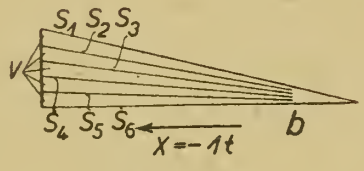


Fig. 29 b.

Eine weitere Folge der Belastung durch $X = -1$ ist eine Erweiterung δ_{aa}' der Schnittstelle bei a. Diese Erweiterung läßt sich leicht durch Zeichnung eines Verschiebungsplanes in der Fig. 29 e finden.

Zu dieser Größe δ_{aa}' liefert jedoch die Längenänderung sämtlicher Stäbe einen Beitrag δ_{aa}'', den man für gewöhnlich mit 5 bis

10% des Wertes δ_{aa}' einsetzen kann, der sich aber auch genau nach

$$\delta_{aa}'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}$$

berechnen läßt.

Auf Grund der Gegenseitigkeit der Formveränderung besteht nun zwischen einer Last P auf dem Balken und der Anspannung X in dem unterspannten Stab die Beziehung

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}' + \delta_{aa}''}.$$

In dieser Formel läßt sich die Zahl E, da sie sowohl im Zähler wie im Nenner erscheint, herausheben, so daß geschrieben werden kann

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}' + \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

Die nachstehende Tabelle liefert die Größe δ_{aa}''

Stab	Länge s cm	Querschnitt cm²	S_1 t	$\frac{S_1^2 \cdot s}{F}$
S_1	208,5	37,2	— 1,040	6,09
S_2	206,0	37,2	— 1,030	5,88
S_3	204,0	37,2	— 1,020	5,71
S_4	202,0	37,2	— 1,010	5,54
S_5	201,0	37,2	— 1,005	5,46
S_6	100,0	37,2	— 1,000	2,69
V_1	30,0	12,6	0,50	0,60
V_2	70,0	12,6	0,50	1,39
V_3	100,0	12,6	0,50	1,99
V_4	120,0	12,6	0,50	2,38
V_5	130,0	12,6	0,50	2,58
H	1100	132	1,00	8,34

$$\frac{1}{2} \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F} = 48{,}65$$

$$\delta_{aa}'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F} = 97{,}30.$$

Der Wert δ_{aa}' berechnet sich nach der Formel 42 zu

$$\delta_{aa}' = \frac{8 \cdot h^2 \cdot l}{15 \cdot J} = \frac{8 \cdot \overline{151{,}25}^2 \cdot 2200}{15 \cdot 37000} = 725.$$

In der Formel 44 muß noch die rechnerisch ermittelte Verschiebung δ_{aa}'' auf denselben Maßstab gebracht werden wie die zeichnerisch in der Fig. 29 e gefundenen Verschiebungen δ_{aa}' und η.

Die Zeichnung ergibt $\delta_{aa}' = 1{,}36$ cm.

Gerechnet wurde nach der Formel 42

$$\delta_{aa}' = 725 \text{ cm } (E = 1).$$

Hiernach ist der zeichnerische Wert um $\frac{725}{1{,}36} = 533$ mal kleiner. Um denselben Maßstab muß daher die Größe δ_{aa}'' verkleinert werden. Er ergibt sich somit schließlich

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}' + \mathfrak{M} \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}' + \frac{1}{533} \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}}.$$

Die Zahlen liefern

$$X = P \cdot \frac{\eta}{1{,}36 + \frac{1}{533} \cdot 97{,}3} = P \cdot \frac{\eta}{1{,}36 + 0{,}18} = P \cdot \frac{\eta}{1{,}54} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}.$$

Nunmehr können die Momente des Balkens ermittelt werden. Das absolute Maximalmoment entsteht ungefähr im Punkte 4'. (Vgl. Fig. 29 f.)

Wir schreiben nach Gleichung 43

$$M_4 = \frac{y_4}{\delta_{aa}} \left\{ \frac{\delta_{aa}}{y_4} \cdot \frac{x' \cdot x}{l} - \eta \right\}$$

und stellen diesen Ausdruck zeichnerisch in der Fig. 29 f dar.

Der Abschnitt unter A' beträgt

$$\delta_{aa} \cdot \frac{x}{y_4} = 1{,}54 \cdot \frac{6}{1{,}2} = 7{,}7 \text{ cm}.$$

Im übrigen ist die Konstruktion der Einflußlinie bekannt. Alle Lasten im positiven Beitragsgebiet ergeben rechtsdrehende Momente, alle Lasten im negativen Gebiet linksdrehende Momente. Die größeren Werte liefert das positive Gebiet. In der Fig. 29 f ist die ungünstigste Laststellung des Kranes angegeben. Das Maximalmoment beträgt

$$M_4 = P \cdot \frac{y_4}{\delta_{aa}} \cdot \{\eta_1 + \eta_2\}$$

$$= 6 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}54} \{2{,}68 + 0{,}79\} = 15{,}8 \text{ mt}.$$

Die zugleich auftretende wagerechte Seitenkraft X des Zuges in dem unterspannten Bogen ermittelt sich unmittelbar nach

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}$$

oder für beide Lasten

$$X_4 = P \cdot \frac{1}{\delta_{aa}} \{\eta_1' + \eta_2'\}$$

wo die Strecken η_1' und η_2' der Biegungslinie zu entnehmen sind.

Die Zahlen ergeber

$$X_4 = 6 \cdot \frac{1}{1{,}54} \{2{,}9 + 1{,}1\} = \sim 15{,}6 \text{ t.}$$

Die Einflußlinie Fig. 29 f kann auch zur Bestimmung des Momentes aus dem Eigengewicht für die in Frage stehende Balkenstelle benutzt werden. Das Eigengewicht beträgt $g = 0{,}18$ t pro m Träger. Es ist

$$M_4^g = \frac{y_4}{\delta_{aa}} \cdot F_0 \cdot g.$$

Der Inhalt der Einflußfläche ermittelt sich zu

$$F_0 = 5\ m \cdot \text{cm.}$$

Man erhält daher

$$M_4^g = \frac{1{,}2}{1{,}54} \cdot 5 \cdot 0{,}18 = 0{,}7 \text{ mt.}$$

Die zugleich auftretende Spannkraft X ist

$$X_4^g = \frac{1}{\delta_{aa}} \cdot F_0 \cdot g.$$

Bei $F_0 = 56{,}6$ m · cm folgt

$$X_4^g = \frac{1}{1{,}54} \cdot 56{,}6 \cdot 0{,}18 = \sim 6{,}6 \text{ t.}$$

Die Kranlast und das Eigengewicht rufen somit ein Moment hervor von $M_4^0 = M_4 + M_4^g = 15{,}8 + 0{,}7 = 16{,}5$ mt

und eine Anspannung von

$$X_4^0 = X_4 + X_4^g = 15{,}6 + 6{,}6 = 22{,}2 \text{ t.}$$

Hiernach berechnet sich die Materialinanspruchnahme des Balkens zu

$$\sigma = \frac{M_4^0}{W} + \frac{X_4^0}{F} = \frac{1\,650\,000}{1739} + \frac{22\,200}{132}$$

$$= 948 + 168 = 1116 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Anspannung X erreicht den größten Wert, wenn der Kran in der Mitte des Trägers steht

$$X_{max} = P \cdot \frac{1}{\delta_{aa}} \{\eta_1' + \eta_2'\}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{1{,}54} \{3{,}66 + 3{,}66\} = 28{,}6 \text{ t.}$$

Das Eigengewicht lieferte 6,6 t.

Infolgedessen ergibt sich

$$X^0_{max} = 28{,}6 + 6{,}6 = 35{,}2 \text{ t.}$$

Nach Maßgabe des Planes Fig. 29 b beträgt der größte Zug in dem unterspannten Bogen

$$S_1 = X^0_{max} \cdot 1{,}04 = 35{,}2 \cdot 1{,}04 = 36{,}6 \text{ t.}$$

Es dürfte noch von Nutzen sein, die unter dem Eigengewicht und der Kranlast eintretende Durchbiegung des Hauptbalkens festzustellen.

a) Aus dem Eigengewicht.

Der Balken.

Die geometrische Funktion des Bogens ist

$$y = \frac{4 \cdot h}{l^2} \cdot x\,(l - x).$$

Das Moment im Abstande x vom Auflager ist

$$M_x = \frac{g \cdot l}{2} \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2} - X \cdot y,$$

hiernach

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = -y.$$

daher

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = \frac{1}{J \cdot E} \int_0^l \left\{ -2 \cdot g \cdot h \left(x^2 - \frac{x^3}{l} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot g \cdot h}{l} \left(x^3 - \frac{x^4}{l} \right) + X \cdot \frac{16 \cdot h^2}{l^2} \left(x^2 - \frac{2 \cdot x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{J \cdot E} \left\{ -\frac{g \cdot h \cdot l^3}{15} + \frac{8 \cdot X \cdot h^2 \cdot l}{15} \right\} \quad \ldots \quad \text{(a)}$$

Die Längenänderungen sämtlicher Stäbe liefern

$$X \cdot \sum \frac{S^2 \cdot s}{F \cdot E} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Die Summierung ergibt

$$\frac{1}{J \cdot E}\left\{-\frac{g \cdot h \cdot l^3}{15}+\frac{8 \cdot X \cdot h^2 \cdot l}{15}\right\}+X \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}=0$$

oder

$$X=\frac{Q \cdot l}{8 \cdot h+\frac{15 \cdot J}{h \cdot l} \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad \ldots \quad (45)$$

Nach Kenntnis von X läßt sich die Durchsenkung in der Mitte des Balkens auf folgendem Wege finden. Man bringt an der fraglichen Stelle die vorläufige Kraft P_n in der Richtung der Senkung an und läßt außerdem zunächst nur die Kraft X wirken. Dann beträgt die Senkung unter der Last P_n

$$f_x=\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot d x.$$

Das Moment des Balkens im Abstande x vom Auflager ist

$$M_x=\frac{P_n}{2} \cdot x-X \cdot y.$$

Hiernach

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n}=\frac{x}{2}.$$

Es folgt

$$f_x=2 \cdot \frac{1}{J \cdot E} \int_0^{\frac{l}{2}}\left\{\frac{P_n}{4} \cdot x^2-X \cdot \frac{2 \cdot h \cdot x^2}{l^2}(l-x)\right\} d x.$$

Und wegen $P_n=o$.

$$f_x=-\frac{40 \cdot X \cdot h \cdot l^2}{384 \cdot J \cdot E}.$$

Die Durchbiegung des Balkens, wenn die Überspannung als wirkungslos gedacht wird, beträgt bekanntlich

$$f_0=\frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot J \cdot E}.$$

Es verbleibt somit als wahre Durchbiegung

$$f=f_0-f_x$$

$$=\frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot J \cdot E}-\frac{40 \cdot X \cdot h \cdot l^2}{384 \cdot J \cdot E}.$$

Oder nach Einführung des Wertes für X nach Gleichung 45

$$f = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot J \cdot E} - \frac{40 \cdot h \cdot l^2}{384 \cdot J \cdot E} \cdot \frac{\frac{Q \cdot h \cdot l^2}{15 \cdot J}}{\frac{8 \cdot h^2 \cdot l}{15 \cdot J} + \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}}$$

oder

$$f = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot J \cdot E} \cdot \frac{\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}}{\frac{8 \cdot h^2 \cdot l}{15 \cdot J} + \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

b) Aus der Kranlast.

Ohne einen nennenswerten Fehler zu machen, kann man annehmen, daß an Stelle der beiden Radlasten eine einzige Last $P_0 = 2\,P$ in der Trägermitte steht. In ähnlicher Weise wie oben findet man die fast genaue Durchbiegung

$$f = \frac{P_0 \cdot l^3}{48 \cdot J \cdot E} \cdot \frac{\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}}{\frac{8 \cdot h^2 \cdot l}{15 \cdot J} + \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Die Zahlen ergeben $\left(\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}\right.$ war früher bereits berechnet$\left.\right)$:

a) Aus dem Eigengewicht

$$f = \frac{5 \cdot 3960 \cdot \overline{2200}^3}{384 \cdot 37000 \cdot 2150000} \cdot \frac{97.3}{\frac{8 \cdot 151{,}25 \cdot 151{,}25 \cdot 2200}{15 \cdot 37000} + 97{,}3}$$

$$= 6{,}9 \cdot \frac{97{,}3}{822} = \sim 0{,}82 \text{ cm}.$$

b) Aus der Kranlast ($P_0 = 2\,P = 12\,000$ kg)

$$f = \frac{12000 \cdot \overline{2200}^3}{48 \cdot 37000 \cdot 2150000} \cdot \frac{97{,}3}{822} = 33{,}4 \cdot \frac{97{,}3}{822} = \sim 3{,}96 \text{ cm}.$$

Die gesamte Durchbiegung in der Mitte des Trägers beträgt daher

$$f_0 = 0{,}82 + 3{,}96 = 4{,}78 \text{ cm}.$$

Beispiel 21. Gegeben eine Kranlaufbahn aus Fachwerk, befahren von einem 10 t-Laufkran. Der Kran soll durch einen anderen von 15 t Tragkraft ersetzt werden. Die Folge ist, daß die Laufbahn verstärkt werden muß. Man erreicht dies am einfachsten durch Unterspannung des Fachwerkträgers nach Fig. 30.

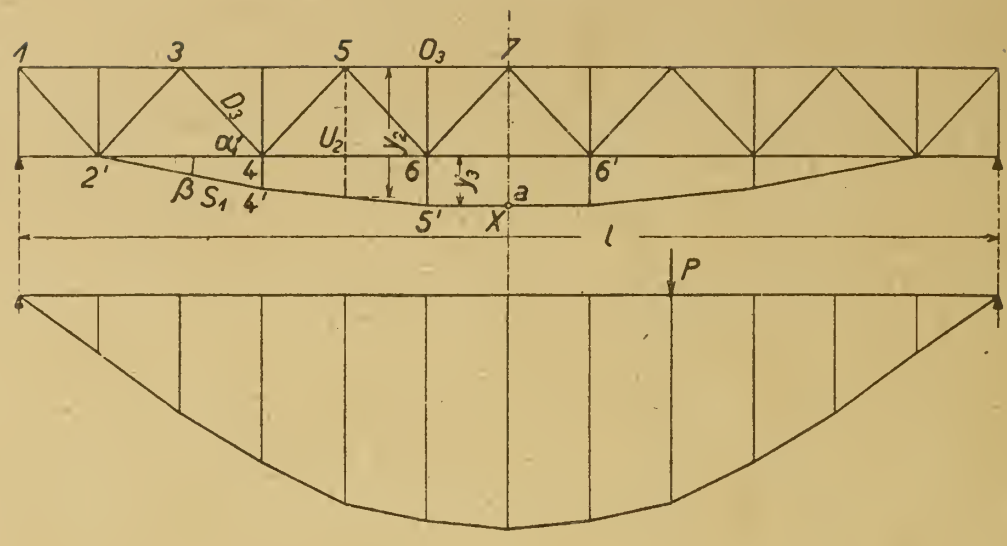


Fig. 30.

Fig. 30 c.

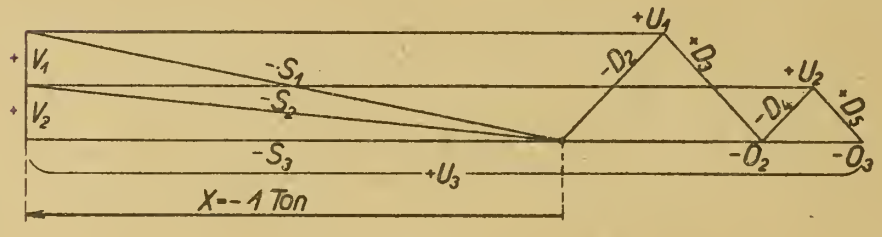


Fig. 30 a.

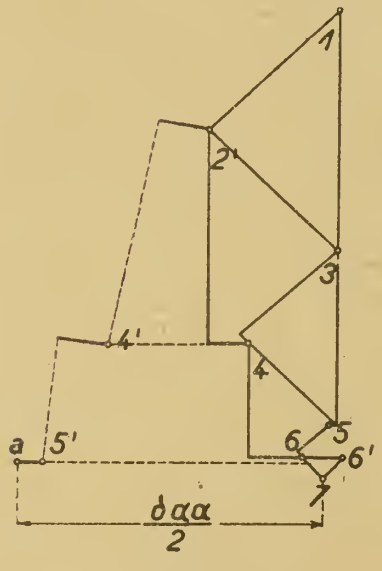


Fig. 30 b.

Die Berechnungsweise der Konstruktion ist ähnlich wie die des vorhergehenden Beispiels. Man denke sich das Zugband in der Mitte bei *a* durchschnitten und an den Schnittenden die Kräfte $X = -1$ t entgegengesetzt gerichtet angreifend. Ein Cremonaplan liefert die Stabkräfte des gesamten Netzwerkes (Fig. 30 a). Sodann ermittle man für jeden Stab die Längenänderung

$$\Delta = \frac{S_1 \cdot s}{F \cdot E} \text{ (bei } E = 1) = \frac{\text{ton} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot \text{ton/cm}^2} = \text{cm}$$

und zeichne einen Williotschen Verschiebungsplan, mit dem Ausgangspunkt Knoten 7 in Trägermitte (Flg. 30 b). Dem Plan können die Ordinaten der Biegungslinie des Trägerobergurtes entnommen werden (Fig. 30 c). Er liefert ferner die Erweiterung δ_a der Schnittstelle bei *a*. Die Biegungslinie stellt die Einflußlinie für die wagerechte Seitenkraft *X* der Spannkraft in dem unterspannten Bogen dar.

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können die Stabspannkräfte des Netzwerkes ermittelt werden. Man zeichne für jeden Stab eine Einflußlinie.

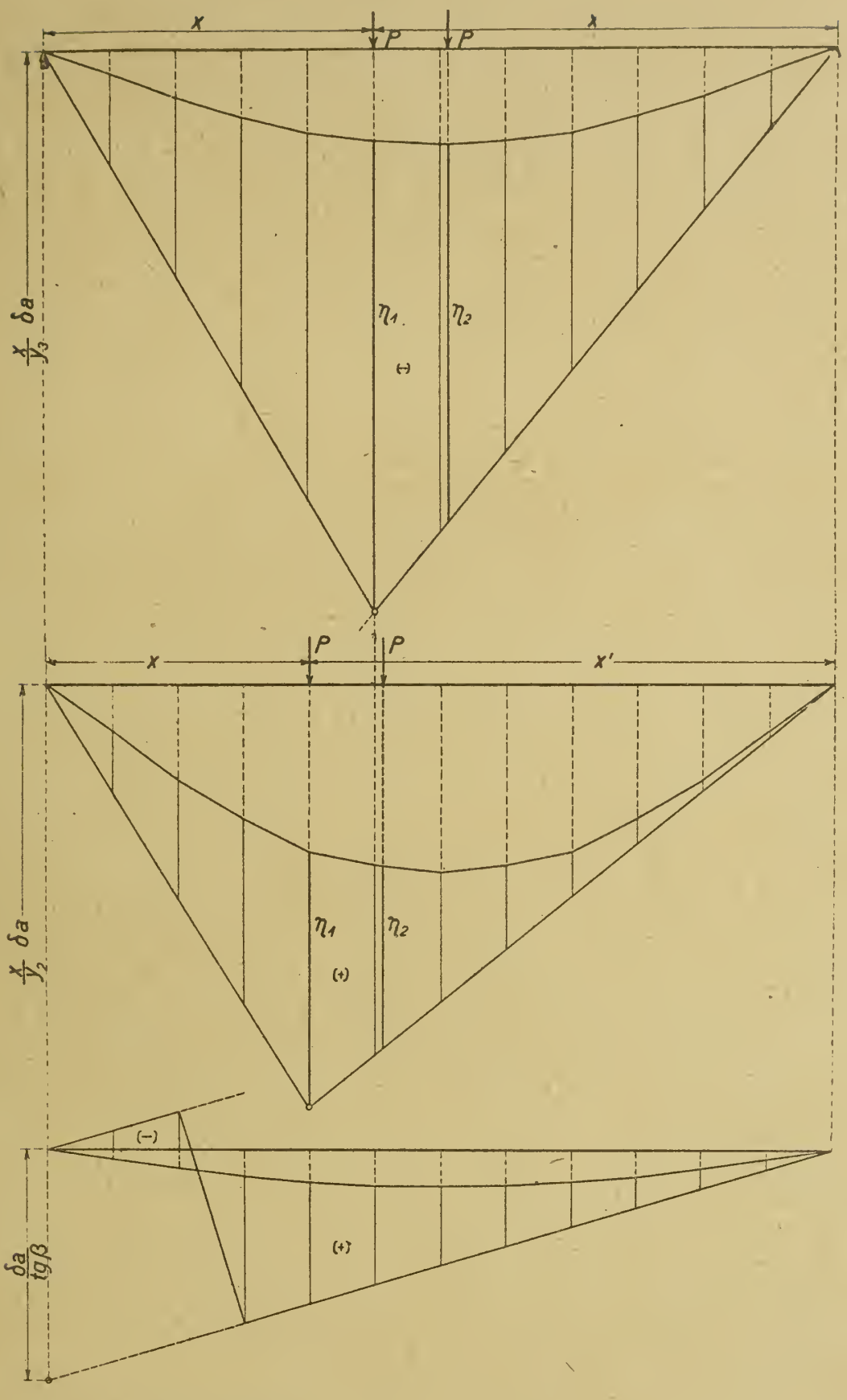


Fig. 30 d.

Fig. 30 e.

Fig. 30 f.

S t a b O_3 (Fig. 30 d).

Für $P = 1$

$$S = \frac{1 \cdot x' \cdot x}{l \cdot h} - \frac{X \cdot y_3}{h} = \frac{y_3}{h \cdot \delta_a}\left\{\frac{x' \cdot x \cdot \delta_a}{y_3 \cdot l} - \eta\right\}.$$

Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$S_0 : x' = \frac{x \cdot \delta_a}{y_3} : l$$

schreiben und graphisch auftragen (Fig. 30 d). Das zweite Glied ist durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben.

Die Laststellung, bei der die größte Spannkraft des Stabes eintritt, ist in der Figur angegeben

$$S_{max} = P \cdot \frac{y_3}{h \cdot \delta_a} (\eta_1 + \eta_2).$$

Stab U_2 (Fig. 30 e).

Für $P = 1$

$$S = \frac{1 \cdot x' \cdot x}{l \cdot h} - \frac{X \cdot y_2}{h} = \frac{y_2}{h \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot x \cdot \delta_a}{y_2 \cdot l} - \eta \right\}.$$

Der Hebelarm y_2 ist in der Fig. 30 angegeben. Die Konstruktion der Einflußlinie ist eine ähnliche wie vorher (Fig. 30 e).

Stab D_3 (Fig. 30 f).

Für $P = 1$

$$S = \frac{1 \cdot x'}{l \cdot \sin \alpha} - X \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\delta_a \cdot \sin \alpha} \left\{ \frac{x' \cdot \delta_a}{l \cdot \operatorname{tg} \beta} - \eta \right\}.$$

Das erste Klammerglied läßt sich wieder als Verhältnis schreiben, und zwar

$$S_0 : x' = \frac{\delta_a}{\operatorname{tg} \beta} : l$$

und zeichnerisch darstellen. Die Konstruktion der Einflußlinie siehe Fig. 30 f.

Es ist wieder

$$S_{max} = P \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\delta_a \cdot \sin \alpha} (\eta_1 + \eta_2).$$

Die Einflußlinien dienen auch zur Bestimmung der Spannkräfte aus dem Eigengewicht, indem man die Knotenlasten als Einzelkräfte einführt.

Laufbahnen auf mehr als zwei Stützen.

Beispiel 22. Eine vollwandige Kranlaufbahn auf drei Stützen (Fig. 31). Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Als fragliche Größe wählt man zweckmäßig den mittleren Auflagerdruck X. Es wird angenommen, daß alle Stützpunkte unnachgiebig sind.

Man beseitigt das mittlere Auflager und bringt an dessen Stelle die Last $X = -1$ an. Betrachtet man nun die entsprechende Momentenfläche als Belastung und zeichnet hierfür das Seilpolygon, dann stellt dieses die Biegungslinie des Trägers dar, entstanden aus der Belastung $X = -1$ (Fig. 31 a, 31 b und 31 c).

Bezeichnet δ_a die Ordinate der Biegungslinie unter a und η die Ordinate unter einer beliebigen Last P auf dem Träger, dann ist

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a}.$$

a) Hiernach läßt sich der größte Auflagerdruck X aus einer beliebigen Belastung ohne weiteres finden. Zwei Lasten P_1 und P_2, möglichst in die Nähe der Stütze gebracht, liefern

$$X = \frac{1}{\delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

b) Der Auflagerdruck A (Fig. 31 d).

$$A_x = \frac{P \cdot x'}{l} - \frac{X \cdot l_2}{l} = \frac{P \cdot x'}{l} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \frac{l_2}{l},$$

bei $P = 1$

$$A_x = \frac{l_2}{l \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot \delta_a}{l_2} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer schreibt sich

$$A_0 : x' = \delta_a : l_2$$

und läßt sich zeichnerisch durch die schräge Gerade $1'—a'— 2$ darstellen.

Die schraffierte Fläche ist die Einflußlinie für den Auflagerdruck A.

Zwei Lasten möglichst nahe an das Auflager gefahren, ergeben

$$A = \frac{l_2}{l \cdot \delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

c) Der Auflagerdruck B (Fig. 31 e).

Die Einflußlinie entwickelt sich wie vorher

$$B = \frac{l_1}{l \cdot \delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

d) Die Querkraft T_n an der Stelle n (Fig. 31 f).

Die Einflußlinie von 1 bis n ist dieselbe wie für den Auflagerdruck B. Bei n tritt ein Wechsel ein. Die Linie $n''— 2'$ läuft parallel zu $1 — a'— n'$.

Fig. 31.

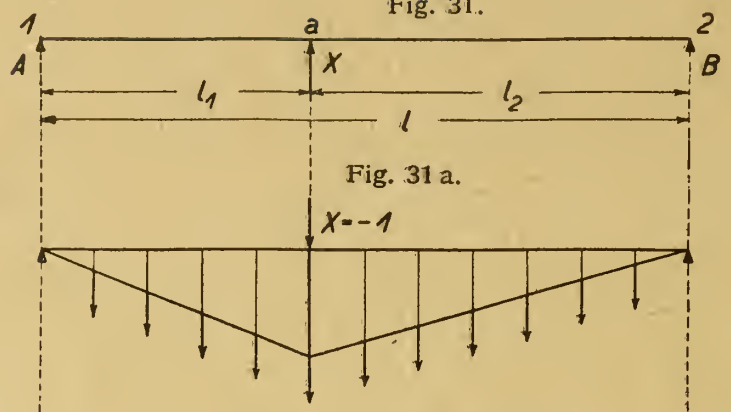


Fig. 31 a.

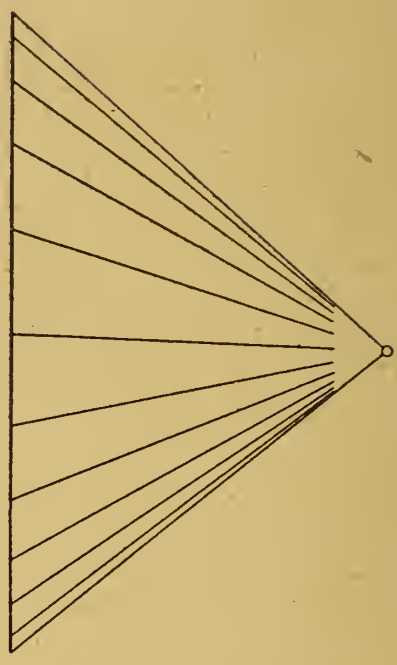


Fig. 31 b.

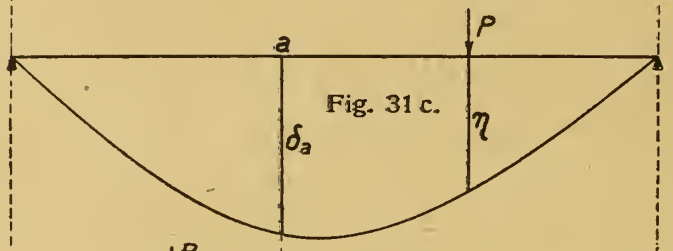


Fig. 31 c.

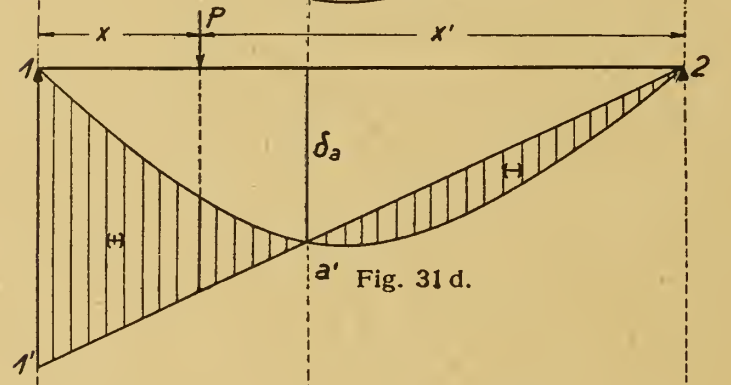


Fig. 31 d.

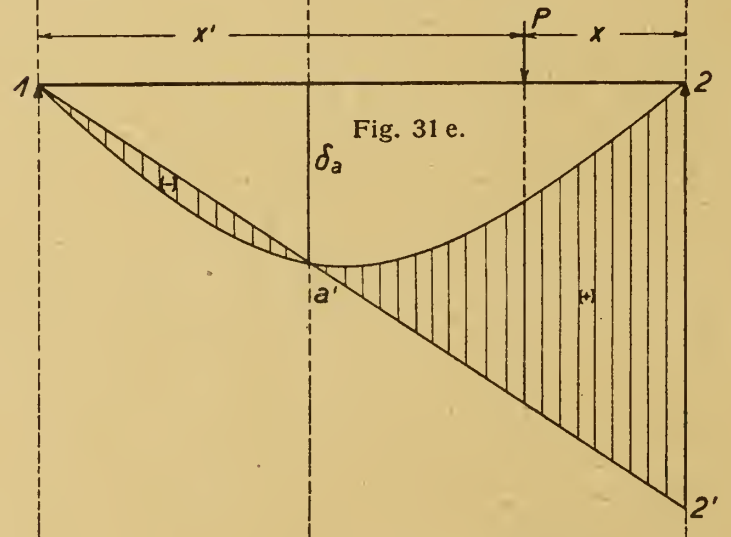


Fig. 31 e.

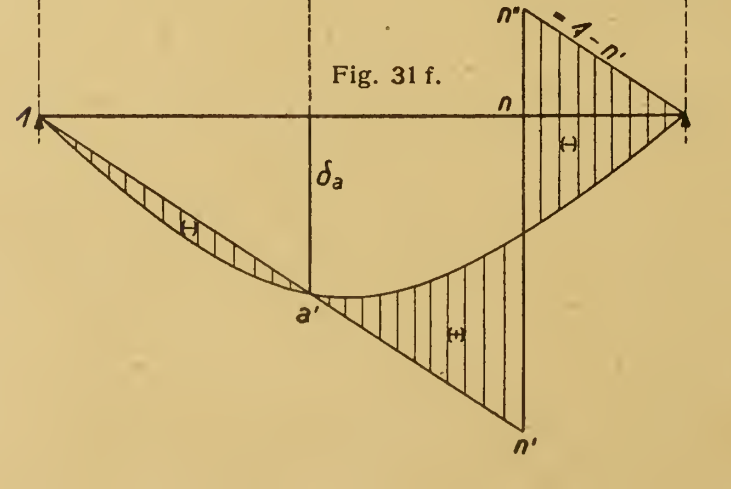


Fig. 31 f.

e) Das Moment an der Balkenstelle m (Fig. 31 g).

Die Last P in m erzeugt

$$M_m = \frac{P \cdot x'}{l} \cdot x - \frac{X \cdot l_2}{l} \cdot x = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \frac{l_2}{l} \cdot x.$$

Bei $P = 1$

$$M_m = \frac{l_2 \cdot x}{\delta_a \cdot l} \left\{ \frac{x'}{l_2} \cdot \delta_a - \eta \right\}.$$

Setzt man für x den Festwert m, dann folgt

$$M_m = \frac{l_2 \cdot m}{l \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x'}{l_2} \cdot \delta_a - \eta \right\}.$$

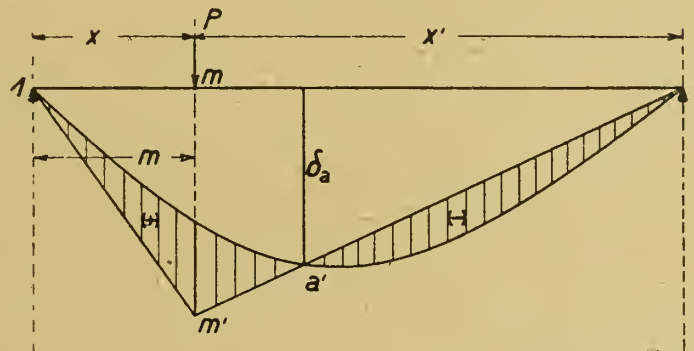


Fig. 31 g.

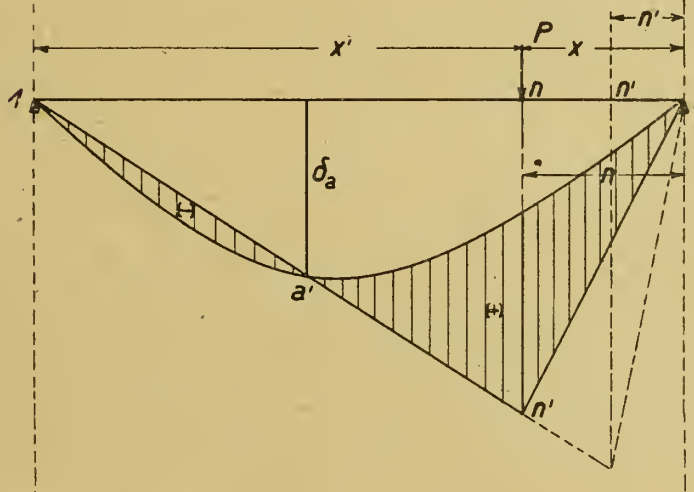


Fig. 31 h.

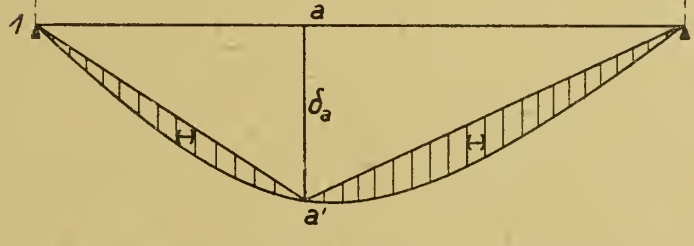


Fig. 31 i.

Das erste Glied der Klammer kann als Verhältnis

$$M_0 : x' = \delta_a : l_2$$

graphisch aufgetragen werden. Der Wert η ist durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben. Die Fig. 31 g zeigt die Konstruktion der Einflußlinie für M_m.

f) Das Moment an der Balkenstelle n (Fig. 31 h).

Die Einflußlinie entwickelt sich ähnlich wie vorher nach

$$M_n = \frac{l_1 \cdot n}{l \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x'}{l_1} \cdot \delta_a - \eta \right\}.$$

Das größte Moment an den Stellen m und n läßt sich leicht ermitteln. Es frägt sich jedoch, wo liegt der gefährliche Querschnitt, für den überhaupt das absolut größte Moment des Balkens eintritt. Diese Stelle muß durch Versuche gefunden werden. In der Fig. 31 h ist durch die punktierte Linie die Einflußlinie für eine andere Stelle n' angedeutet. Man beachte, daß der Faktor vor der Klammer lautet

$$M_n' = \frac{l_1 \cdot n'}{l \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x'}{l_1} \cdot \delta_a - \eta \right\}.$$

g) In der Fig. 31 i ist schließlich noch die Einflußlinie für das Moment im Stützpunkt a wiedergegeben nach

$$M_a = \frac{l_1 \cdot l_2}{l \cdot \delta_a} \left\{ \frac{x'}{l_1} \cdot \delta_a - \eta \right\}.$$

Zwei Lasten in der Nähe der Mitte des rechten Feldes würden ergeben

$$M_a = -\frac{l_1 \cdot l_2}{l \cdot \delta_a} \{ P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 \}.$$

In derselben Weise kann die Berechnung erfolgen, wenn der Träger aus Fachwerk mit parallelen Gurten besteht. Die nach oben gefundene Biegungslinie ist dann zwar nicht ganz genau, aber der Fehler erscheint so gering, daß er praktisch keine Bedeutung hat. Nur da, wo der Träger im Verhältnis zur Länge ungewöhnlich hoch ist, wird eine genaue Ermittelung der Biegungslinie notwendig sein.

Beispiel 23. Eine Kranlaufbahn aus Fachwerk auf drei Stützen (Fig. 32). Als statisch unbestimmte Größe sei wieder der mittlere Stützendruck X eingeführt. Ermittelung der Biegungslinie des Trägers aus $X = -1$ wie beim vorhergehenden Beispiel. Es ist wieder, wenn η die Ordinaten der Biegungslinie bezeichnen,

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a}.$$

a) Einflußlinie für den Stab O_2 (Fig. 32 a).

Die Last P im Knoten 4 erzeugt die Spannkraft

$$S = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l \cdot h} - \frac{X}{2} \cdot \frac{x}{h} = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l \cdot h} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \frac{x}{2h}.$$

Bei $P = 1$

$$S = \frac{x}{2h \cdot \delta_a} \left\{ \frac{2 \cdot x' \cdot \delta_a}{l} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer

$$S_0 : x' = \delta_a : \frac{l}{2}$$

läßt sich wieder nach Fig. 32 a graphisch darstellen, während die Werte η durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben sind. Die

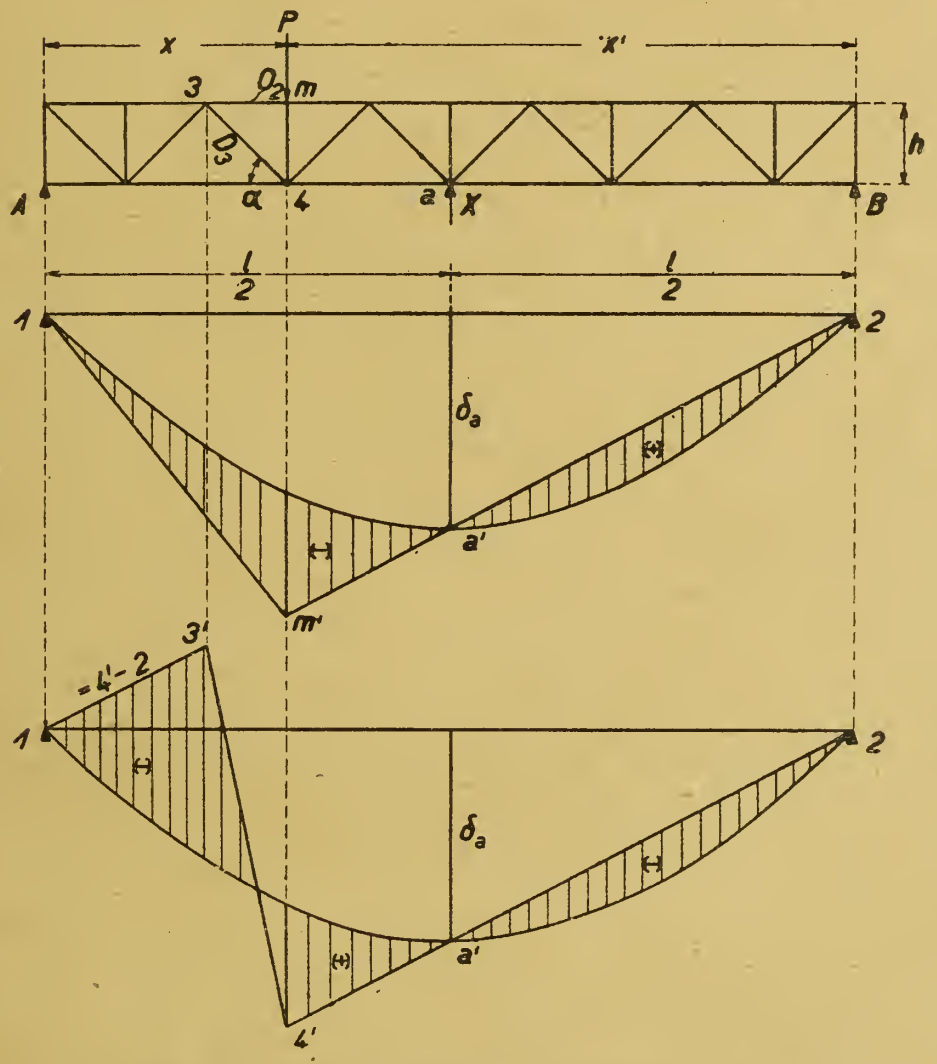


Fig. 32.

Fig. 32a.

Fig. 32b.

Figur zeigt die fertige Einflußlinie für die Spannkraft des Stabes. Zwei Lasten auf dem Träger liefern z. B. (wenn $x = m$)

$$S = \frac{m}{2h \cdot \delta_a} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

b) Einflußlinie für den Stab D_3 (Fig. 32 b).

Die Last P im Knoten 4 ruft die Spannkraft hervor

$$S = \frac{P \cdot x'}{l \cdot \sin \alpha} - \frac{X}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{P \cdot x'}{l \cdot \sin \alpha} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Bei $P = 1$

$$S = \frac{1}{2\,\delta_a \sin\alpha}\left\{\frac{2 \cdot x' \cdot \delta_a}{l} - \eta\right\}.$$

Das erste Klammerglied ist als Verhältnis

$$S_0 : x' = \delta_a \cdot \frac{l}{2}$$

in der Fig. 32 b aufgetragen. Die Figur zeigt auch den übrigen Verlauf der Einflußlinie.

Zwei Lasten auf dem Träger erzeugen wieder

$$S = \frac{1}{2 \cdot \delta_a \cdot \sin\alpha}\left\{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\right\}.$$

Eine genaue Aufzeichnung der Biegungslinie für die Belastung $X = -1$ wird unter allen Umständen erfolgen müssen, wenn der Träger gekrümmte Gurte hat oder sonstwie unregelmäßig gestaltet ist. Die Biegungslinie ergibt sich in ähnlicher Weise wie bei Beispiel 21: Ermittelung der Stabspannungen, sodann Berechnung der Längenänderungen nach $\Delta = \frac{S \cdot s}{FE}$ und schließlich Aufzeichnung eines Williotschen Verschiebungsplanes, dem die Ordinaten der Biegungslinie entnommen werden können.

Beispiel 24. Eine vollwandige Kranlaufbahn auf vier Stützen (Fig. 33). Die Feldweiten sind verschieden. Die Aufgabe ist zweifach statisch unbestimmt. Als unbekannte Größen führt man die beiden mittleren Stützendrucke X_1 und X_2 ein.

Man denke den Träger unbelastet und die beiden mittleren Auflager beseitigt. Sodann belaste man ihn an der Stelle a mit der Kraft $X_1 = -1$ und ermittle das Biegungspolygon (Fig. 33 a). Die Senkungen der Punkte a, b und m sind in der Figur mit δ bezeichnet. Der erste Index von δ bedeutet den Ort der Verschiebung, der zweite die Ursache derselben.

Nun beseitige man X_1 wieder und bringe die Last $X_2 = -1$ an. Die dadurch hervorgerufene Biegungslinie sei in der Fig. 33 b ermittelt, wo auch die Verschiebungen der Punkte a, b und m angegeben sind.

Schließlich führe man, nach Entfernung von X_2, die Belastung $P = 1$ im Punkte m ein und denke auch hierfür die Biegungslinie mit den entsprechenden Ordinaten ermittelt (Fig. 33 c).

Läßt man nun die Belastung durch P weiter wirken und zwingt die Auflager X_1 und X_2 unter den Träger, dann lassen sich nach dem Arbeitsgesetz folgende Beziehungen aufstellen.

Zu Punkt a)

$$P \cdot \delta_{am} - X_1 \cdot \delta_{aa} - X_2 \cdot \delta_{ab} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Zu Punkt b)

$$P \cdot \delta_{bm} - X_1 \cdot \delta_{ba} - X_2 \cdot \delta_{bb} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

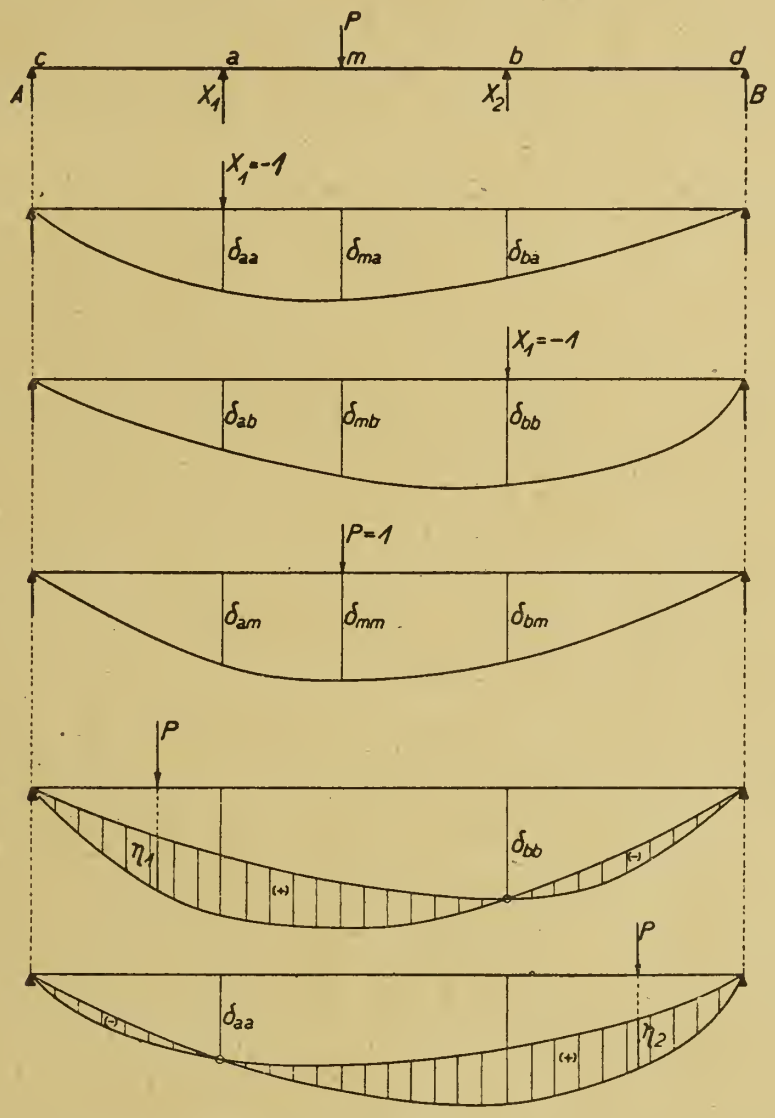


Fig. 33.

Fig. 33a.

Fig. 33b.

Fig. 33c.

Fig. 33d.

Fig. 33e.

Nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Formveränderungen ist

$$\delta_{am} = \delta_{ma},$$
$$\delta_{bm} = \delta_{mb},$$
$$\delta_{ab} = \delta_{ba}.$$

Dies oben eingesetzt ergibt

$$X_1 \cdot \delta_{aa} + X \cdot \delta_{ba} = P \cdot \delta_{ma}$$
$$X_1 \cdot \delta_{ba} + X_2 \cdot \delta_{bb} = P \cdot \delta_{mb}.$$

Man erhält hieraus

$$X_1 = P \cdot \frac{\delta_{mb} - \delta_{ma} \cdot \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}}}{\delta_{ba} - \delta_{aa} \cdot \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}}}$$

und

$$X_2 = P \cdot \frac{\delta_{ma} - \delta_{mb} \cdot \frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}}}{\delta_{ba} - \delta_{aa} \cdot \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}}}.$$

Setzt man

$$\delta_{ba} - \delta_{aa} \cdot \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}} = c \,(= \text{konstant}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

dann wird

$$X_1 = P \cdot \frac{\delta_{mb} - \delta_{ma} \cdot \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}}}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

und

$$X_2 = P \cdot \frac{\delta_{ma} - \delta_{mb} \cdot \frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}}}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Man sieht, daß die dritte Biegungslinie aus $P = 1$ (Fig. 33 c) nicht ermittelt zu werden braucht.

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich zeichnerisch auftragen.

Gleichung 51:

Die Werte δ_{mb} im Zähler sind gegeben durch die Biegungslinie aus $X_2 = -1$ (Fig. 33 b).

Das zweite Glied im Zähler enthält die Ordinaten δ_{ma} der Biegungslinie aus $X_1 = -1$ (Fig. 33 a) multipliziert mit dem Faktor $\frac{\delta_{bb}}{\delta_{ba}}$. Fügt man diese Werte mit der Kurve Fig. 33 b zusammen, dann ergibt sich die Einflußlinie für den Stützendruck X_1 aus einer wandernden Last P (Fig. 33 d). Bezeichnen η_1 die Ordinaten dieser Einflußlinie, dann ist

$$X_1 = P \cdot \frac{\eta_1}{c}.$$

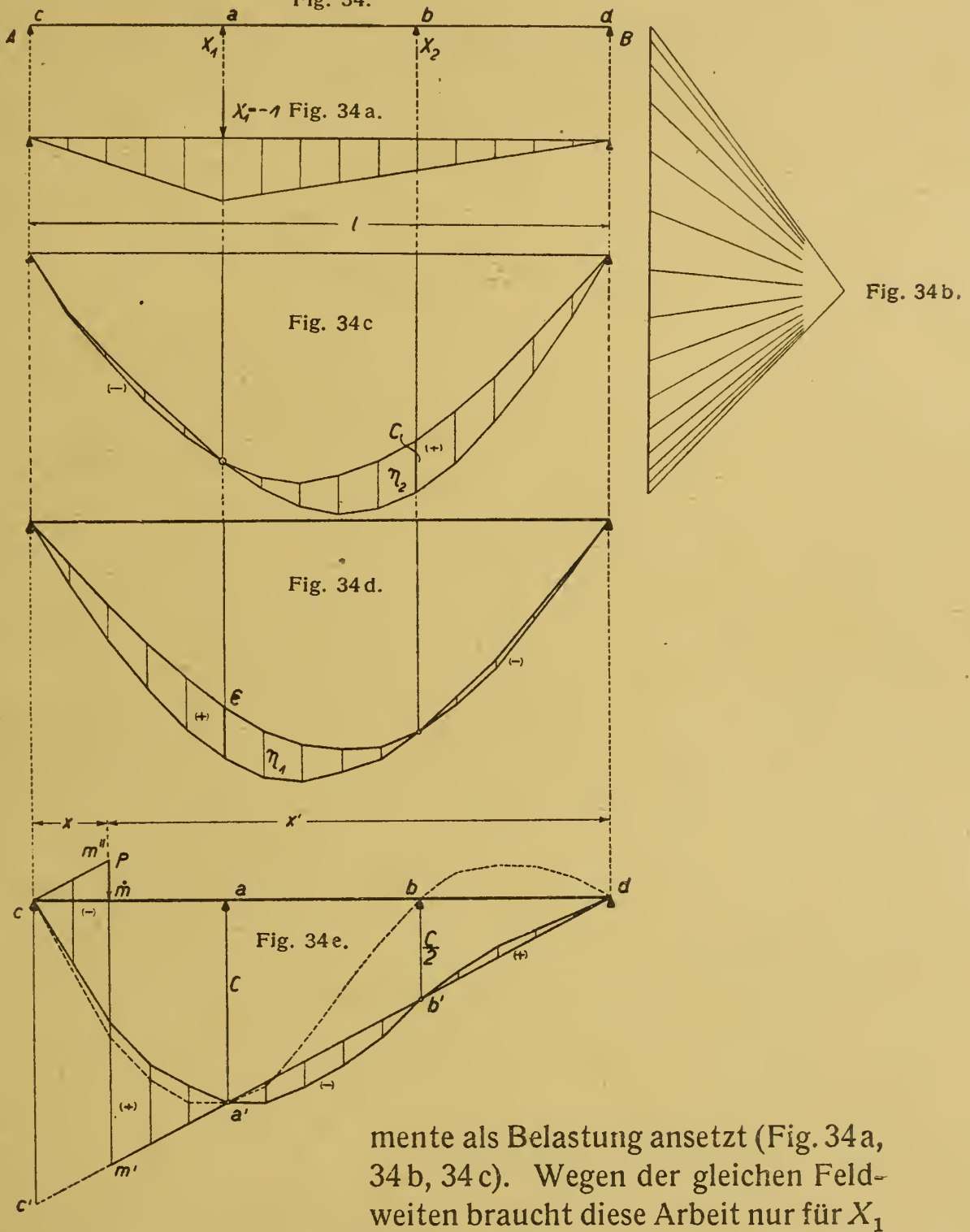
Ebenso verfährt man mit der Gleichung 52, und man erhält in der Fig. 33 e die Einflußlinie für den Stützendruck X_2.

$$X_2 = P \cdot \frac{\eta_2}{c}.$$

Zur näheren Berechnung möge ein Träger auf vier Stützen mit gleichen Feldweiten gegeben sein (Fig. 34).

Die Biegungslinien aus den Belastungen $X_1 = -1$ und $X_2 = -1$ werden zeichnerisch ermittelt, indem man die entsprechenden Mo-

Fig. 34.



mente als Belastung ansetzt (Fig. 34a, 34b, 34c). Wegen der gleichen Feldweiten braucht diese Arbeit nur für X_1 durchgeführt werden. Die Biegungslinie aus $X_2 = -1$ ergibt sich durch Umkehrung der Biegungslinie aus $X_1 = -1$ (Fig. 34d).

In den Figuren 34c und 34d sind bereits die Gleichungen 51 und 52 durch Vereinigung der entsprechenden Kurven zum

Ausdruck gebracht. Die Figur 34 d liefert die Einflußlinie für X_1

$$X_1 = P \cdot \frac{\eta_1}{c},$$

die Figur 34c die für X_2

$$X_2 = P \cdot \frac{\eta_2}{c}.$$

Mit Hülfe dieser Einflußlinien können die Momente, Querkräfte und Auflagerdrucke des Trägers bestimmt werden.

a) Die Querkraft im Punkte m aus der wandernden Last $P = 1$ (Fig. 34 e).

$$T_m = \frac{P \cdot x'}{l} - X_1 \cdot \frac{2}{3} - X_2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{P \cdot x'}{l} - \frac{P \cdot \eta_1}{c} \cdot \frac{2}{3} - \frac{P \cdot \eta_2}{c} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3 \cdot c} \left\{ \frac{3 \cdot x' \cdot c}{2 \cdot l} - \eta_1 - \frac{\eta_2}{2} \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer kann als Verhältnis

$$T_0 : x' = c : \frac{2\,l}{3}$$

graphisch dargestellt werden. Das zweite Glied η_1 ist durch die Ordinaten der Einflußlinie für X_1 (Fig. 34 d) gegeben. Das dritte Glied $\frac{\eta_2}{2}$ liefert die Einflußlinie für X_2 (Fig. 34 c).

Im Punkte m' tritt ein Wechsel der Querkraft ein. Die Schräge $c - m''$ läuft parallel zu $m' - d$.

Bezeichnen η die Ordinaten der gefundenen Einflußlinie für T_m, dann ist für eine beliebige Belastung, beispielsweise bei zwei Raddrucken,

$$T_m = \frac{2}{3 \cdot c} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A kann in derselben Figur durch Verlängerung der Linie $m' - d$ bis c' zur Darstellung gebracht werden.

b) Das Moment an der Stelle m aus einer wandernden Last $P = 1$ (Fig. 34 f).

$$M_m = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - X_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot x - X_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$= \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta_1}{c} \cdot \frac{2}{3} \cdot x - P \cdot \frac{\eta_2}{c} \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$= \frac{2 \cdot x}{3 \cdot c} \left\{ \frac{3 \cdot x' \cdot c}{2 \cdot l} - \eta_1 - \frac{\eta_2}{2} \right\}.$$

Die graphische Auftragung der Gleichung erfolgt in derselben Weise wie vorher. Zu beachten ist die Gerade m'— c.

Zwei Lasten beispielsweise liefern wieder

$$M_m = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot c} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

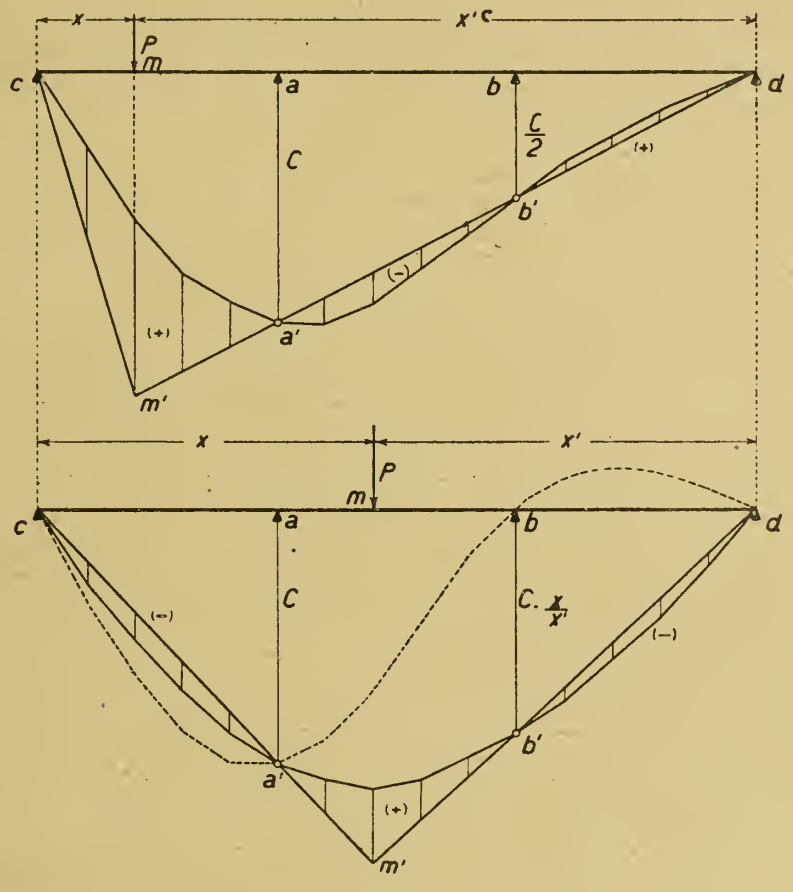


Fig. 34 f—g.

c) Das Moment an der Stelle m im Mittelfeld, hervorgerufen durch eine Last $P = 1$ (Fig. 34 g).

$$M_x = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - X_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot x + X_1 \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right) - X_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$= \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - \frac{X_1}{3}(l - x) - X_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$= \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta_1}{c} \cdot \frac{l - x}{3} - P \cdot \frac{\eta_2}{c} \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$= \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta_1}{c} \cdot \frac{x'}{3} - P \cdot \frac{\eta_2}{c} \cdot \frac{x}{3}$$

$$= \frac{x'}{3 \cdot c} \left\{ \frac{3 \cdot x \cdot c}{l} - \eta_1 - \frac{x}{x'} \cdot \eta_1 \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer wird als Verhältnis

$$M_0 : x = c : \frac{l}{3}$$

graphisch durch die Gerade $m' — a' — c$ dargestellt. Die Gerade $m' — b' — d$ ergibt sich von selbst. Das zweite Glied η_1 ist gegeben durch die Einflußlinie für X_1. Das dritte Glied bedeutet die mit $\frac{x}{x'}$ multiplizierten Ordinaten der Einflußlinie für X_2.

Bei zwei Lasten auf dem Balken entsteht beispielsweise wieder

$$M_m = \frac{x'}{3 \cdot c} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2\}.$$

Wie bei Beispiel 23 kann dieses Verfahren auch bei Trägern aus Fachwerk auf vier Stützen angewendet werden. Es gelten hierfür die bei jenem Beispiel gemachten Anmerkungen über die Auffindung der Biegungslinien.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die Berechnung einer Kranbahn auf vier Stützen schon recht umständlich und zeitraubend ist; man wird jedoch nicht umhin können, gegebenenfalls die Rechnung sorgfältig durchzuführen. Bei Trägern auf noch mehr als vier Stützen aber wächst die Arbeit derartig an, daß der Konstrukteur nach Mitteln sucht, wie er auf kürzerem Wege zum Ziele gelangen kann. Er wird dann an den Einflußlinien des vorhergehenden Beispiels sehen, daß der Einfluß noch weiter abliegender Felder auf die Größen X_1, X_2, T und M so gering ist, daß man ihn ohne Schaden vernachlässigen kann. Aus diesem Grunde kann ein Träger auf fünf und mehr Stützen als Träger auf vier Stützen behandelt werden. Wenn man bedenkt, daß die Voraussetzungen der Rechnung durchgehender Balken, z. B. Unnachgiebigkeit der Auflager nur unvollkommen erfüllt werden, und infolgedessen selbst bei strenger Untersuchung die Resultate nicht genau sind, so kann der kleine Fehler, der entsteht, wenn ein vielfach gestützter Träger als Träger auf vier Stützen gerechnet wird, keine Bedeutung haben.

Endlich mögen noch folgende Angaben für Überschlagsrechnungen gemacht werden. Bei einem Träger auf vielen Stützen ist angenähert

a) Für eins der mittleren Felder

$$M_{max} = 0{,}71 \cdot M_0.$$

b) Für das Endfeld

$$M_{max} = 0{,}81 \cdot M_0.$$

M_0 bedeutet das Maximalmoment des Balkens auf zwei Stützen. Bei einer Last P z. B.

$$M_0 = \frac{P\ l}{4}.$$

Bei zwei Lasten

$$M_0 = \frac{P}{2\,l}\left\{l - \frac{b}{2}\right\}^2$$ (vergleiche Erster Abschnitt, Gleichung 4).

Dem Buche ist eine Tafel beigefügt mit den Einflußlinien für einen Träger auf unendlich vielen unnachgiebigen Stützen. Die Linien der oberen Figur gelten für die Momente eines beliebigen Punktes in einem Mittelfelde, dagegen die Linien der unteren Figur für die Momente eines Punktes im Endfelde des Trägers. Die Linien können mit genügender Genauigkeit auch bei Trägern auf einer begrenzten Zahl von Stützen, bis herunter auf vier, verwendet werden; selbst bei Trägern auf drei Stützen ist der Fehler nur unbedeutend.

Die Einflußlinien gelten für eine Feldweite von 1 m und für eine Last $P = 1$ t.

Beispiel. Es soll für einen beliebigen Punkt n das Moment aus einer Last P, die an einer beliebigen anderen Stelle steht, ermittelt werden. Mißt man die Ordinate unter der Last in cm, dann ist

$$M_m = P \cdot \eta \cdot 0{,}05 = \text{mt}.$$

Bei mehreren Lasten ergibt sich

$$M_m = P_1 \cdot \eta_1 \cdot 0{,}05 + P_2 \cdot \eta_2 \cdot 0{,}05 + \ldots$$

Ist die Feldweite nicht 1 m, sondern l m, dann folgt

$$M_m = P \cdot \eta \cdot 0{,}05 \cdot l$$

bzw.
$$M_m = P_1 \cdot \eta_1 \cdot 0{,}05 \cdot l + P_2 \cdot \eta_2 \cdot 0{,}05 \cdot l$$
$$= 0{,}05 \cdot l\,(P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2).$$

Natürlich muß der Abstand der Lasten voneinander auf den richtigen Maßstab für die Figur gebracht werden.

Es sei

$$l = 7{,}8 \text{ m}.$$

Vorhanden zwei Lasten im Abstande $b = 2{,}6$ m.

Dann verkleinert sich b auf

$$b = \frac{2{,}6}{7{,}8} \cdot 10 = 3{,}333 \text{ cm}.$$

Mit dieser Entfernung sind die beiden Lasten in die Einflußlinien einzuführen.

Beispiel 25. Die Stütze zu einer Katzenlaufbahn. Es handelt sich um eine an einem vollwandigen Träger laufende Einschienenkatze. Wegen der Durchfahrt der Katze muß die Stütze portalartig ausgebaut sein. Die Last im Scheitel der Stütze sei P (Fig. 35). Die kleinen Kreise deuten gelenkartige Stabanschlüsse an. Die senkrechten Pfosten sind biegungsstark.

Der wagerechte Schub am Pfostenfuß beträgt

$$X = \frac{P \cdot a}{4 \cdot h}.$$

Hiernach ergibt sich als größtes Moment für den Pfosten

$$M_2 = \frac{P \cdot a}{4 \cdot h} \cdot h_1 \quad \text{(Abbildung 35a)}.$$

Die Pfostendruckkraft von 1 — 2 ist

$$S = \frac{P}{2}.$$

Die Spannkräfte der übrigen Stäbe lassen sich ebenfalls leicht ermitteln.

Fig. 35 a. Fig. 35.

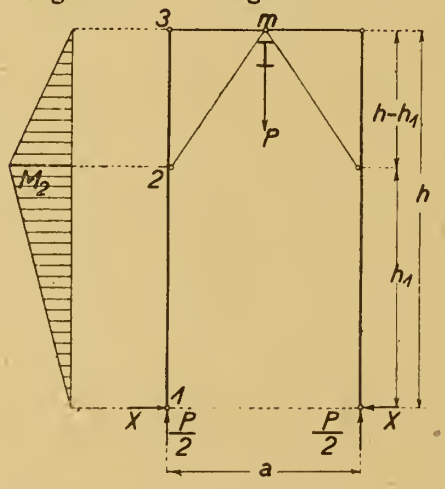
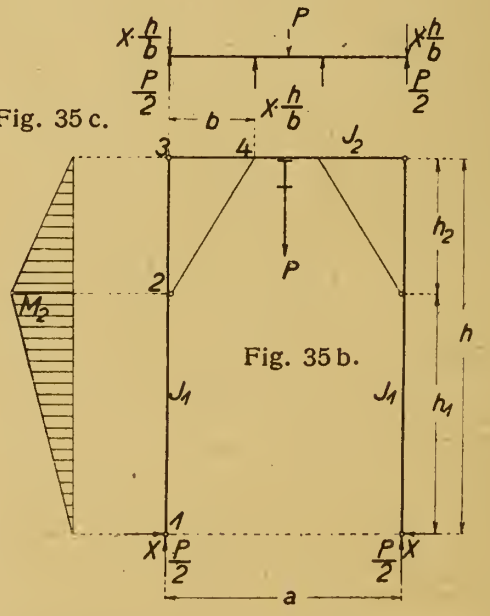


Fig. 35 d.

Fig. 35 c.



Etwas umständlicher wird die Rechnung, wenn das Portal nach Fig. 35 b ausgebildet ist. Es bezeichnen J_1 und J_2 das Trägheitsmoment des Pfostens und des wagerechten Balkens. Zu ermitteln ist der wagerechte Schub X am Fuße des Pfostens. Vernachlässigt man den geringen Einfluß der Längenänderung der Stäbe, dann ergibt sich die fragliche Größe nach

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = 0.$$

Pfosten:

Von 1—2.

$$M_x = X \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = x$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^{h_1} X \cdot x^2 \cdot dx = \frac{X \cdot h_1^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Von 2—3.

$$M_x = \frac{X \cdot h_1}{h - h_1} \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{h_1 \cdot x}{h - h_1}$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^{(h-h_1)} X \cdot \frac{h_1^2 \cdot x^2}{(h-h_1)^2} \cdot dx = \frac{X \cdot h_1^2 (h - h_1)}{3 \cdot J_1 \cdot E} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Balken:

Von 3—4.

$$M_x = \frac{P}{2} \cdot x - X \cdot \frac{h}{b} \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -\frac{h}{b} \cdot x$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^b \left\{ -\frac{P \cdot h \cdot x^2}{2 \cdot b} + \frac{X \cdot h^2 \cdot x^2}{b^2} \right\} dx = -\frac{P \cdot b^2 \cdot h}{6 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{X \cdot b \cdot h^2}{3 J_2 \cdot E} \quad \text{(III)}$$

Von 4—*m*.

$$M_x = \frac{P}{2}(b + x) - X \cdot h, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -h.$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^{\left(\frac{a}{2} - b\right)} \left\{ -\frac{P}{2} \cdot h (b + x) + X \cdot h^2 \right\} dx =$$

$$= -\frac{P \cdot h}{4 \cdot J_2 \cdot E} \left(\frac{a^2}{4} - b^2 \right) + \frac{X \cdot h^2}{J_2 \cdot E} \left(\frac{a}{2} - b \right) \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

Die Summenbildung ergibt

$$\frac{X \cdot h_1^3}{3 \cdot J_1} + \frac{X \cdot h_1^2 (h - h_1)}{3 \cdot J_1} + \frac{X \cdot b \cdot h^2}{3 \cdot J_2} + \frac{X \cdot h^2}{J_2} \left(\frac{a}{2} - b \right)$$

$$= \frac{P \cdot b^2 \cdot h}{6 \cdot J_2} + \frac{P \cdot h}{4 \cdot J_2} \left(\frac{a^2}{4} - b^2 \right).$$

Hieraus

$$X = \frac{P}{48} \cdot \frac{3\,a^2 - 4 \cdot b^2}{\frac{h_1^2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + \frac{a \cdot h}{2} - \frac{2 \cdot b \cdot h}{3}} \quad \ldots \quad (53)$$

Das größte Pfostenmoment ist (Fig. 35 c)

$$M_2 = X \cdot h_1.$$

Die Momente des Balkens sind (Fig. 35 d)

$$M_4 = \frac{P \cdot b}{2} - X \cdot h$$

und

$$M_m = \frac{P \cdot a}{4} - X \cdot h$$

Die Formel 53 liefert auch ohne weiteres den Schub X für verschiedene Abarten des Portals.

Bei $h_1 = h$ und $b = \frac{a}{2}$ (d. h. $J_2 = \infty$)

$$X = 0,$$

bei $h_1 = 0$ und $b = 0$ (d. h. $J_1 = \infty$)

$$X = \frac{P \cdot a}{8 \cdot h},$$

bei $b = \frac{a}{2}$ und $h_1 = 0$

$$X = \frac{P \cdot a}{4 \cdot h},$$

bei $b = \frac{a}{2}$ und h_1 bestehend

$$X = \frac{P \cdot a^2}{8\left(\frac{h_1^2 \cdot J_2}{J_1} + \frac{a \cdot h}{2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

bei $b = 0$ und $h_1 = h$ (Rahmen)

$$X = \frac{P \cdot a^2}{8\,h\left(\frac{2\,h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + a\right)} \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

bei $h_1 = 0$ und b bestehend

$$X = \frac{P \cdot \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{3}\right)}{4 \cdot h\left(\frac{a}{2} - \frac{2\,b}{3}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Das Portal kann nach Fig. 35 e noch von einer wagerechten Kraft W aus Wind, Schrägzug der Last oder Schwanken der Katze angegriffen werden. Die Kraft verteilt sich wegen der Symmetrie des Gerüstes zur Hälfte auf die Fußpunkte. Die zugleich an diesen Stellen auftretenden Vertikaldrucke sind

$$V = W \cdot \frac{h}{a}.$$

Das größte Pfostenmoment ist

$$M_2 = \frac{W}{2} \cdot h_1.$$

Das größte Balkenmoment beträgt

$$M_4 = W \cdot \frac{h}{a}\left(\frac{a}{2} - b\right).$$

Das Moment in der Balkenmitte ist Null. Die Querkraft an dieser Stelle hat den Wert

$$T = \frac{W \cdot h}{a}.$$

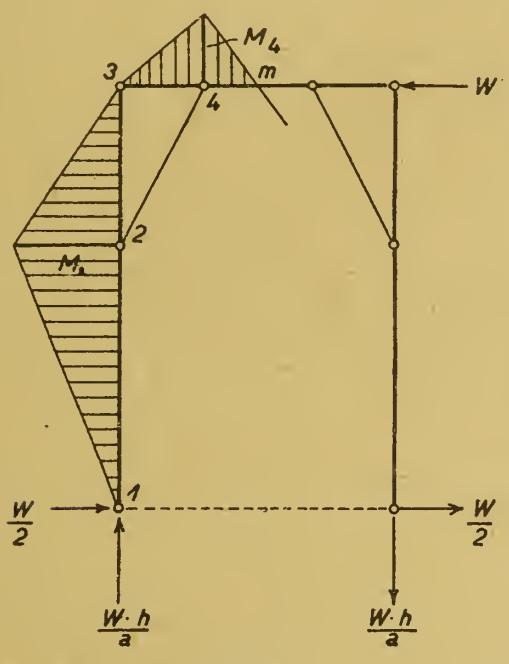


Fig. 35 e.

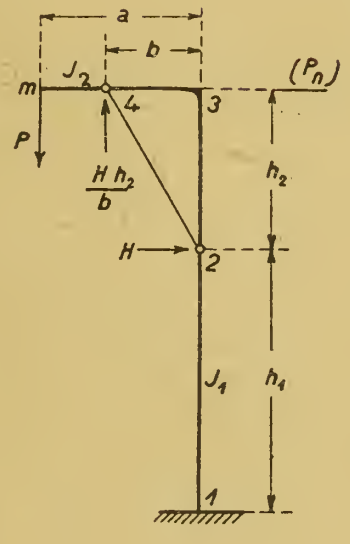


Fig. 35 f.

Wird die Berücksichtigung der Längenänderung der Stäbe als erwünscht erachtet, dann ergibt sich bei dem Beispiel Fig. 35 b der Schub X nach der erweiterten Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx + \int \frac{S}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot ds = 0.$$

Eine häufig vorkommende Stütze für eine Einschienenkatze ist die in der Fig. 35 f dargestellte. Als statisch unbestimmte Größe erscheint die wagerechte Seitenkraft H der Spannkraft in dem eckversteifenden Stabe. Vernachlässigt man den geringen Einfluß der Längenänderung der Stäbe, dann ermittelt sich H wieder mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial H} \cdot dx = 0.$$

Es ergibt sich

$$H = \frac{3 \cdot P \quad b}{2 \cdot h_2} \cdot \frac{\left(a - \frac{b}{3}\right) \cdot \frac{J_1}{J_2} + \frac{a \cdot h_2}{b}}{b \cdot \frac{J_1}{J_2} + h_2} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Die Momente sind

$$M_3 = P \cdot a - H \cdot h_2$$

$$M_4 = P \cdot (a - b)$$

$$M_1 = M_2 = P \cdot a.$$

Läßt man den eckversteifenden Stab herausfallen, dann ist die Beanspruchung der Stütze eine sehr ungünstige, und vor allem wird sie eine starke seitliche Ausweichung zeigen. Diese Ausweichung des Eckpunktes 3 läßt sich nach

$$f = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot d x$$

ermitteln.

P_n ist eine gedachte Kraft, die im Verlaufe der Rechnung wieder gleich Null gesetzt wird. Nach Fig. 35 f ist

$$M_x = P \cdot a + P_n \cdot x \qquad \frac{\partial M_x}{\partial P_n} = x$$

$$f = \frac{1}{J_1 E} \int_0^h \{ P \cdot a \cdot x + P_n \cdot x^2 \} d x$$

oder wegen $P_n = 0$

$$f = \frac{1}{J_1 E} \int_0^h P \cdot a \cdot x \cdot d x = \frac{P \cdot a \cdot h^2}{2 \; J_1 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Dieser Wert ist nicht ganz genau, weil der Einfluß des zunehmenden Hebelarmes $a + f_x$ im Verlaufe der Rechnung nicht berücksichtigt wurde. Die genaue Ausweichung findet man wie folgt (Fig. 35 g).

Die Biegungslinie des Pfostens sei annähernd eine Sinuslinie

$$y = f \sin \pi \cdot \frac{x}{l} \cdot$$

Wir suchen zunächst die unter der Wirkung von P eintretende Verkürzung δ_x der Stabachse. Zu diesem Zweck belastet man den Stab axial mit der provisorischen Kraft P_n. Die Verkürzung beträgt

$$\delta_x = \int \frac{M_x}{J_1 \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot d\,x.$$

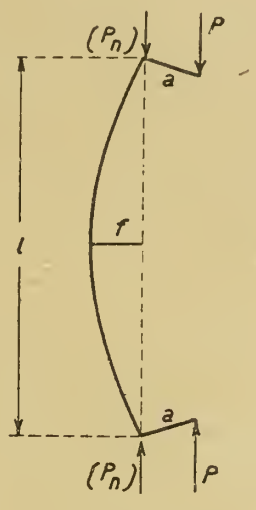


Fig. 35 g.

Das Moment für einen beliebigen Stabquerschnitt ist

$$M_x = P\left(f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} + a\right) + P_n \cdot f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l}.$$

Hiernach

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n} = f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l}.$$

Wegen $P_n = 0$ folgt

$$\delta_x = \frac{P}{2 \cdot J_1 \cdot E} \int_0^l \left\{ f^2 \cdot \sin^2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{l} + a \cdot f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} \right\} d\,x.$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\delta_x = \frac{P \;\; l \cdot f}{4 \cdot J_1 \;\; E}\left(f + \frac{4 \cdot a}{\pi}\right).$$

Es besteht die Beziehung

$$f_x^2 = \frac{4 \cdot l}{\pi^2} \cdot \delta_x,$$

daher

$$f_x^2 = \frac{4 \cdot l}{\pi^2} \cdot \frac{P \cdot l \cdot f}{4 \cdot J_1 \cdot E}\left(f + \frac{4 \cdot a}{\pi}\right)$$

$$= \frac{l^2}{\pi^2 \cdot J \cdot E} \cdot P \cdot f\left(f + \frac{4 \cdot a}{\pi}\right)$$

$$= \frac{P}{R} \cdot f\left(f + \frac{4 \cdot a}{\pi}\right).$$

$$R = \frac{\pi^2 \cdot J_1 \cdot E}{l^2}$$

ist die Knickkraft nach Euler.

Es muß sein

$$f_x = f,$$

somit

$$f^2 = \frac{P}{R} \cdot f \left(f + \frac{4 \cdot a}{\pi} \right).$$

Hieraus folgt

$$f = \frac{P}{R - P} \cdot \frac{4 \cdot a}{\pi} \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

da $h = \frac{l}{2}$ oder $l = 2\,h$, so ist für die Knickkraft einzusetzen

$$R = \frac{\pi^2 \cdot J_1 \cdot E}{4\ h^2}.$$

Dritter Abschnitt.

Verladebrücken- und Auslegerkrane.

Beispiel 26. Ein fahrbarer Brückenkran mit einseitigem Kragarm, befahren von einem Drehkran. Die Stützenentfernung ist $l = 20$ m, die Länge des Kragarms $l_1 = 9$ m. Fig. 36 d gibt die Maximalraddrucke des Drehkrans bei den verschiedenen Auslegerstellungen an.

Das Eigengewicht der Brücke soll mit $g = 0{,}450$ t pro m Hauptträger eingeführt werden. Als Winddruck senkrecht zur getroffenen Fläche sind anzunehmen

20 kg/m² bei voller Tätigkeit des Drehkrans,
200 kg/m², wenn die Anlage ruht.

Die Enden der Brücke sind mit festen Puffern als Sicherheit gegen Herabschlagen des Drehkranes versehen.

Fig. 36 c läßt den Querschnitt der Brücke erkennen. Zum Zweck, den Durchgang (Bühne) nicht zu stören, sind Kreuzverbände vermieden, dafür wirkt der Querschnitt als Steifrahmen gegen seitliche Kräfte. Der Windträger liegt in der Obergurtebene der Brücke.

Die Spannungen der Gurte aus Eigengewicht und Kranlast (außer Stab U_3) erzielt man am schnellsten mit Hilfe der Knotenmomente, während die Diagonalkräfte vorteilhaft durch Einflußlinien ermittelt werden.

a) Die Momente aus dem Eigengewicht.

Die zur Konstruktion erforderlichen Werte sind:

Wirkung des Mittelfeldes allein: in der Mitte (Bogenhöhe der Parabel zwischen A und B)

$$M_m{}^g = \frac{g\,l^2}{8} = \frac{0{,}46 \cdot \overline{20}^2}{8} = 22{,}50 \text{ mt}.$$

Wirkung des Kragarmes: Moment über A (Bogenhöhe der Parabel, deren Scheitel im Endpunkt des Kragarmes liegt)

$$M_A^g = \frac{g\,l_1^2}{2} = \frac{0{,}45 \cdot \overline{9}^{2}}{2} = 18{,}225 \text{ mt.}$$

Fig. 36 e zeigt die Konstruktion der Momentenlinie.

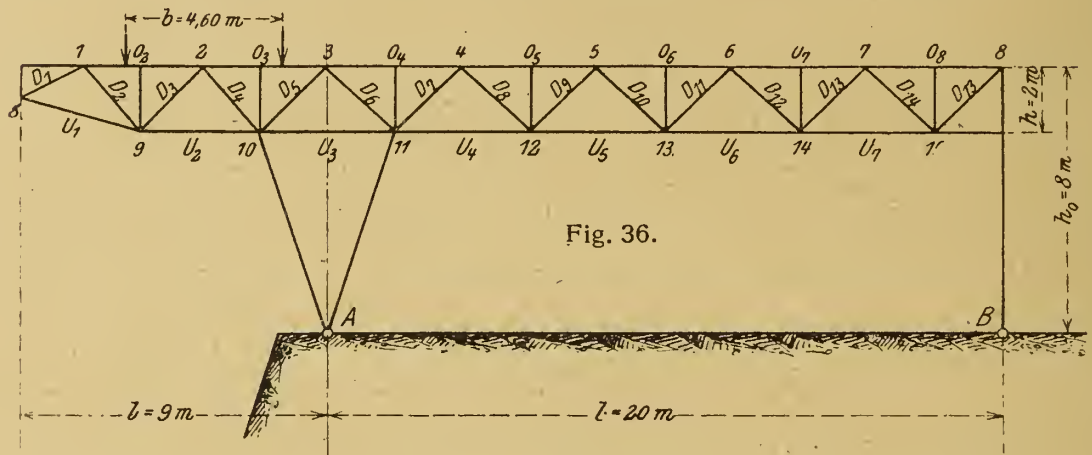
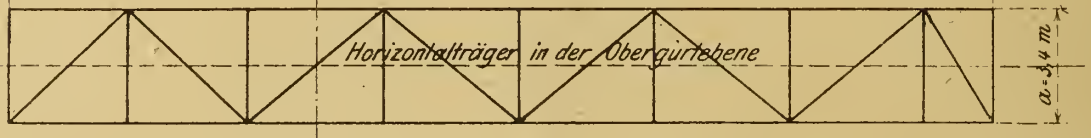


Fig. 36.

Fig. 36a.



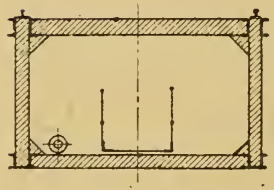


Fig. 36c.

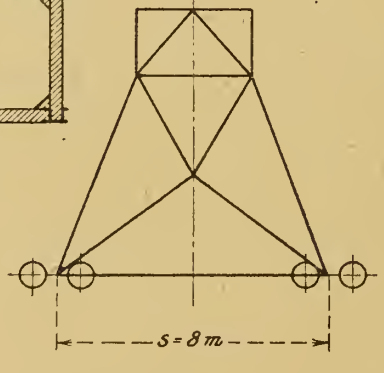
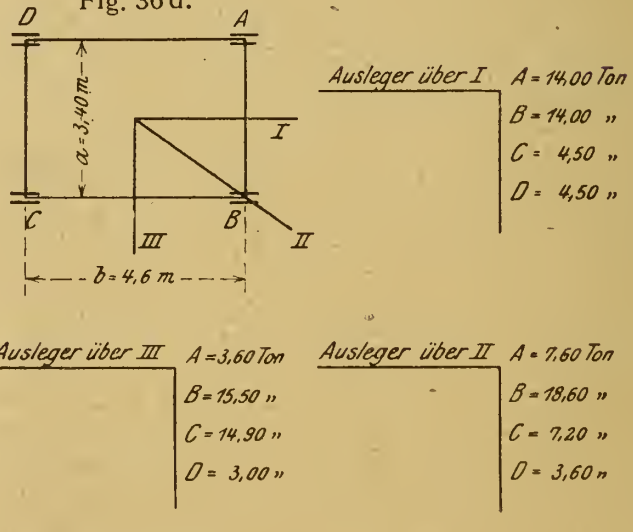


Fig. 36b.

Fig. 36d.



b) Momente aus dem fahrenden Drehkran.

Als Maximalmomentenerzeugende für das Mittelfeld kommen in Frage die Raddrucke bei Auslegerstellung III, wo $B = 15{,}50$ t und $C = 14{,}90$ t betragen. Der Abstand der Resultierenden $R = 30{,}40$ t von B ist

$$t = \frac{C \cdot b}{R} = \frac{14{,}90 \cdot 4{,}6}{30{,}40} = 2{,}255 \text{ m.}$$

Es folgt nach Gleichung 8, erster Abschnitt

$$M^{max} = \frac{R}{4\,l}\{l - t\}^2 = \frac{30{,}40}{4 \cdot 20}\{20 - 2{,}255\}^2 = 119{,}24 \text{ mt.}$$

Die zu entwerfende Parabel hat mithin die Länge

$$l - t = 20 - 2{,}255 = 17{,}745 \text{ m}$$

und die Höhe

119,24 mt.

Infolge des möglichen Wechselns der Raddrucke durch Schwenken des Auslegers entsteht schließlich die Herzlinie (Fig. 36 f).

Ferner sind die Momente bei vollständiger Ausfahrt des Drehkranes auf dem Kragarm zu ermitteln. Fig. 36 f gibt die Ausfahrmaße an.

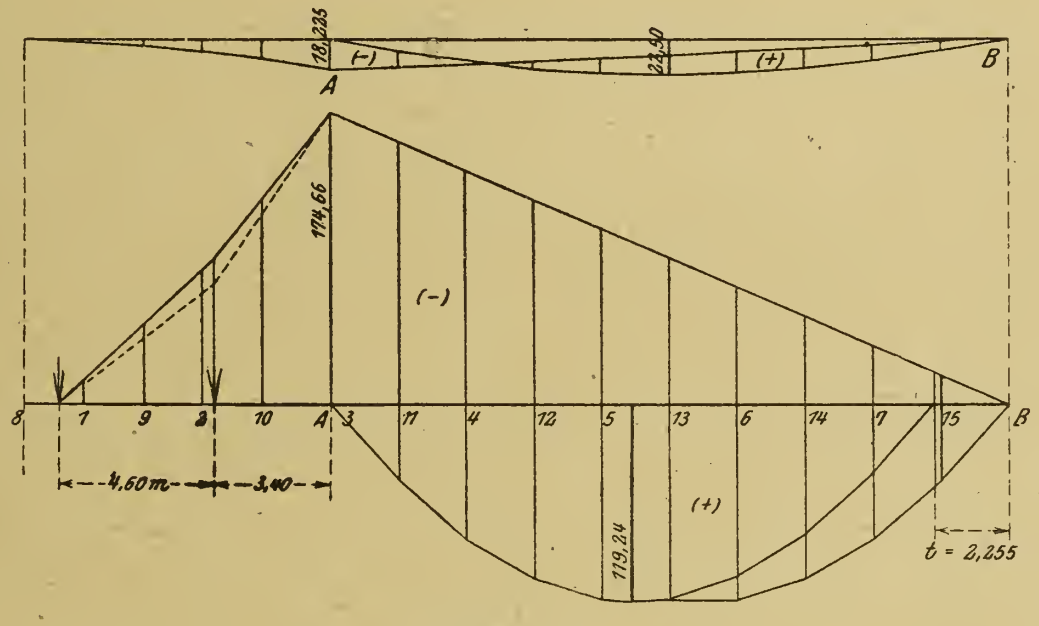


Fig. 36 e — f.

Bei Auslegerstellung II entstehen

$$M_2 = 18{,}60 \cdot 4{,}6 = 85{,}56 \text{ mt}$$

und

$$M_A = 18{,}60 \cdot 8{,}00 + 7{,}20 \cdot 3{,}40 = 173{,}28 \text{ mt.}$$

Bei Auslegerstellung III

$$M_2 = 15{,}50 \cdot 4{,}6 = 71{,}30 \text{ mt}$$

und

$$M_A = 15{,}50 \cdot 8{,}00 + 14{,}90 \cdot 3{,}40 = 174{,}66 \text{ mt.}$$

Über den vollständigen Verlauf dieser Momente besteht keine Unklarheit. Ebenfalls ist die Wirkung der verschieden drehenden Momente auf die Gurtstäbe zu erkennen.

Nunmehr werden die Ordinaten der Pläne Fig. 36 e und 36 f vereinigt, und man erhält die tatsächlich wirksamen Maximalmomente aus Eigengewicht und dem fahrenden Drehkran (Fig. 36 g).

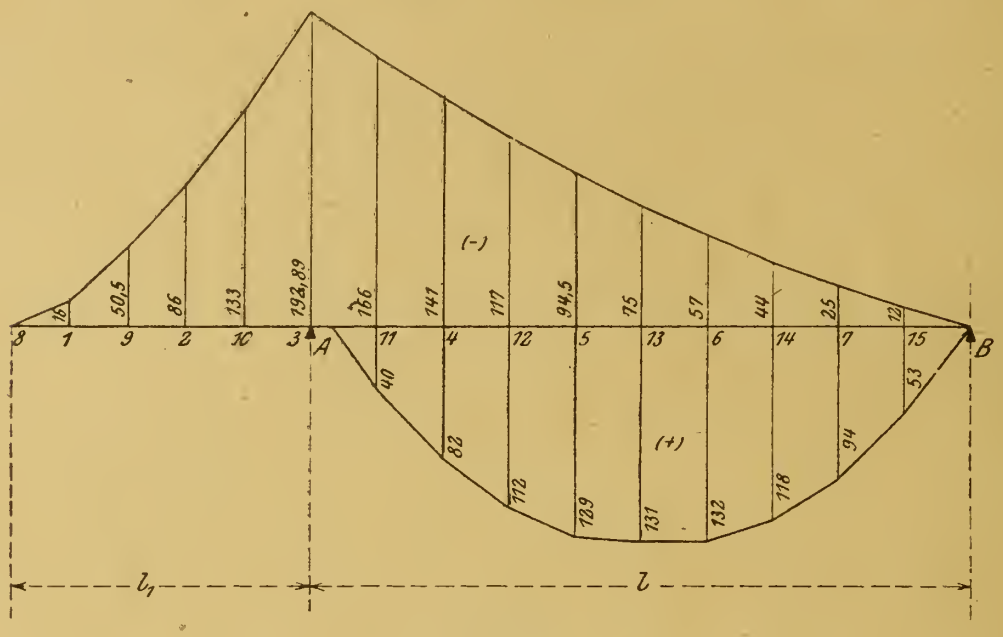


Fig. 36 g.

Es berechnen sich die Gurtspannungen nach

$$S = \frac{M}{h}.$$

$0_2 = +25{,}25$ t
$0_3 = +66{,}50$ t
$0_4 = +83{,}00$ t, $-20{,}00$ t
$0_5 = +58{,}50$ t, $-56{,}00$ t
$0_6 = +37{,}50$ t, $-65{,}50$ t
$0_7 = +22{,}00$ t, $-59{,}00$ t
$0_8 = +6{,}00$ t, $-26{,}50$ t

$U_1 = -11{,}40$ t
$U_2 = -43{,}00$ t
$U_3 = \ldots$ t
$U_4 = -70{,}50$ t, $+41{,}00$ t
$U_5 = -47{,}25$ t, $+64{,}50$ t
$U_6 = -28{,}50$ t, $+66{,}00$ t
$U_7 = -12{,}50$ t, $+47{,}00$ t.

c) Die Einflußlinien der Diagonalen.

Stab D_5.

Die Last $P = 1$ t in Knotenachse 11 erzeugt den Auflagerdruck

$$A = 1 \cdot \frac{x'}{l},$$

der durch die Schrägstützen halbiert wird. Infolgedessen greifen in Knoten 10 an

$$A' = \frac{1 \cdot x'}{2\,l}.$$

Die Zerlegung dieses Vertikalschubes wagerecht und in Richtung der Schrägen ergibt

$$D_5 = \frac{A'}{\sin\alpha} = \frac{x'}{2\,l \sin\alpha}$$

oder

$$D_5 : x' = \frac{1}{2 \sin\alpha} : l,$$

und da

$$\alpha = 45^0$$

folgt

$$D_5 : x' = 0{,}7071 : l.$$

Die Auftragung dieser Verhältnisgleichung ist in Fig. 36i angegeben.

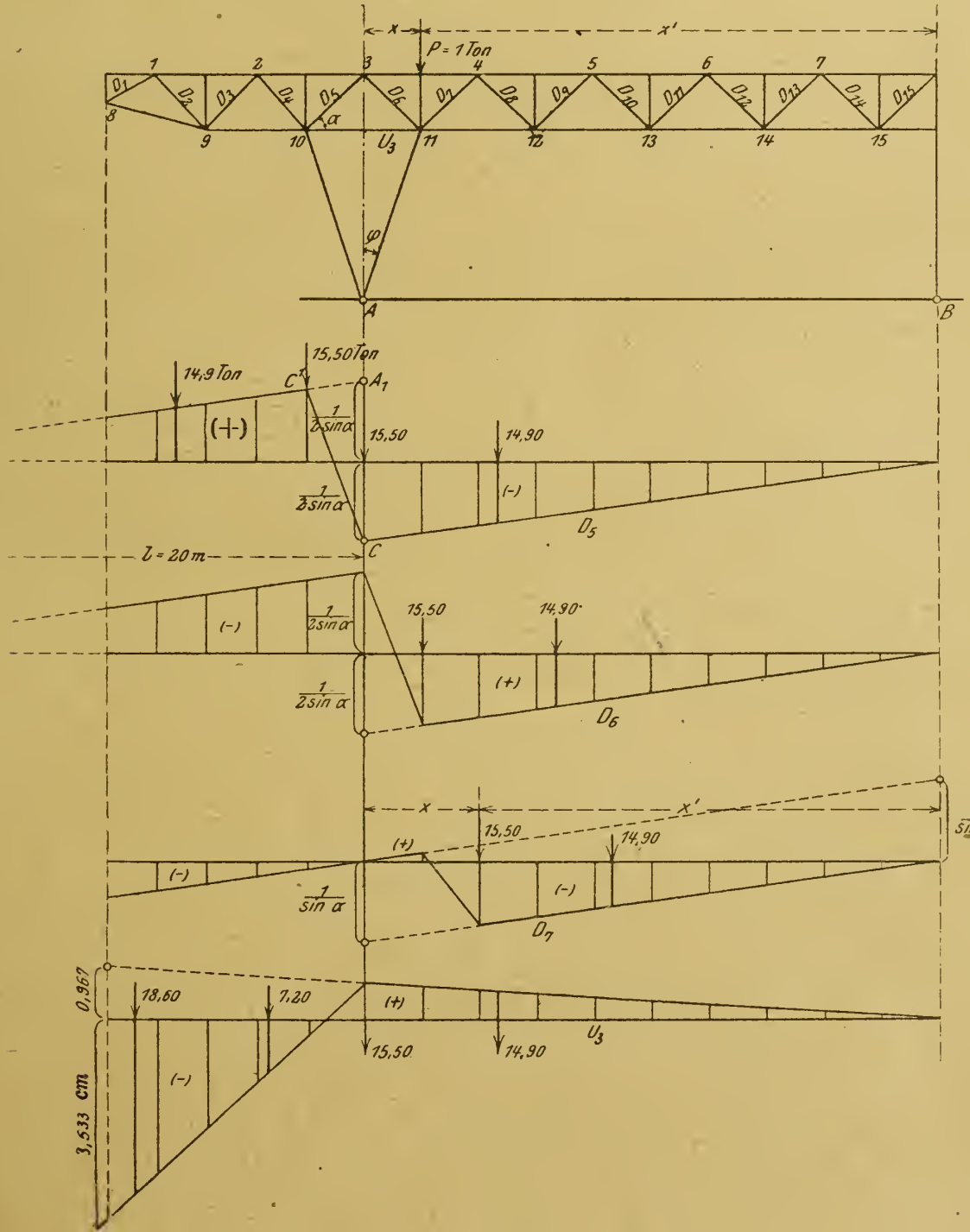


Fig. 36h.

Fig. 36i.

Fig. 36k.

Fig. 36l.

Fig. 36m.

Denkt man sich den Kragarm bis zu l verlängert und an seinem Ende o die Last $P = 1$ t angebracht, so führt dieser Zustand vollständige Spannungslosigkeit des Stabes herbei. Weiter wird erkannt, daß der Linienzug von o aus bis zur Auflagermitte A parallel zu dem bereits zwischen A und B gezeichneten laufen muß. Nach Verbindung der Ecken C und C' ist nunmehr die fertige Einflußlinie gefunden. Die Fläche unterhalb der Wagerechten liefert Druckspannungen, die Fläche oberhalb Zugspannungen.

Stab D_6.

Die Einflußlinie ist ähnlich der vorhergehenden, im weiteren unterschieden durch den Wechsel der Vorzeichen (Fig. 36 k).

Stab D_7.

Die in Knotenachse 4 wirkende Last $P = 1$ t erzeugt

$$D_7 = \frac{x'}{l \sin \alpha}$$

oder

$$D_7 : x' = \frac{1}{\sin \alpha} : l.$$

Durch Auftragung des Wertes

$$\frac{1}{\sin \alpha}$$

über A und B sind alsdann die Bestimmungspunkte der Einflußlinie gegeben (Fig. 36 l).

Ebenso einfach entwickeln sich die Einflußlinien aller übrigen Diagonalen.

Beispielsweise treten die Maximalspannkräfte der Stäbe D_5, D_6 und D_7 bei Auslegerstellung III des Drehkranes ein. Es ergeben sich:

$$\begin{aligned}
-D_5 &= -\{15{,}50 \cdot 0{,}7071 + 14{,}90 \cdot 0{,}54\} = -19{,}04 \text{ t} \\
+D_5 &= +\{15{,}50 \cdot 0{,}64 \quad + 14{,}90 \cdot 0{,}47\} = +16{,}94 \text{ t} \\
-D_6 &= -\{15{,}50 \cdot 0{,}7071 + 14{,}90 \cdot 0{,}54\} = -19{,}04 \text{ t} \\
+D_6 &= +\{15{,}50 \cdot 0{,}64 \quad + 14{,}90 \cdot 0{,}47\} = +16{,}94 \text{ t} \\
-D_7 &= -\{15{,}50 \cdot 1{,}12 \quad + 14{,}90 \cdot 0{,}78\} = -28{,}99 \text{ t}.
\end{aligned}$$

Die Spannungen aus Eigengewicht sind

$$D^g = F_0 \cdot g = F_0 \cdot 0{,}45.$$

Beispielsweise

$$D_7 = \{-8{,}85 \cdot 1{,}12 - 4{,}50 \cdot 0{,}62 + 1{,}12 \cdot 0{,}13\} \cdot 0{,}45 = -5{,}65 \text{ t}.$$

Aus den Momenten nicht gleich bestimmbar war die Inanspruchnahme des Untergurtstabes U_3. Wir ziehen zweckmäßig eine Einflußlinie zu Hilfe und stellen die Last $P = 1$ t in den Endpunkt des Kragarmes. Bezeichnet φ den halben Fußwinkel der Stütze und λ die Feldweite, dann ist die Spannung

$$U_3 = -1 \cdot \frac{l_1}{h} + \left\{ A' \frac{\lambda}{h} + A' \operatorname{tg} \varphi \right\}$$

$$U_3 = -\frac{l_1}{h} + \frac{l + l_1}{2 \cdot l} \left(\frac{\lambda}{h} + \operatorname{tg} \varphi \right)$$

$$U_3 = -\frac{9}{2} + \frac{29}{40} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{6} \right)$$

$$= -4{,}5 + 0{,}967.$$

Nach Beispiel der Fig. 36 m wird der positive Wert unter P nach oben aufgetragen, sodann von hier zum jenseitigen Auflager B eine Gerade gezogen. Es verbleibt unter der Last ein negativer Betrag von

$$-4{,}50 + 0{,}967 = -3{,}533.$$

Dieser wird gleichfalls daselbst aufgetragen; die geradlinige Verbindung dieses Punktes mit dem Schnittpunkt der positiven Geraden über A gibt den vollständigen Umriß der Einflußlinie.

Die größte Zugspannung aus dem Kran tritt bei Auslegerstellung III ein. Es ist

$$+ U_3 = \{15{,}50 \cdot 0{,}66 + 14{,}90 \cdot 0{,}50\} = 17{,}86 \text{ t},$$

während bei Auslegerstellung II und ausgefahrenem Kran die Maximaldruckspannung erzeugt wird. Diese beträgt

$$- U_3 = \{18{,}60 \cdot 3{,}06 + 7{,}20 \cdot 0{,}90\} = 63{,}48 \text{ t}.$$

Die Spannung aus Eigengewicht ergibt

$$U_3 = F_0 \cdot g = F_0 \cdot 0{,}45.$$

Ebenfalls zeichne man für die Diagonalen des Kragarmes Einflußlinien.

Stab D_1.

Die Last $P = 1$ t im Endpunkt des Kragarmes zerlegt sich nach U_1 und D_1. Es beträgt

$$+ D_1 = 1{,}24 \text{ t}.$$

Fig. 36 o zeigt die Konstruktion der Einflußlinie. D_1^{max} ergibt sich bei Auslegerstellung II.

$$+ D_1^{max} = 18{,}6 \cdot \eta = 18{,}6 \cdot 0{,}5 = 9{,}30 \text{ t.}$$

Stab D_2.

Die Last $P = 1$ t im Knoten 1 erzeugt

$$- D_2 = 1{,}28 \text{ t.}$$

Siehe Fig. 36 p. Die Richtung des einen Astes ist durch den Schnittpunkt o des verlängerten Obergurtes mit dem verlängerten Untergurt gegeben. D_2^{max} bei Auslegerstellung II.

$$- D_2^{max} = 18{,}60 \cdot \eta = 18{,}60 \cdot 1{,}28 = 23{,}80 \text{ t.}$$

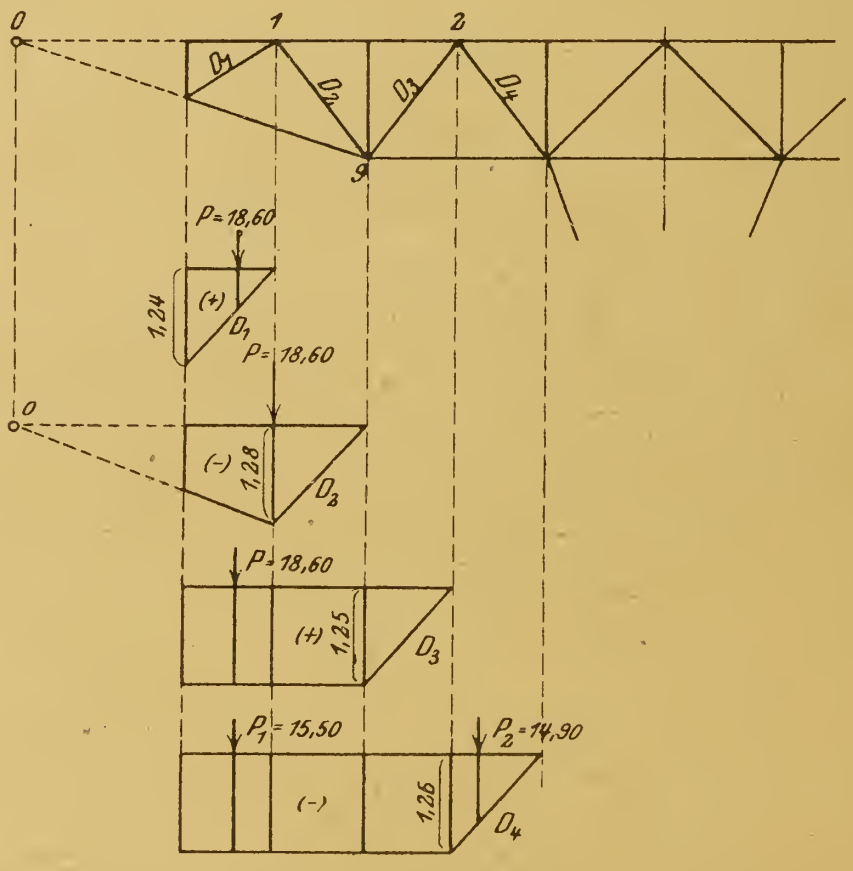


Fig. 36 n.

Fig. 36 o.

Fig. 36 p.

Fig. 36 q.

Fig. 36 r.

Ebenso einfach entwirft man die Einflußlinie der Stäbe D_3 und D_4. In den Figuren 36 q und 36 r sind die größten spannungserzeugenden Laststellungen angegeben.

d) Wind und Bremskraft in Längsrichtung der Brücke.

Wie eingangs bemerkt, soll mit einer Windkraft von 20 kg/m² bei voller Tätigkeit der Brücke gerechnet werden. Die Gesamtwindkraft für einen Hauptträger einschließlich der Windkraft gegen den Drehkran ergibt sich zu

$$W_l = 0{,}420 \text{ t.}$$

Zu gleicher Zeit kann der fahrende Drehkran plötzlich gebremst werden, und zwar ungünstigen Falles so stark, daß sämtliche Räder schleifen. Die dann zum Ausdruck kommende wagerechte Kraft am Schienenkopf beträgt

$$H_b = \frac{G}{2}\mu,$$

wo μ den Reibungskoeffizient (0,15) und G das Gewicht des Drehkrans einschließlich Last bedeuten.

$$H_b = \frac{37}{2} \cdot 0{,}15 = 2{,}78 \text{ t}.$$

Mithin wirken im ganzen

$$H_0 = W_l + H_b = 0{,}420 + 2{,}78 = 3{,}20 \text{ t}.$$

Bezüglich der Pufferkraft gilt das bereits früher Gesagte. Unter der Voraussetzung, daß die Massen des Drehkrans wie auch der Brücke vollkommen unelastisch sind, ließe sich die Stoßkraft bei Auffahren gegen den Puffer auf Grund der Federungsarbeit bestimmen. Es wäre dann

$$\frac{M}{2} v^2 = \frac{P}{2} \cdot f$$

oder die Stoßkraft

$$P = \frac{M \cdot v^2}{f},$$

wo f eine von der Elastizität der Federn abhängige Größe, M die Masse des Drehkranes und v seine Geschwindigkeit bedeuten. Allein

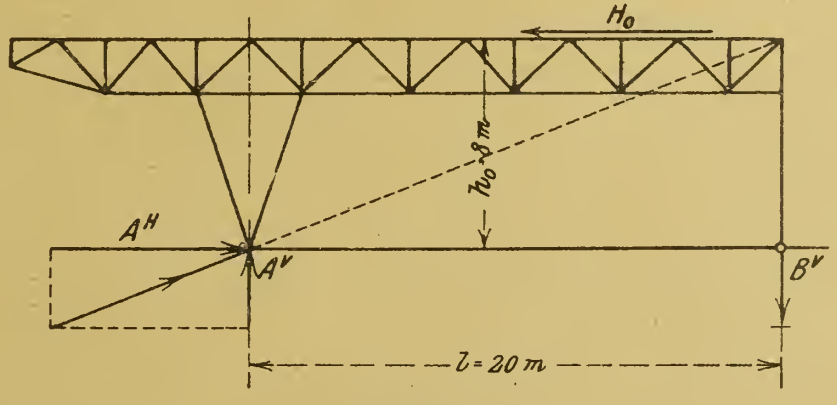


Fig. 36 s.

obige Voraussetzung der vollkommenen Starrheit der Massen ist nicht annähernd möglich, weshalb an Stelle der Pufferkraft die soeben ermittelte Bremskraft gesetzt werden soll.

Fig. 36 s zeigt die Brücke im Belastungszustand H_0 am Obergurt angreifend. Die elastische Stütze bei B vermag keinen Horizontal-

schub aufzunehmen, äußert vielmehr nur senkrechten Widerstand infolgedessen geht H_0 ganz in die Schrägstütze bei A.

Die Auflagerdrucke bei A und B sind

$$A_v = B_v = \frac{H_0 \cdot h_0}{l} = \frac{3{,}20 \cdot 8}{20} = 1{,}28 \text{ t},$$

außerdem wirken bei A wagerecht

$$A_H = H_0 = 3{,}20 \text{ t}.$$

Ein Cremonaplan liefert die Stabkräfte des Systems. Hierbei ist zu beachten, daß bei entgegengesetzt gerichtetem H_0 sämtliche Werte wechseln. Schließlich müssen die Kräfte den früher ermittelten Kräften aus Eigengewicht und Kranlast derart zugeschlagen werden, daß man die ungünstigsten Resultate erhält.

Schließlich erleidet der Obergurt noch erhebliche Inanspruchnahme durch Biegung infolge des Maximalraddruckes

$$R = 18{,}60 \text{ t}.$$

Es darf annäherungsweise gesetzt werden

$$M^R = \frac{R \cdot \lambda}{6}.$$

Die ungünstigste Zusammenwirkung des Momentes mit den Maximallängsspannungen bedarf einer überlegten Untersuchung, die hier zu verfolgen zu weit führen dürfte.

Die Beanspruchung des Materials ist

$$\sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{M}{W}.$$

Schließlich kann der Wind mit 20 kg/m² quer gegen die im Betriebe stehende Brücke stoßen. Bei vorliegenden Verhältnissen sind die dadurch hervorgerufenen Zusatzspannungen unerheblich. In Frage kommt nur noch, insbesondere für den Windträger oben, eine Windkraft von 200 kg/m² bei ruhender Anlage.

Es berechnen sich folgende Windflächen:

der unteren Brückenhälfte	15 m²
der oberen Brückenhälfte	25 m²
Summa	40 m²
des Drehkrans	26 m².

Die gleichmäßig verteilte vom Horizontalträger aufzunehmende Windkraft beträgt daher

$$W_q = 40 \cdot 200 = 8000 \text{ kg}.$$

Dann wirken wagerecht an jedem Radsatz des Drehkrans

$$W_r = \frac{26 \cdot 200}{2} = 2600 \text{ kg}.$$

Dieses Lastenpaar wandert über den Träger (die zugleich auftretenden Kippkräfte können vernachlässigt werden).

Die Spannungsermittelung des Windträgers, im weiteren der Einfluß der Belastung auf den Spannungszustand des Hauptträgers bietet nichts Neues.

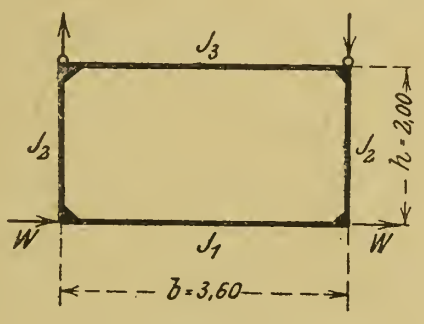


Fig. 36 t.

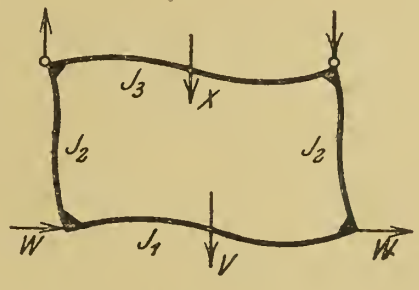


Fig. 36 u.

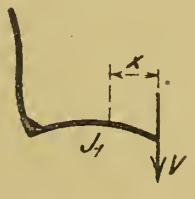


Fig. 36 v.

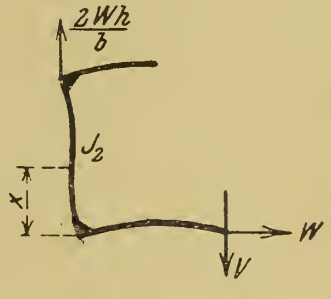


Fig. 36 w.

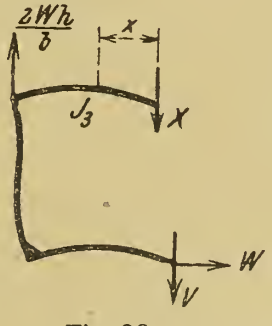


Fig. 36 x.

d) Der Querrahmen (Fig. 36 c und 36 t).

Aus dem auf dem Unterriegel verlagerten Fahrgetriebe möge sich, in Zusammenwirkung mit Wind, die wagerechte Kraft

$$W = 0{,}450 \text{ t}$$

ergeben haben.

Durch die Konstruktion sind bedingt

$$J_1 = 1911 \text{ cm}^4; \quad W_1 = 191 \text{ cm}^3$$
$$J_2 = 1850 \text{ cm}^4; \quad W_2 = 232 \text{ cm}^3$$
$$J_3 = 3900 \text{ cm}^4; \quad W_3 = 300 \text{ cm}^3.$$

Voraussetzung ist, daß die Ecken des Rahmens vollkommen steif ausgebildet werden.

Nach Maßgabe der Fig. 36 u erleidet der Rahmen eine elastische Verschiebung; es treten als unbekannte Größen die Kräfte V inmitten

des Unterriegels und X inmitten des Oberriegels auf. Zu ihrer Ermittelung benutzt man die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{JE}\int M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx = 0.$$

Unterriegel (Fig. 36 v).

$$M_x = V \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = x,$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{b}{2}} M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V}\, dx = \frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{b}{2}} V \cdot x^2\, dx = \frac{V \cdot b^3}{24 \cdot J_1 \cdot E} \qquad (I)$$

Pfosten (Fig. 36w).

$$M_x = W \cdot x - V \cdot \frac{b}{2}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = -\frac{b}{2},$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^{h} M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx = \frac{1}{J_2 E}\int_0^{h} \left\{ -W \cdot x \cdot \frac{b}{2} + V \cdot \frac{b^2}{4} \right\} dx$$

$$= -\frac{W \cdot b \cdot h^2}{4 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{V \cdot b^2 \cdot h}{4 \cdot J_2 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \qquad (II)$$

Sodann $\sum$ Vertikalkräfte $= 0$,

$$X + V - \frac{2 \cdot W \cdot h}{b} = 0,$$

$$X = \frac{2\,W\,h}{b} - V.$$

Oberriegel (Fig. 36x).

$$M_x = \frac{2 \cdot W \cdot h}{b} \cdot x - V \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = -x,$$

$$\frac{1}{J_3 E}\int_0^{\frac{b}{2}} \left\{ -\frac{2\,W \cdot h}{b} \cdot x^2 + V\,x^2 \right\} dx = -\frac{W\,b^2\,h}{12\,J_3\,E} + \frac{V\,b^3}{24\,J_3\,E} \qquad (III)$$

Es muß sein $\qquad I + II + III = 0.$

$$\frac{V\,b^3}{24\,J_1\,E} + \frac{V\,b^2\,h}{4\,J_2\,E} + \frac{V\,b^3}{24\,J_3\,E} - \frac{W\,b\,h^2}{4\,J_2\,E} - \frac{W\,b^2\,h}{12\,J_3\,E} = 0$$

oder

$$V = W\,\frac{h}{b} \cdot \frac{6\,\frac{h}{J_2} + 2\,\frac{b}{J_3}}{\frac{b}{J_1} + \frac{6\,h}{J_2} + \frac{b}{J_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (60)$$

Bei vorliegendem Fall berechnet sich

$$V = 0{,}450 \cdot \frac{2}{3{,}6} \frac{6 \cdot \frac{2}{1850} + 2 \cdot \frac{3{,}6}{3900}}{\frac{3{,}6}{1911} + \frac{6 \cdot 2}{1850} + \frac{3{,}6}{3900}} = 0{,}224 \text{ t}.$$

Die Inanspruchnahme des Unterriegels bei Vernachlässigung der geringen Längsspannung.

$$M^{max} = V \cdot \frac{b}{2} = 224 \cdot 180 = 40\,320 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{40\,320}{191} = 212 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Inanspruchnahme des Pfostens.

$$M^{max} = W \cdot h - V \cdot \frac{b}{2} = 450 \cdot 200 - 40\,320 = 49\,680 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Der Stab kann zugleich den vollen Raddruck des Drehkrans $R = 18{,}60$ t erhalten.

$$\sigma = \frac{R}{F} + \frac{M}{W} = \frac{18\,600}{48} + \frac{49\,680}{232} = 601 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Inanspruchnahme des Oberriegels.

$$M^{max} = X \cdot \frac{b}{2} = \left\{\frac{2\,W \cdot h}{b} - V\right\} \cdot \frac{b}{2} = \left\{\frac{2 \cdot 0{,}45 \cdot 2}{3{,}6} - 0{,}224\right\} 180$$

$$= 276 \cdot 180 = 49\,680 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{49\,680}{300} = 166 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 27. Werden die Böcke einer Verladebrücke statisch gut wirkend ausgebildet, so bieten sie konstruktiv ziemliche Schwierig-

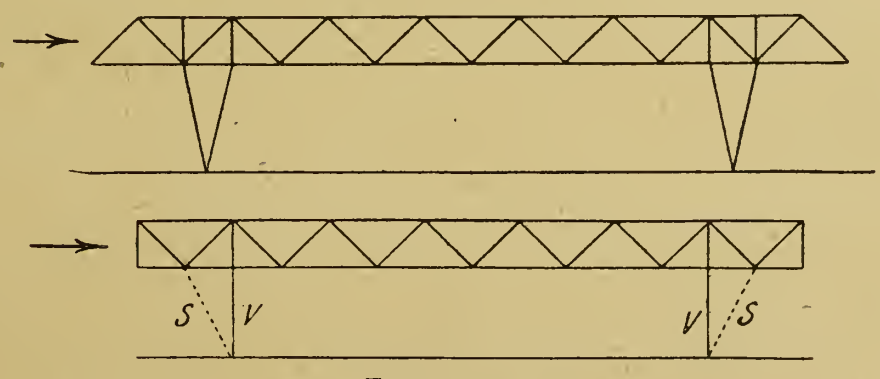


Fig. 37 — 37 a.

keiten. Die einfachste Lösung ist die in Fig. 37 gekennzeichnete, wo die senkrechte Stütze V ganz die Vertikallasten aufnimmt, während die Schrägen S dazu bestimmt sind, den in Längsrichtung der Brücke

wirksamen Kräften wie Wind, Bremskraft der rollenden Last usw. Widerstand entgegenzusetzen. Allein die Anordnung vermag der Anlage nur unvollkommene längsrichtige Steifigkeit zu geben, weil die Schrägen bei ruhiger Brücke spannungslos sind, daher erst, sobald wagerechte Schübe einsetzen, eine Verschiebung mitmachen müssen, ehe sie in Tätigkeit zu treten befähigt sind.

Die beste Einrichtung zeigt Fig. 37 a. Hier fällt die Vertikalstütze ganz fort, an ihre Stelle treten die Schrägen und übernehmen ganz die senkrechten Lasten. Gelingt es dann, die Stäbe unmittelbar in die Knoten des Trägernetzes zu führen, so bildet das ganze ein starres System, das einen ausgezeichneten Widerstand gegen Längsschübe bietet.

Wie bemerkt, stellen sich dann aber bei der konstruktiven Durchbildung des Bockes Unzuträglichkeiten ein, die nicht selten, je mehr die Formgebung auf Einfachheit daher Schönheit abzielt, den Unmut des Konstrukteurs erregen.

Dementgegen erscheint die Verwendung der vollwandigen Blechkonstruktion geeignet, die Schwierigkeit der Ausführung zu mildern, zumal dabei der Gefälligkeitssinn gut befriedigt wird.

Fig. 37 b, 37 c, und 37 d bieten einen speziellen Aufbau des Bockes. Wie ersichtlich, liegt der Windträger in der Obergurtebene der Brücke. Fig. 37 e zeigt den Grundquerschnitt der Brücke.

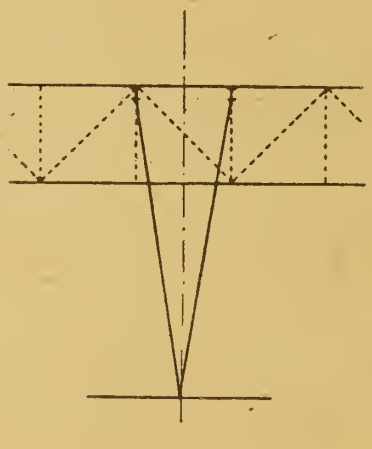


Fig. 37 b.

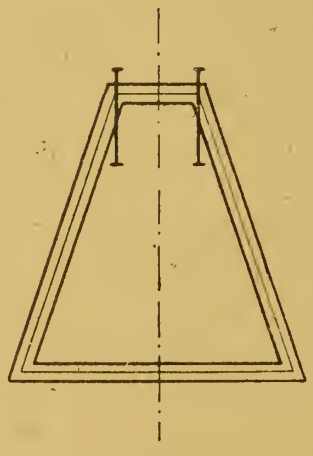


Fig. 37 c.

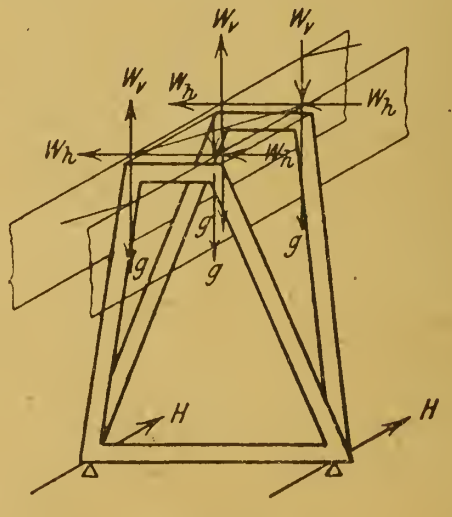


Fig. 37 d.

Der Wind quer zur Längsrichtung der Brücke wird demnach durch die Steifrahmen jedes Feldes (Fig. 37 e) in den oberen Windträger geleitet, bewirkt aber zugleich eine Verdrehung, die sich als vertikale. gleiche und entgegengesetzte Kräfte in dem Hauptträger äußert. Infolgedessen werden die Böcke an ihren Köpfen von dem

Gesamtwinddruck W_h horizontal und zugleich vertikal von dem Kräftepaar W_v angegriffen. Ihre senkrechte Belastung durch Eigengewicht und Nutzlast sei G.

Der Wind längsrichtig zur Brücke möge in Zusammenwirkung mit der Bremskraft der Katze einen Horizontalschub H am Fuße des Bockes erzeugen.

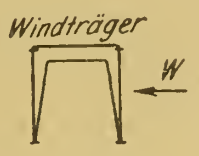


Fig. 37e.

Nach Maßgabe der Fig. 37d besteht der Bock aus zwei geschlossenen, schräg zusammengestellten Steifrahmen, deren jeder, bei Wind quer zur Längsrichtung der Brücke, für die in Fig. 37f, 37g und 37h angegebenen gleichzeitig wirksamen Kräfte zu untersuchen ist.

1. Die Lasten G, da sie einander gleich sind und in den Knoten des Rahmens hängen, erzeugen direkt durch Zerlegung bestimmbare Längskräfte in den Stäben

für den Oberriegel $-S_o^g$
für den Unterriegel $+S_u^g$
für die Schrägen $-S_s^g$.

2. Die Kräfte W_h bringen eine Verschiebung in den Rahmen. Die widerstehenden inneren Kräfte sind auf Grund der elastischen Vorgänge zu bestimmen. Die Formänderung ist in Fig. 37i angedeutet. Die statisch Unbestimmte ist eine vertikale Kraft V in der Mitte des Oberriegels bzw. X in der Mitte des Unterriegels. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$\frac{1}{JE}\int M_x \frac{\partial M_x}{\partial V}\,dx = 0.$$

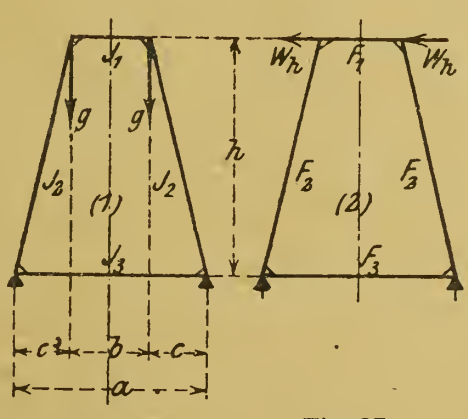


Fig. 37f.

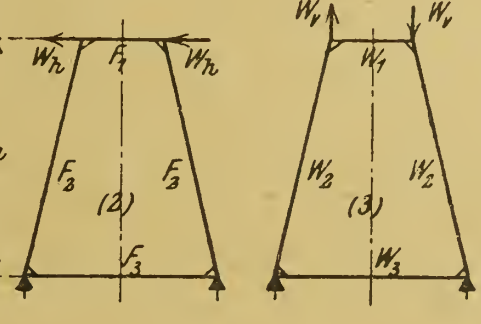


Fig. 37g.

Fig. 37h.

Oberriegel.

$$M_x = V \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = x$$

$$\frac{1}{J_1 E} \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} M_x \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx = \frac{1}{J_1 E} \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} V \cdot x^2\,dx = \frac{V \cdot b^3}{24\,J_1 E} \quad \text{(I)}$$

Schrägen.

$$M_x = W_h \cdot x - V\left(\frac{b}{2} + \frac{c \cdot x}{h}\right)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial V} = -\left(\frac{b}{2} + \frac{c \cdot x}{h}\right)$$

$$\frac{1}{J_2 E} \cdot \int_0^h \left\{W_h x - V\left(\frac{b}{2} + \frac{c \cdot x}{h}\right)\right\}\left(-\frac{b}{2} - \frac{c \cdot x}{h}\right) dx$$

$$= \frac{1}{J_2 E} \cdot \int_0^h \left\{-\frac{W_h \cdot b \cdot x}{2} + \frac{V b^2}{4} + \frac{V b c x}{2h}\right.$$

$$\left. - \frac{W_h \cdot c x^2}{h} + \frac{V b c x}{2h} + \frac{V \cdot c^2 x^2}{h^2}\right\} dx$$

$$= -\frac{W_h \cdot b h^2}{4 J_2 E} - \frac{W_h \cdot c h^2}{3 J_2 E} + \frac{V b^2 h}{4 J_2 E} + \frac{V b c h}{2 J_2 E} + \frac{V c^2 h}{3 J_2 E} \quad \text{(II)}$$

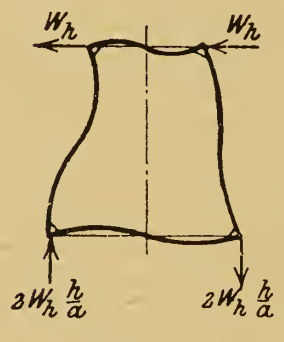


Fig. 37 i.

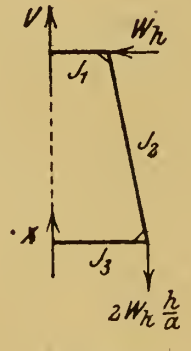


Fig. 37 k.

Unterriegel.

$$\sum \text{Vertikalkräfte} = 0$$

$$X + V - 2 W_h \cdot \frac{h}{a} = 0; \; X = 2 W_h \frac{h}{a} - V$$

$$M_x = 2 \cdot W_h \cdot \frac{h}{a} x - V \cdot x; \; \frac{\partial M_x}{\partial V} = -x$$

$$\frac{1}{J_3 E} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-2 \cdot W_h \cdot \frac{h x^2}{a} + V \cdot x^2\right) dx = -\frac{W_h \cdot h \cdot a^2}{12 J_3 E} + \frac{V \cdot a^3}{24 J_3 E} \quad \text{(III)}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$$

$$\frac{V \cdot b^3}{24 J_1 E} + \frac{V \cdot b^2 \cdot h}{4 J_2 E} + \frac{V \cdot b \cdot c \cdot h}{2 J_2 E} + \frac{V \cdot c^2 \cdot h}{3 J_2 E} + \frac{V \cdot a^3}{24 J_2 E}$$

$$- \frac{W_h \cdot b \cdot h^2}{4 J_2 E} - \frac{W_h \cdot c h^2}{3 J_2 E} - \frac{W_h \cdot h a^2}{12 J_3 E} = 0$$

$$V \left\{ \frac{b^3}{24 J_1} + \frac{b^2 \cdot h}{4 J_2} + \frac{b \cdot c \cdot h}{2 J_2} + \frac{c^2 \cdot h}{3 J_2} + \frac{a^3}{24 J_3} \right\}$$

$$= W_h \cdot h \left\{ \frac{b \cdot h}{4 J_2} + \frac{c \cdot h}{3 J_2} + \frac{a^2}{12 J_3} \right\}$$

$$V = W_h \cdot h \cdot \frac{\frac{6 \cdot b \cdot h}{J_2} + \frac{8 \cdot c \cdot h}{J_2} + \frac{2 \cdot a^2}{J_3}}{\frac{b^3}{J_1} + \frac{6 \cdot b^2 \cdot h}{J_2} + \frac{12 \cdot b \cdot c \cdot h}{J_2} + \frac{8 \cdot c^2 \cdot h}{J_2} + \frac{a^3}{J_3}} \quad (61)$$

Fig. 37 l gibt ein Bild der unter dieser Inanspruchnahme wirksamen Momente im Rahmen.

Oberriegel.

$$M^{\max} = V \cdot \frac{b}{2}.$$

Schräge.

$$M_x = V \left(\frac{b}{2} + \frac{c \cdot x}{h} \right) - W_h \cdot x.$$

$$M_0{}^{\max} = V \cdot \frac{b}{2}$$

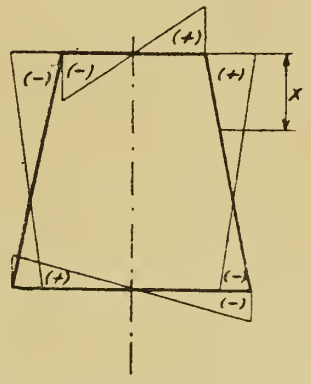


Fig. 371.

$$M_u{}^{\max} = - W_h \cdot h + V \cdot \frac{a}{2}$$

$$M_x = 0 \text{ bei } x = \frac{V \cdot h \cdot b}{2 (W_h \cdot h - V \cdot c)}.$$

Unterriegel.

$$M^{\max} = X \left(\frac{b}{2} + c \right) = X \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \left(2 W_h \cdot \frac{h}{a} - V \right) \frac{a}{2}$$

$$= W_h \cdot h - V \cdot \frac{a}{2}.$$

3. Wie bei (2) sind auch hier die inneren widerstehenden Kräfte auf Grund (Fig. 37 h) der elastischen Vorgänge zu ermitteln.

Die statisch Unbekannte ist ebenfalls eine vertikale Kraft V in der Mitte des Oberriegels, bzw. X in der Mitte des Unterriegels. Vergleiche Fig. 37 m und 37 n.

Analog der Entwicklung unter (2):

Oberriegel.

$$M_x = V \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = x$$

$$\frac{1}{J_1 E} \int_0^{\frac{b}{2}} M_x \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx = \frac{1}{J_1 E} \int_0^{\frac{b}{2}} V x^2 dx = \frac{V b^3}{24 J_1 E} \quad . \quad (I)$$

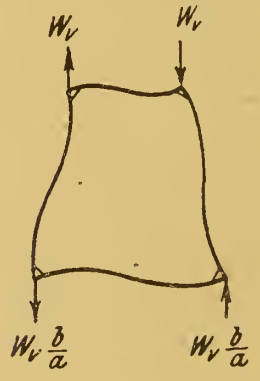


Fig. 37 m.

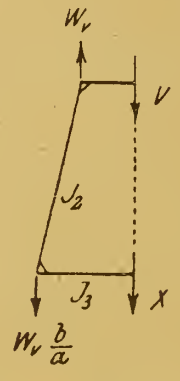


Fig. 37 n.

Schrägen.

$$M_x = V\left(\frac{b}{2} + \frac{c \cdot x}{h}\right) - W_v \cdot \frac{c \cdot x}{h}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial V} = \left(\frac{b}{2} + \frac{c\,x}{h}\right)$$

$$\frac{1}{J_2 E} \int_0^h \left\{ V\left(\frac{b}{2} + \frac{c\,x}{h}\right) - W_v \frac{c\,x}{h} \right\} \left(\frac{b}{2} + \frac{c\,x}{h}\right) dx$$

$$\frac{1}{J_2 E} \int_0^h \left\{ \frac{V b^2}{4} + \frac{V b c\,x}{2h} - \frac{W_v \cdot b c\,x}{2h} + \frac{V b c\,x}{2h} + \frac{V c^2 x^2}{h^2} - \frac{W_v c^2 x^2}{h^2} \right\} dx$$

$$\frac{V b^2 h}{4 J_2 E} + \frac{V b c h}{2 J_2 E} - \frac{W_v \cdot b c h}{4 J_2 E} + \frac{V c^2 h}{3 J_2 E} - \frac{W \cdot c^2 h}{3 J_2 E} \quad . \quad (II)$$

Unterriegel.

$$\sum \text{Vertikalkräfte} = 0.$$

$$X + V + W_v \cdot \frac{b}{a} - W_v = 0; \quad X = W_v\left(1 - \frac{b}{a}\right) - V$$

$$M_x = W_v\left(1 - \frac{b}{a}\right)x - V \cdot x; \qquad \frac{\partial M_x}{\partial V} = -x$$

$$\frac{1}{J_3 E}\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{-W_v\left(1 - \frac{b}{a}\right)x^2 + V x^2\right\} dx = -\frac{W_v (a-b)\, a^2}{24 J_3 E} \cdot$$

$$+ \frac{V \cdot a^3}{24 J_3 E} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} = 0$$

$$\frac{V b^3}{24 J_1 E} + \frac{V b^2 h}{4 J_2 E} + \frac{V b c h}{2 J_2 E} + \frac{V c^2 h}{3 J_2 E} + \frac{V a^3}{24 J_3 E} - \frac{W_v b c h}{4 J_2 E} - \frac{W_v c^2 h}{3 J_2 E}$$

$$- \frac{W_v (a-b)\, a^2}{24 J_3 E} = 0$$

$$V\left\{\frac{b^3}{24 J_1} + \frac{b^2 h}{4 J_2} + \frac{b c h}{2 J_2} + \frac{c^2 h}{3 J_2} + \frac{a^3}{24 J_3}\right\}$$

$$= W_v\left\{\frac{b c h}{4 J_2} + \frac{c^2 h}{3 J_2} + \frac{(a-b)\, a^2}{24 J_3}\right\}$$

$$V = W_v \cdot \frac{\dfrac{6 b c h}{J_2} + \dfrac{8 c^2 h}{J_2} + \dfrac{(a-b)\, a^2}{J_3}}{\dfrac{b^3}{J_1} + \dfrac{6 b^2 h}{J_2} + \dfrac{12 b c h}{J_2} + \dfrac{8 c^2 h}{J_2} + \dfrac{a^3}{J_3}} \qquad (62)$$

Fig. 37 o veranschaulicht die bei dieser Belastung auftretenden Momente.

Oberriegel.

$$M^{\max} = V\frac{b}{2}.$$

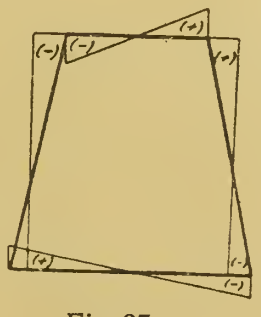


Fig. 37 o.

Schräge.

$$M_x = V\left(\frac{b}{2} + \frac{c\,x}{h}\right) - W_v \frac{c\,x}{h}$$

$$M_0^{\max} = V\frac{b}{2}$$

$$M_u^{\max} = -W_v \cdot c + V \cdot \frac{a}{2}$$

$$M_x = 0, \text{ wenn } x = \frac{V \cdot b h}{2 c (W_v - V)}.$$

Unterriegel.

$$M^{max} = X\left(\frac{b}{2}+c\right) = X\,\frac{a}{2}$$
$$= \left\{W_v\left(1-\frac{b}{a}\right)-V\right\}\frac{a}{2}$$
$$= W_v \cdot c - V\,\frac{a}{2}.$$

Bei Wind in Längsrichtung der Brücke in Zusammenwirkung mit der Bremskraft der Katze tritt, wie bereits gesagt, am Fuße des Bockes der Horizontalschub H auf. Dieser zerlegt sich, nach Maßgabe der Fig. 37 p, ohne weiteres in die Stabrichtungen.

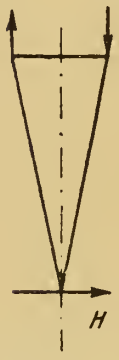


Fig. 37 p.

Die Spannungen in den Schrägen sind

$$\pm S_s^H.$$

Als größte Druckkraft ergibt sich somit

$$S_s^0 = S_s^g + S_s^H.$$

Zahlenbeispiel hierzu. Ein Bock mit den in Fig. 37 q gegebenen Verhältnissen und Kräften.

$J_1 = \sim 56\,160$ cm^4 $J_2 = \sim 56\,160$ cm^4 $J_3 = \sim 22\,300$ cm^4
$W_1 = \sim 1\,872$ cm^3 $W_2 = \sim 1\,872$ cm^3 $W_3 = \sim 932$ cm^3
$F_1 = \sim 109{,}2$ cm^2 $F_2 = \sim 109{,}2$ cm^2 $F_3 = \sim 74{,}6$ cm^2
$J_v = \sim 662$ cm^4.

(1) Längsspannungen aus Eigengewicht

Oberriegel	$S_0^g = -\ 2{,}600$ t
Unterriegel	$S_u^g = +\ 2{,}600$ t
Schräge	$S_s^g = -\ 12{,}400$ t

(2) Vertikalkraft aus dem Schube W_h.

$$V = 3 \cdot 1400\,\frac{\frac{6\cdot 400\cdot 1100}{56\,160}+\frac{8\cdot 300\cdot 1400}{56\,160}+\frac{2\cdot \overline{1000}^2}{23\,300}}{\frac{\overline{400}^3}{56\,160}+\frac{6\cdot \overline{400}^2\cdot 1400}{56\,160}+\frac{12\cdot 400\cdot 300\cdot 1400}{56\,160}+\frac{8\cdot \overline{300}^2\cdot 1400}{56\,160}+\frac{\overline{1000}^3}{23\,300}}$$

$$V = 4200 \cdot \frac{59{,}800+59{,}800+85{,}700}{1138+23\,950+35\,950+17\,950+42\,900}$$
$$= 4200 \cdot \frac{205{,}300}{121\,888} = 7{,}060\text{ t}.$$

Oberriegel.

$$M^{max} = 7{,}06 \cdot \frac{4}{2} = 14{,}120\text{ mt}.$$

Schrägen.

$$M_0^{max} = 7{,}06 \cdot \frac{4}{2} = 14{,}120 \text{ mt.}$$

$$M_u^{max} = 3 \cdot 14 - 7{,}6 \cdot \frac{10}{2} = 6{,}700 \text{ mt}$$

$$M = 0 \text{ bei } x = \frac{7{,}06 \cdot 14 \cdot 4}{2\,(3 \cdot 14 - 7{,}06 \cdot 3)} = 9{,}53 \text{ m.}$$

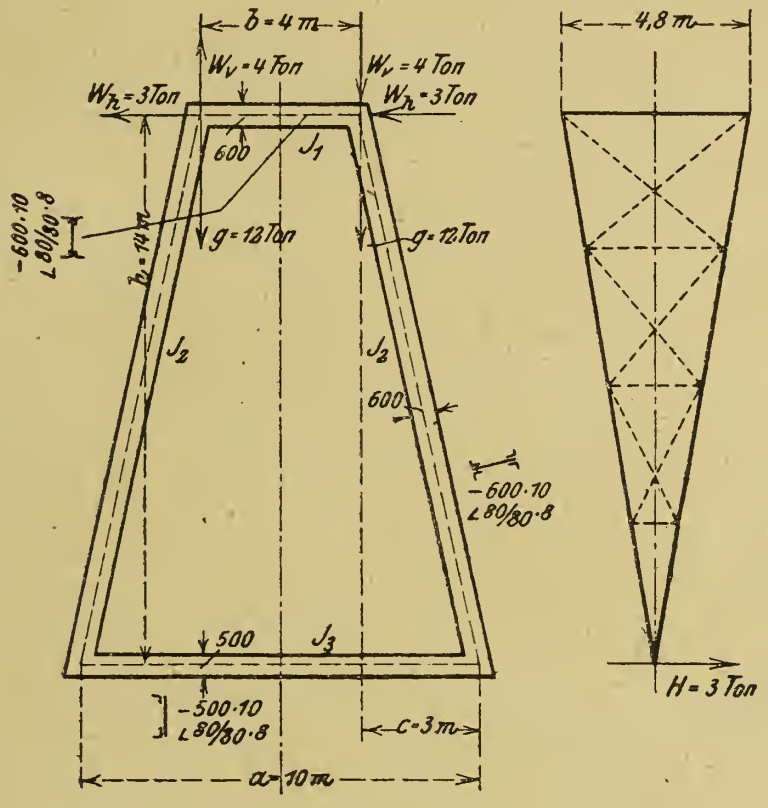


Fig. 37 q.

Unterriegel.

$$M^{max} = 6{,}700 \text{ mt.}$$

(3) Vertikalkraft V aus den Kräften W_v.

$$V = 4 \cdot \frac{\frac{6 \cdot 400 \cdot 300 \cdot 1400}{56\,160} + \frac{8 \cdot \overline{300}^2 \cdot 1400}{56\,160} + \frac{600 \cdot \overline{1000}^2}{23\,300}}{121\,888}$$

$$= 4 \cdot \frac{17\,950 + 17\,950 + 25\,700}{121\,888}$$

$$= 4 \cdot \frac{61\,600}{121\,888} = 2{,}020 \text{ t.}$$

Oberriegel.

$$M^{max} = 2{,}02 \cdot \frac{4}{2} = 4{,}040 \text{ mt.}$$

Schrägen.

$$M_0^{max} = 2{,}02 \cdot \frac{4}{2} = 4{,}040 \text{ mt}$$

$$M_u^{max} = 4 \cdot 3 - 2{,}02 \cdot \frac{10}{2} = 1{,}900 \text{ mt}$$

$$M = 0 \text{ bei } x = \frac{2{,}02 \cdot 4 \cdot 14}{2 \cdot 3\,(4 - 2{,}02)} = 9{,}53 \text{ m}.$$

Unterriegel.

$$M^{max} = 1{,}900 \text{ mt}.$$

Materialbeanspruchungen.

Oberriegel.

$$\sigma = \frac{\Sigma M^{max}}{W_1} + \frac{S_0^g}{F_1}$$

$$= \frac{1\,412\,000 + 404\,000}{1872} + \frac{2600}{109{,}2} = 994 \text{ kg/cm}^2.$$

Schrägen.

$$\sigma = \frac{\Sigma M^{max}}{W_2} + \frac{S_s^g}{F_2}$$

$$= \frac{1\,412\,000 + 404\,000}{1872} + \frac{12\,400}{109{,}2} = 1084 \text{ kg/cm}^2.$$

Unterriegel. Zu der Längskraft S_u^g tritt, wenn die Hemmung des Bockes am rechten Fußpunkt erfolgt, noch der Zug

$$W_h = 3 \text{ t}$$

$$\sigma = \frac{\Sigma M^{max}}{W_3} + \frac{S_u^g}{F_3} + \frac{W_h}{F_3}$$

$$= \frac{670\,000 + 190\,000}{932} + \frac{2600 + 3000}{74{,}6} = 999 \text{ kg/cm}^2.$$

Vorstehende Beanspruchungen erscheinen zulässig, wenn berücksichtigt wird, daß mit einer Windkraft von 200 kg pro m² senkrecht getroffener Fläche wirkend bei Maximalbelastung des Bockes gerechnet ist.

Der Schub $H = 3{,}00$ t in Längsrichtung der Brücke liefert die Komponenten in Richtung der Schrägen

$$\pm S_s^H = 9{,}10 \text{ t}.$$

Die größte Druckspannung der Schrägen ist daher

$$S_s^0 = -S_s^g - S_s^H = -12{,}400 - 9{,}10 = -21{,}500 \text{ t}.$$

Bei Eintreten dieser Kraft werden die Schrägen in der schwachen Achse $y - y$ auf Knicken untersucht; sie müssen untereinander verspannt werden.

Es muß dem Urteil des Gefühls überlassen bleiben, ob der Verband reichlich genug ist, zugleich den Rahmen bei der weiter oben berechneten Querinanspruchnahme (1), (2) und (3) gegen seitliche Ausweichung zu schützen.

Bei vorliegender Untersuchung sind Stoßkräfte infolge plötzlicher Hemmung der fahrenden Brücke sowie Schrägzug der Last nicht berücksichtigt; wenngleich solch ungünstige Momente wohl kaum mit den in Rechnung gebrachten Belastungen zusammentreffen, empfiehlt es sich doch, die Querschnitte etwas stärker zu wählen als ermittelt.

Zunächst geben die Verladebrücken hinsichtlich des Hauptsystems keinen Anlaß zu neuen statischen Erörterungen, indessen beanspruchen ihre vielfältigen Querschnittsanordnungen, sodann auch die Stützen das Interesse des Lesers. In der Folge sollen daher nach dieser Richtung einige Beispiele vorgeführt und, wo es nützlich erscheint, statisch behandelt werden.

Beispiel 28. Die beiden Hauptträger der Brücke sind schräg zusammengestellt, so daß ihre Untergurte eine gemeinsame Rippe bilden. Diese dient als Trag- und Fahrorgan einer Einschienenkatze.

Fig. 38.

Fig. 38a.

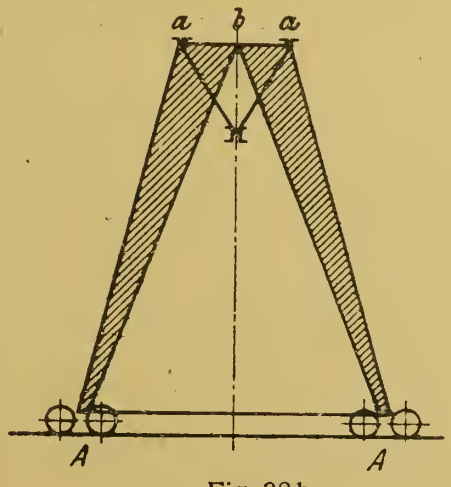


Fig. 38b.

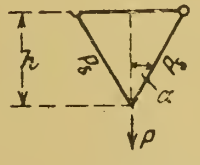


Fig. 38c.

Die wagerechte Brückenebene wird durch einen zwischen den Obergurten der Hauptträger gespannten Windträger versteift (Fig. 38 a).

Fig. 38 b läßt die Aufhängung der Brücke an den Stützenköpfen erkennen.

Bezeichnet α den halben Spitzwinkel im Brückenquerschnitt, Fig. 38 c, dann ist der Anteil, den jeder der schräg zusammengestellten Hauptträger an einer die Rippe in Anspruch nehmenden Kraft P hat

$$P_s = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

Man zeichne wie gewöhnlich die Maximalmomente aus dem Gesamteigengewicht der Konstruktion und den tatsächlichen Raddrucken der Einschienenkatze. Dann ergeben sich die Spannungen in der Rippe zu

$$S_u = \frac{M}{h},$$

während die Spannungen in den Stäben der Obergurte betragen

$$S_0 = \frac{M}{2 \cdot h}.$$

Ferner werden vermittelst der Querkräfte oder sonstwie die Spannungen des Hauptträgers für dieselben Belastungen ermittelt; die wirklichen Spannungen sind dann

$$S_s = \frac{S}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

Eine Kraft H, wagerecht gegen die Gurtrippe wirkend, zerlegt sich nach den beiden Schrägrichtungen und belastet jeden Hauptträger mit den Anteilen

$$H_s = \pm \frac{H}{2 \sin \alpha}.$$

Betrachtet man die Hauptträger einzeln unter den Angriffen dieser gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte, so erkennt man, daß der Untergurt des einen gezogen, der des andern mit gleichen Werten gedrückt wird. Hieraus folgt, daß die Rippe, weil in ihr die Untergurte beider Träger vereinigt sind, spannungslos ist.

Zur besseren Vorstellung dieses Zustandes lasse man den Winkel α bis 90° wachsen. Dann liegen die beiden Hauptträger in der Ebene, und der Kraftanteil

$$\pm \frac{H}{2 \sin \alpha}$$

jedes Trägers geht über in

$$\pm \frac{H}{2} \text{ (Fig. 38 d).}$$

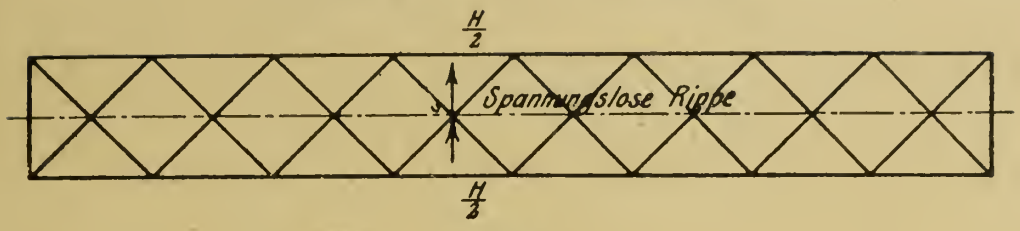


Fig. 38 d.

Vernachlässigt man den unbedeutenden Einfluß der steifen Ecken bei A, dann wird die Stütze angenähert zum statisch bestimmten Dreigelenkbogen (Fig. 38 b). Die senkrechten in a angreifenden Auflagerdrucke der Brücke gehen unmittelbar in die äußeren Umfassungsrippen $A - a$ des Rahmens, während alle Horizontal-

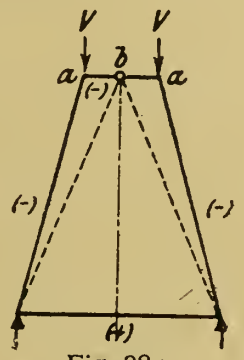


Fig. 38 e.

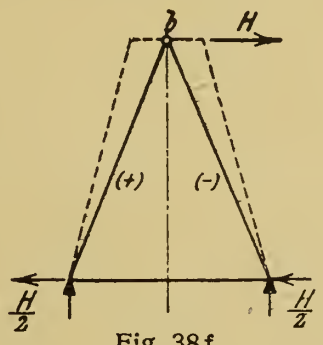


Fig. 38 f.

kräfte entstehend aus Wind, Seitenschwankung, Schrägzug der Last, im Gelenk b angreifen und nach Richtung der Innenrippe $A - b$ zerlegt werden (Fig. 38 e und 38 f).

Die Füllglieder sind spannungslos und bezwecken nur, die Rippen gegen Ausknicken zu schützen.

Beispiel 29. Eine Querschnittsanordnung nach Fig. 39.

Wie ersichtlich, läuft die Katze zwischen den Hauptträgern auf den Innenrippen der Untergurte. Die Kraft P aus dem Raddruck, da sie in der Entfernung c von der Trägerachse zum Angriff kommt, bewirkt eine Ausbiegung der Gurte bzw. des ganzen Querrahmens. Dementgegen wirken die Widerstände der Pfosten und des unteren Querriegels; es entstehen die Kräfte X am Fuße des Rahmens. Bei Vernachlässigung der steifen Ecken, ferner der Längenänderungen der Stäbe infolge Längskräfte ermitteln sich die Kräfte X wie folgt:

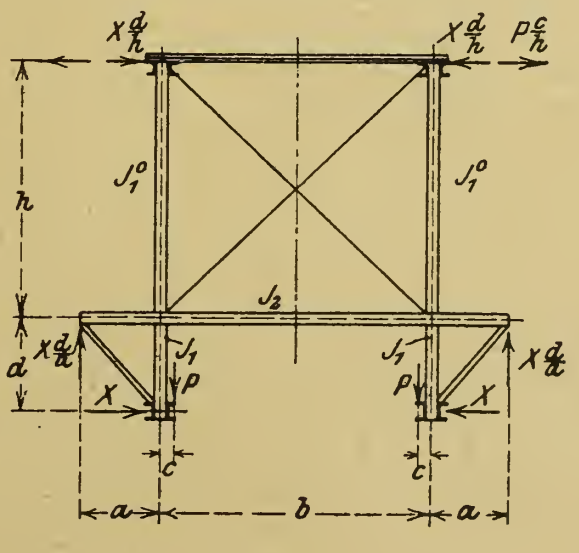


Fig. 39.

Es bezeichnen J_1^0 das Trägheitsmoment des oberen Pfostenteiles, J_1 das des unteren, J_2 das Trägheitsmoment des Querriegels.

Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{J E}\int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X}\, d x = 0.$$

Unterer Pfostenteil.

$$M_x = P\cdot c - X\cdot x;\quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -x$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^d M_x\cdot\frac{\partial M_x}{\partial X}\, d x = \frac{1}{J_1\cdot E}\int_0^d \{-P\cdot c\cdot x + X\cdot x^2\}\, d x$$

$$= \frac{X d^3}{3 J_1 E} - \frac{P c d^2}{2 J_1 E} \quad\ldots\ldots\quad (I)$$

Oberer Pfostenteil.

$$M_x = \frac{P\cdot c\cdot x}{h} - \frac{X\cdot d\cdot x}{h};\quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -\frac{d\cdot x}{h}$$

$$\frac{1}{J_1^0 E}\int_0^h \left\{\frac{X\cdot d^2}{h^2}\cdot x^2 - \frac{P\cdot c\cdot d}{h^2}\cdot x^2\right\} d x = \frac{X\cdot d^2\cdot h}{3 J_1^0\cdot E} - \frac{P\cdot c\cdot d\cdot h}{3 J_1^0\cdot E} \quad (II)$$

Querriegel Kragteil.

$$M_x = \frac{X d}{a}\cdot x;\quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{d}{a}\cdot x$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^a \frac{X\cdot d^2}{a^2}\cdot x^2\cdot d x = \frac{X\cdot a\cdot d^2}{3 J_2\cdot E} \quad\ldots\quad (III)$$

Querriegel Mittelteil.

$$M_x = \frac{X\cdot d}{a}(a+x) - \frac{X\cdot d}{a}x = X\cdot d;\quad \frac{\partial M_x}{d X} = d$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^{\frac{b}{2}} X d^2\, d x = \frac{X\cdot b\cdot d^2}{2\cdot J_2\cdot E} \quad\ldots\ldots\quad (IV)$$

$$I + II + III + IV = 0$$

$$\frac{X d^3}{3 J_1 E} + \frac{X d^2 h}{3 J_1^0 E} + \frac{X a d^2}{3 J_2 E} + \frac{X b d^2}{2 J_2 E} - \frac{P c d^2}{2 J_1 E} - \frac{P c d h}{3 J_1^0 E} = 0$$

$$X\left\{\frac{d}{3J_1}+\frac{h}{3J_1^0}+\frac{a}{3J_2}+\frac{b}{2J_2}\right\}=\frac{Pc}{2J_1}+\frac{Pch}{3dJ_1^0}$$

$$X=P\cdot c\,\frac{\frac{J_1^0}{2J_1}+\frac{h}{3d}}{\frac{dJ_1^0}{3J_1}+\frac{h}{3}+\frac{aJ_1^0}{3J_2}+\frac{bJ_1^0}{2J_2}}$$

$$=\frac{P\cdot c}{2\cdot d}\cdot\frac{3\cdot d\cdot\frac{J_1^0}{J_1}+2\cdot h}{d\cdot\frac{J_1^0}{J_1}+h+\frac{J_1^0}{J_2}\left(a+\frac{3\cdot b}{2}\right)}\quad\ldots\quad(63)$$

Wenn $J_1=0$, dann wird

$$X=\frac{Pc}{d}.$$

Wenn $J_1^0=J_1$, dann ist

$$X=\frac{P\cdot c}{2\cdot d}\cdot\frac{3\cdot d+2\cdot h}{d+h+\frac{J_1}{J_2}\left(a+\frac{3\cdot b}{2}\right)}\quad\ldots\quad(64)$$

Das den Pfosten angreifende Moment ist demnach

am Fuß $M=P\,c$,

im Knoten o $M=P\,c-X\,d$.

Das Moment des Querriegels

$$M=X\,d.$$

Der Anteil des Schrägstabes an X läßt sich leicht finden.

Horizontale Kräfte aus Wind, Schrägzug der Last usw. werden von dem großen Diagonalkreuz aufgenommen.

Beispiel 30. Eine Querschnittsanordnung nach Fig. 40.

Die Brücke besteht aus zwei senkrechten Fachwerkwänden und ist wagerecht durch zwei zwischen den Ober- und Untergurten liegende Horizontalträger versteift. Die Anordnung ist sehr widerstandsfähig gegen seitliche Kräfte und Schwankungen, bedingt aber eine besondere unten aufgehängte Fahrbahn für die Katze. Die hierzu gewählte Querkonstruktion befindet sich an jeder Vertikalen des Hauptträgers, so daß die Fahrbahnträger nicht zu weit freitragen.

Als statisch ungünstiges Glied ist der untere Querriegel ins Auge zu fassen, sofern nämlich, als wir eine Verschiebung des Brückenquerschnittes nachweisen können.

Wind quer zur Brücke, wenn vorausgesetzt wird, daß er mit gleich großen Kräften W gegen die Gurte stößt, drückt die Brücke gleichmäßig zur Seite, bewirkt mithin keine Verdrehung. Ebenfalls nicht die senkrechten Lasten $P = P$. Anders aber wirkt eine durch Schrägzug der Last oder Schwankung der Last entstehende Horizontalkraft H am Fuße der Fahrbahn. Dann weicht (infolge der

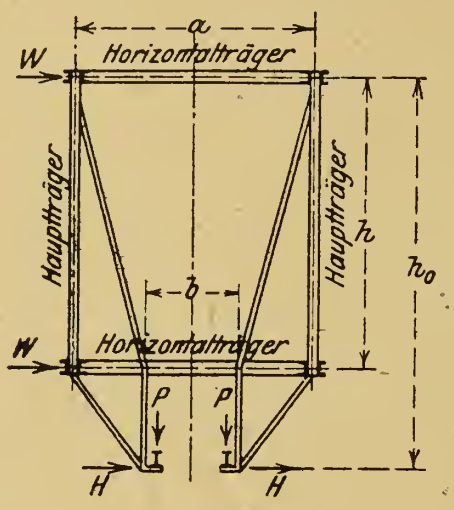


Fig. 40.

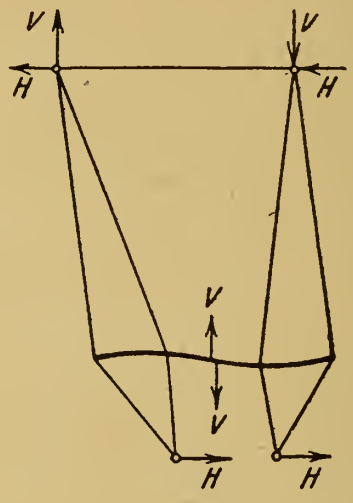


Fig. 40a.

Elastizität der Windträger) die Untergurtebene nach rechts, die Obergurtebene nach links aus, womit die wagerechte Verschiebung eingetreten ist. Dieser entgegen kann nur der Biegungswiderstand des Querriegels wirken. Die genaue Ermittelung der Biegungsmomente des Stabes ist wegen der Horizontalträger, die trotz ihrer Nachgiebigkeit der Verschiebung entgegentreten, nicht möglich.

Ein brauchbarer, allerdings zu ungünstiger Wert ergibt sich, wenn angenommen wird, daß die Horizontalträger widerstandslos sind. Dann tritt die in Fig. 40 a angedeutete Verschiebung des Querschnittes ein.

Die von den Hauptträgern aufgenommenen Vertikalreaktionen sind

$$V = 2 \cdot H \cdot \frac{h_0}{a}.$$

Diese Kraft wirkt zugleich als Querkraft auf das Mittelstück b des Querriegels, erzeugt daher für diesen ein Maximalmoment

$$M = V \frac{b}{2} = H \cdot \frac{h_0}{a} \cdot b.$$

Die Kraftanteile der übrigen reinen Systemstäbe sind einfach durch graphische Zerlegung zu suchen.

Wird die Katze derart ausgebildet, daß ihre Räder die Fahrbahnen umklammern, so können diese zu einer einzigen vereinigt werden, und man erhält die in Fig. 40 b abgebildete Querschnittanordnung. Hier fällt die Biegungsbeanspruchung des unteren Querriegels ganz fort; die Anordnung besteht aus reinen Systemstäben.

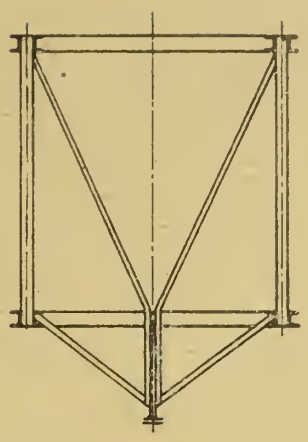


Fig. 40 b.

Beispiel 31. Eine Querschnittsanordnung nach Fig. 41. Zwischen den Hauptträgern auf deren Gurten laufende Katze.

Das Maximalmoment des senkrechten Pfostens ist

$$M = P \cdot c.$$

Der Rahmen erscheint sehr nachgiebig, d. h. die Fahrbahn wird infolge der Raddrucke auseinanderweichen, weshalb es von Interesse ist, die Erweiterung von a festzustellen. Bei Vernachlässigung aller Formänderung durch Längskräfte, ferner bei der Annahme, daß die

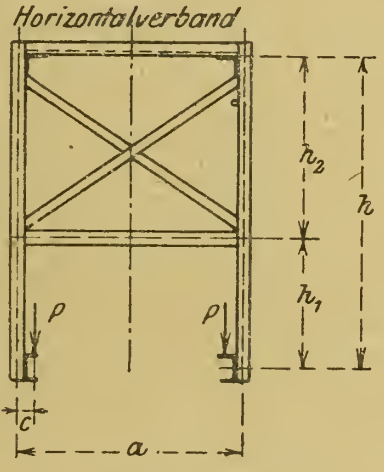


Fig. 41.

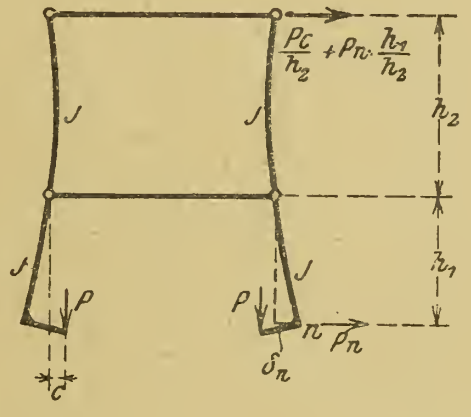


Fig. 41 a.

Querriegel gelenkig mit den Pfosten verbunden sind, gelangt man auf folgende Weise zu einem (etwas reichlichen) Wert für die Ausweichung (Fig. 41 a).

Man denke im Fußpunkt n eine Kraft P_n in Richtung der Verschiebung angreifend.

Bedingungsgleichung

$$\delta_n = \frac{1}{JE} \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial P_n} dx.$$

Unterteil des Pfostens.

$$M_x = P \cdot c + P_n \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial P_n} = x$$

$$\frac{1}{JE}\int_0^h \{P \cdot c \cdot x + P_n \cdot x^2\}\, dx = \frac{P \cdot c \cdot h_1^2}{2\,JE} + \frac{P_n h_1^3}{3\,JE} \quad . \qquad (I)$$

Oberteil des Pfostens.

$$M_x = \frac{P \cdot c}{h_2} \cdot x + \frac{P_n \cdot h_1}{h^2} \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial P_n} = \frac{h_1}{h_2} \cdot x$$

$$\frac{1}{JE}\int_0^{h_2} \left\{\frac{P \cdot c \cdot h_1}{h_2^2} \cdot x^2 + \frac{P_n h_1^2}{h_2^2} \cdot x^2\right\} dx = \frac{P c h_1 h_2}{3\,JE} + \frac{P_n h_1^2 h_2}{3\,JE} \qquad (II)$$

$$\delta_n = I + II.$$

Wegen $P_n = 0$ folgt

$$\delta_n = \frac{P \cdot c \cdot h_1^2}{2 \cdot J \cdot E} + \frac{P \cdot c \cdot h_1 \cdot h_2}{3 \cdot J \cdot E} = \frac{P \cdot c \cdot h_1}{JE}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{3}\right) \qquad (65)$$

Durch Fortlassen des Kreuzes und des unteren Querriegels ergibt sich eine für kleinere Verhältnisse geeignete Querschnittanordnung.

Beispiel 32 (Fig. 42).

Die Ausweichung des Untergurtes beträgt, wenn die Ecken oben steif ausgebildet werden und wenn J_1 das Trägheitsmoment des Pfostens und J_2 das des Querriegels bedeuten

$$\delta_n = \frac{P \cdot c \cdot h}{2 \cdot E}\left(\frac{h}{J_1} + \frac{a}{J_2}\right) = \frac{P \cdot c \cdot h}{2\,J_1 \cdot E}\left(h + a\,\frac{J_1}{J_2}\right) \quad . \qquad (66)$$

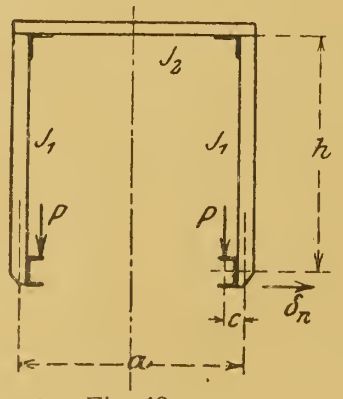


Fig. 42.

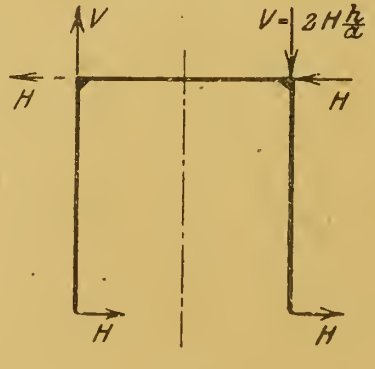


Fig. 42a.

Das Moment für den Pfosten wie auch für den Riegel ist

$$M = P \cdot c.$$

Wird der Rahmen nach Fig. 42 a am Fuße von den Kräften H angegriffen, dann ist das Moment des Pfostens ebenfalls des Riegels

$$M = H \cdot h.$$

In der Mitte des Riegels ist

$$M = 0.$$

Eine Erweiterung des Rahmens tritt nicht ein; die Fußpunkte weichen beide um dasselbe Maß aus.

Beispiel 33. Eine Querschnittsanordnung nach Fig. 43.

Es ist der durch den gelenkig eingefügten Schrägstab verursachte wagerechte Schub X am Fuße der Fahrbahn zu ermitteln.

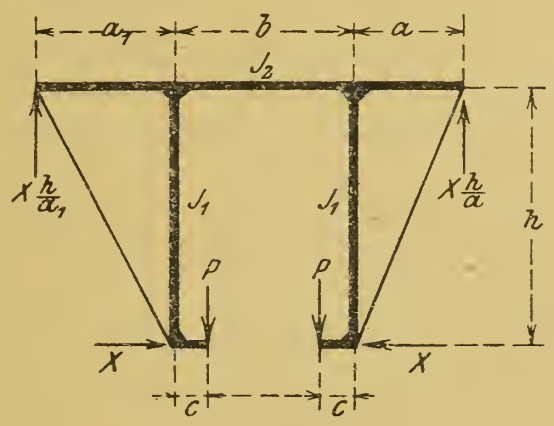


Fig. 43.

Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{JE}\int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = 0.$$

Pfosten rechts.

$$M_x = X \cdot x - Pc; \quad \frac{dM_x}{dX} = x$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^h \left\{X \cdot x^2 - Pcx\right\} dx = \frac{X h^3}{3 J_1 E} - \frac{Pc h^2}{2 J_1 E} \quad \ldots \quad (I)$$

Kragteil des Riegels rechts.

$$M_x = X \cdot \frac{h}{a} \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{h}{a} \cdot x$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^a X \frac{h^2}{a^2} x^2 dx = \frac{X a h^2}{3 J_2 E} \quad \ldots \quad (II)$$

$$I + II = 0$$

$$\frac{X h^3}{3 J_1 E} + \frac{X a h^2}{3 J_2 E} - \frac{P \cdot c \cdot h^2}{2 \cdot J_1 E} = 0.$$

Hieraus

$$X = \frac{3 Pc}{2 h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{a}{h}} \quad \ldots \quad (67)$$

und für die linke Seite

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot c}{2 \cdot h} \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{a_1}{h}} \quad \ldots \quad (67\,a)$$

Das Moment des mittleren Riegelteils ist

$$M = P \cdot c,$$

das Moment des Kragteiles

$$M = X \cdot h$$

und schließlich das Moment des Pfostens

$$M = P \cdot c \text{ bzw. } M = P \cdot c - X \cdot h.$$

Beispiel 34. Eine Querschnittsanordnung nach Fig. 44.

Die Fahrbahn der Katze hängt besonders an einem zwischen den Hauptträgern gespannten Hängewerk; dieses wirkt zugleich als Querversteifung der Brücke und führt alle horizontalen Kräfte in den oben liegenden Windträger. Als Tragorgan der Katzenraddrucke kommt der in Fig. 44 a herausgeschälte Gitterträger in Betracht. Die angreifenden Kräfte sind

$$P_0 = \frac{P(c+d)}{d}.$$

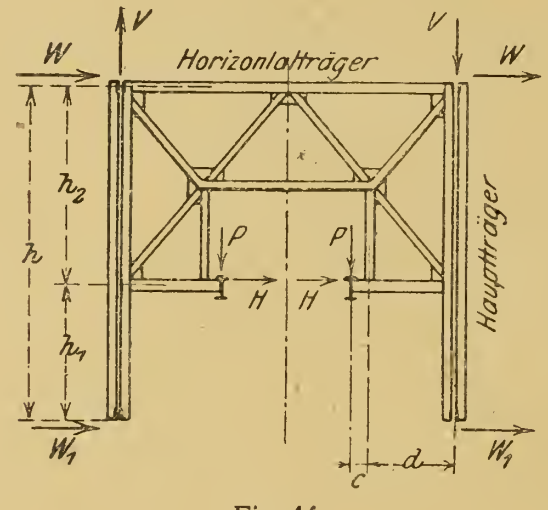


Fig. 44.

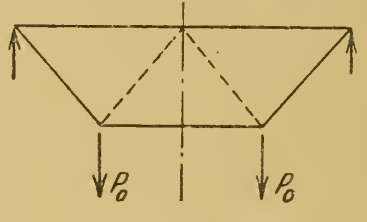


Fig. 44a.

Über die statische Wirkung der Windkräfte, ferner der Kräfte H am Fuße der Fahrbahn tritt nichts Neues in die Erscheinung.

Beispiel 35. Die zu dieser Brücke gehörende Bockkonstruktion (Fig. 45).

Eine allzu peinliche Untersuchung des Bockes ist eine Studierarbeit, die praktisch wenig Wert hat, da die Voraussetzungen der Rechnung sich oft beträchtlich weit von der Wirklichkeit entfernen; man denke an eine plötzliche Hemmung der fahrenden Brücke, wobei große Massenkräfte in Aktion treten, deren Wirkung unnachweisbar ist.

Eine gute Unterlage für einen praktischen Rechnungsgang ist die Ausbildung der Stütze als Dreigelenkfachwerk, in der Weise wie Figur zeigt. Sind Q die maximalen senkrechten Lasten aus Eigengewicht und Katze, dann ergeben sich die Widerlagerdrucke an den Füßen zu

$$A_v = A_v' = Q$$

und

$$A_H = A_H' = \frac{Q}{2h}(b - e),$$

letztere aus

$$\frac{Q \cdot b}{2} - \frac{Q \cdot e}{2} = A_H \cdot h.$$

Bei $Q = 5000$ kg z. B. folgt

$$A_H = \frac{5000}{2 \cdot 7{,}5}(6{,}80 - 1{,}36) = 1{,}82 \text{ t}.$$

Ein Cremonaplan (Fig. 45 a) liefert die Spannungen des Fachwerks.

Sodann möge sich am Kopfe der Stütze eine Horizontalkraft W aus Wind und Schrägzug der Last, bzw. aus Wind allein (bei einem Druck von 250 kg pro m²), ergeben haben. Hierfür berechnen sich die Auflagergrößen zu

$$A_v = A_v = \frac{Wh}{b}$$

und

$$A_H = A_H = \frac{W}{2}.$$

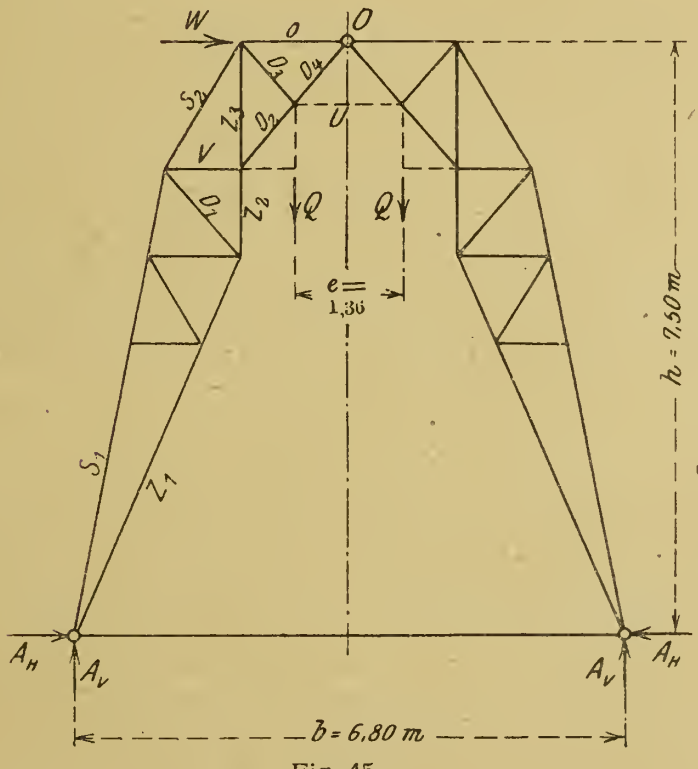


Fig. 45.

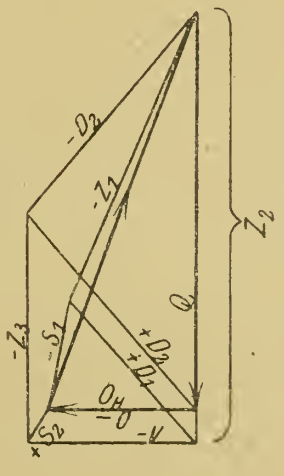


Fig. 45 a.

Die entsprechenden Stabspannungen sind ebenfalls vermittelst eines Cremonaplanes aufzusuchen.

Man ermittle sodann die aus beiden zusammenwirkenden Belastungen resultierenden ungünstigsten Spannungswerte der Glieder.

Werden die Materialbeanspruchungen niedrig gehalten, etwa $^2/_3$ der der Brückenteile, so dürfen alle Gelenke beseitigt werden, und zwar oben durch Einführung des punktierten wagerechten Stabes und unten durch Ausbau steifer Ecken.

Übrigens wird diese Konstruktionsänderung im allgemeinen eine günstige Rückwirkung auf die Spannungsverhältnisse haben. Allein es ist nicht ausgeschlossen, daß gewisse Füllglieder leiden oder sogar ihren Spannungssinn wechseln. Dieserhalb werden letztere an sich leichten Stäbe von vornherein reichlich dimensioniert.

Trotz des geringen Wertes, nur der Übung dienend, soll der wahre Einfluß des wagerechten Stabes auf die Spannungszahlen des Fachwerks verfolgt werden. Wir lassen dabei die zweite statische Unbestimmtheit, entstehend durch die steifen Fußpunkte (in Rücksicht auf den geringen Biegungswiderstand des langen Zugbandes) fallen.

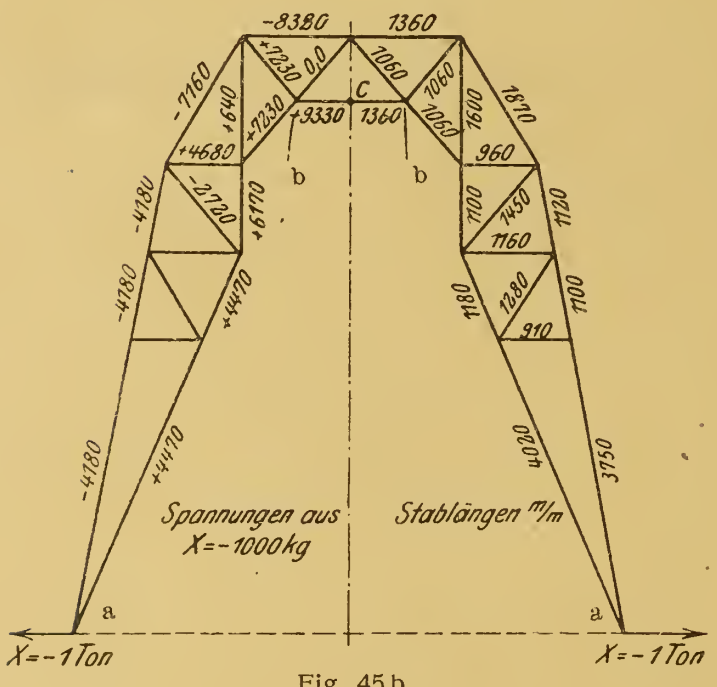


Fig. 45 b.

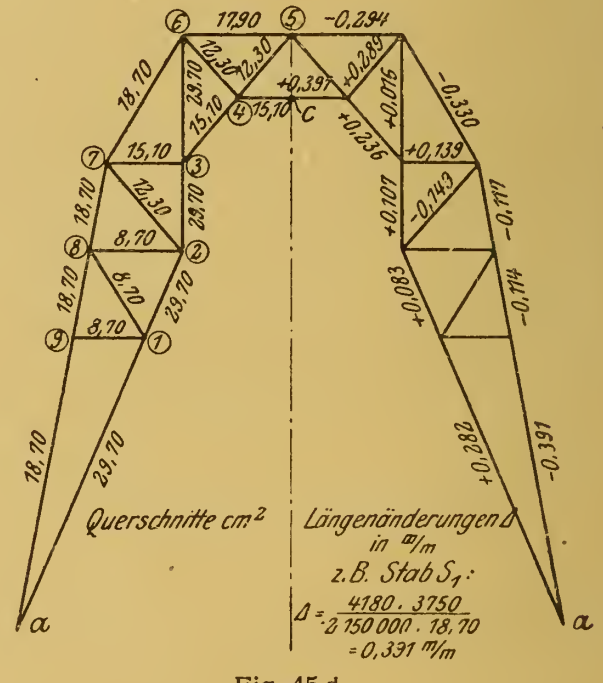


Fig. 45 d.

Das Grundsystem des Bockes ist somit jetzt ein Zweigelenkfachwerk mit wagerechter Zugstange (Fig. 45 b). Man beseitige die Zugstange und bringe an ihre Stelle die Kraft $X = -1$ t an. In Plan Fig. 45 c sind die unter dieser Belastung entstehenden Stabkräfte entwickelt. Sodann berechne man die dabei eintretenden Längenänderungen der Glieder

$$\Delta = \frac{S \cdot s}{E F} = \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{kg/cm}^2 \cdot \text{cm}^2} = \text{mm},$$

wobei die vorher gewonnenen Querschnitte des Dreigelenkfachwerks einzusetzen sind. Hierauf wird ein Williotscher Verschiebungsplan

gezeichnet, und zwar so, indem man den Stab $b - b$ wagerecht festhält und seine Mitte c als Ausgangspunkt der Verschiebungen betrachtet (Fig. 45 e).

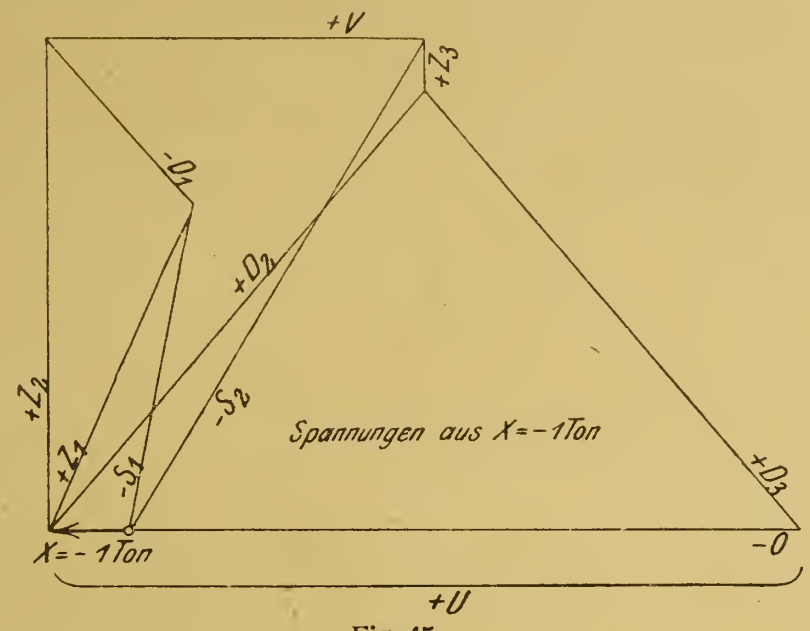


Fig. 45 c.

Wir finden in Richtung der Kraft X eine Ausweichung des Punktes a links gegen den Punkt a rechts von δ_{aa}.

Ferner hat sich der Knoten b um das Stück

$$\delta_{ba}$$

in Richtung der Last Q verschoben.

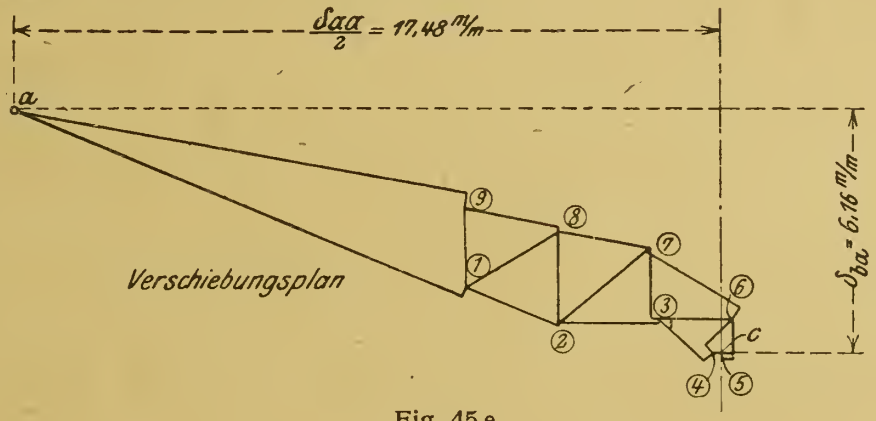


Fig. 45 e.

Bringen wir Q in b an und soll der Fußpunkt a wieder in seine ursprüngliche Lage gebracht werden, so muß daselbst eine Kraft

$$X = Q \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}$$

wirksam sein. Mithin beträgt der Horizontalschub bei zwei gleichen Lasten Q

$$X = 2Q \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}.$$

Dieses ist die Zugkraft in dem zwischen den Füßen eingebauten Balken. Zu beachten ist, daß die verschwindend geringe Längenänderung dieses großquerschnittigen Stabes vernachlässigt wurde.

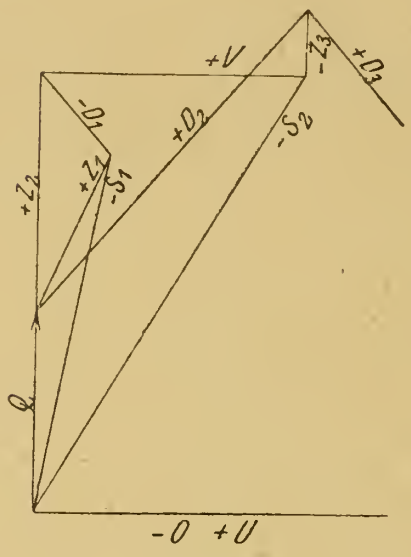


Fig. 45 f.

Die Widerlagerdrucke des Bockes sind somit

$$A_v = A^1{}_v = Q$$

und

$$A_H = A^1{}_H = 2\,Q \cdot \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}.$$

Bei $Q = 5000$ kg folgt

$$A_H = 2 \cdot 5000 \cdot \frac{6{,}16}{34{,}96} = 1{,}760 \text{ t}.$$

Ein Cremonaplan liefert die Stabkräfte.

Die Horizontalkraft W am Kopf der Stütze wird nur unmerklich von der statischen Unbestimmtheit des Systems berührt; es darf angenommen werden, daß sie sich wagerecht zur Hälfte auf jeden Fußpunkt überträgt. Die Vertikalreaktionen sind wie gewöhnlich

$$A_v = A_v{}^1 = W \cdot \frac{h}{b}.$$

Damit zerfällt das Gerüst für den Angriff von W in das zuerst behandelte Dreigelenkfachwerk und sind die dort ermittelten Spannungen maßgebend.

Schließlich läßt sich der Horizontalschub aus den Lasten Q noch mit Hilfe der Beziehung

$$X = \frac{\sum \frac{S^1 \cdot S_0 \cdot s}{F}}{\sum \frac{S^{1\,2} \cdot s}{F}}$$

ermitteln. Dabei bedeuten

S^1 die Stabspannungen aus der Belastung $X = -1$ t,

S_0 die Stabspannungen aus den Lasten Q bei $X = 0$ (Fig. 45 f),

s die Stablängen,

F der jedesmal zugehörige Querschnitt.

Der besseren Übersicht wegen trage man nach Beispiel alle Werte tabellarisch zusammen. Angenommen $Q = 5000$ kg.

Stab	s Stablänge m	F Querschnitt cm²	S_0 Spannung t	S^1 Spannung t	$\frac{S^1 S_0 s}{F}$	$\frac{S^{1\,2} s}{F}$
S_1	5,970	18,70	— 9,200	— 4,180	12,30	+ 5,58
S_2	1,870	18,70	— 12,840	— 7,160	9,22	+ 5,13
O	1,360	17,90	— 17,140	— 8,320	10,84	+ 5,28
Z_1	5,200	29,70	+ 4,360	+ 4,470	3,41	+ 3,50
Z_2	1,100	29,70	+ 6,080	+ 6,170	1,39	+ 1,41
Z_3	1,600	29,70	— 1,700	+ 0,640	0,59	— 0,02
D_1	1,450	12,30	— 2,700	— 2,720	0,87	+ 0,87
D_2	1,060	15,10	+ 10,100	+ 7,230	5,12	+ 3,67
D_3	1,060	12,30	+ 16,540	+ 7,230	10,30	+ 4,51
D_4	1,060	12,30	—	—	—	—
V	0,960	15,10	+ 6,740	+ 4,680	2,01	+ 1,39
U	0,680	15,10	+ 17,140	+ 9,330	7,20	+ 3,93
					63,25	35,25

$$X = 1 \cdot \frac{63{,}25}{35{,}25} = 1{,}79 \text{ t}.$$

Die Stabspannungen ergeben sich zu

$$S = S_0 - S^1 \cdot X.$$

Beispielsweise für den Stab O:

$$0 = -17{,}14 + 8{,}32 \cdot 1{,}79 = -2{,}28 \text{ t}.$$

Beispiel 43. Ein feststehendes Portal, Blechrahmen, mit gelenkig verlagerten Füßen (Fig. 46).

Die in den Ecken oben angreifenden Kräfte sind verschieden groß: P_1 und P_2.

Der Horizontalschub an den Füßen ist

$$H = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \frac{c}{h}.$$

Der Beweis hierfür wie folgt:

Die Auflagerdrucke betragen

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} \cdot \frac{b}{a}$$

$$B = \frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{P_1 - P_2}{2} \cdot \frac{b}{a}.$$

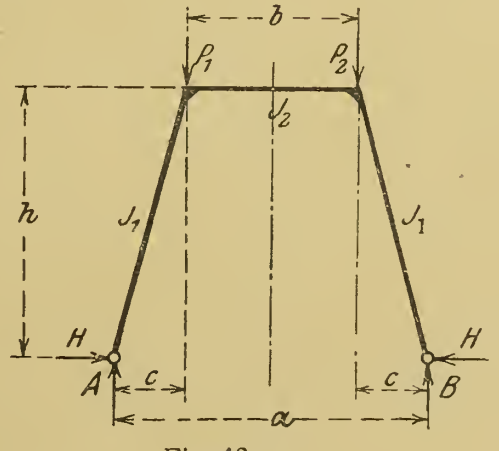


Fig. 46.

Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{JE} \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial H} \, dx = 0.$$

Pfosten links.

$$M_x = A \cdot y - H \cdot x = A \cdot \frac{c\,x}{h} - H \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial H} = -x$$

$$\frac{1}{J_1 E} \int_0^h \left\{ -\frac{A \cdot c\,x^2}{h} + H\,x^2 \right\} dx = -\frac{A \cdot c\,h^2}{3\,J_1 E} + \frac{H \cdot h^3}{3\,J_1 E} \qquad \text{(I)}$$

Pfosten rechts.

$$-\frac{B\,c\,h^2}{3\,J_1 E} + \frac{H \cdot h^3}{3\,J_1 E} \quad \ldots\ldots \qquad \text{(II)}$$

Querriegel.

$$M_x = A\,(c + x) - P_1 x - H \cdot h; \quad \frac{\partial M_x}{\partial H} = -h$$

$$\frac{1}{J_2 E} \int_0^b \{ -A\,c\,h - A\,h\,x + P_1\,h\,x + H\,h^2 \}\, dx$$

$$= -\frac{A\,b\,c\,h}{J_2 E} - \frac{A\,b^2\,h}{2\,J_2 E} + \frac{P_1\,b^2\,h}{2\,J_2 E} + \frac{H\,b\,h^2}{J_2 E} \quad \ldots \qquad \text{(III)}$$

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} = o.$$

$$\frac{2\,H\,h^3}{3\,J_1 E} + \frac{H\,b\,h^2}{J_2 E} = \frac{A\,c\,h^2}{3\,J_1 E} + \frac{A\,b\,c\,h}{J_2 E} + \frac{A\,b^2\,h}{2\,J_2 E} + \frac{B\,c\,h^2}{3\,J_1 E} - \frac{P_1\,b^2\,h}{2\,J_2 E}$$

$$H = \frac{\frac{c\,h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1}(A + B) + A\,b\,c + A\,\frac{b^2}{2} - P_1\,\frac{b^2}{2}}{h\left(\frac{2\,h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b\right)}$$

$$= \frac{\frac{c\,h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1}(P_1 + P_2) + A\,\frac{a\,b}{2} - P_1\,\frac{b^2}{2}}{h\left(\frac{2\,h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b\right)}$$

Es war

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} \cdot \frac{b}{h}$$

somit

$$\frac{A\,a\,b}{2} - P_1\,\frac{b^2}{2} = \frac{P_1 + P_2}{4} \cdot a\,b + \frac{P_1 - P_2}{4} \cdot b^2 - \frac{P_1\ b^2}{2}$$

$$= \frac{P_1 + P_2}{4} \cdot a\,b - \frac{P_1 + P_2}{4} \cdot b^2$$

$$H = \frac{\frac{ch}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1}(P_1 + P_2) + \frac{P_1 + P_2}{4} \cdot ab - \frac{P_1 + P_2}{4} \cdot b^2}{h\left(\frac{2h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b\right)}$$

$$= \frac{(P_1 + P_2)\left\{\frac{ch}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + \frac{ab}{4} - \frac{b^2}{4}\right\}}{h\left(\frac{2h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b\right)}$$

$$H = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \frac{c}{h} \cdot \frac{\frac{2h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b}{\frac{2h}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + b} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \frac{c}{h} \quad (68)$$

Beispiel 37. Eine Verladebrücke mit geschwungenem Obergurt. Katze innenlaufend.

Folgt man der Aufgabe, für alle Gurtstäbe möglichst gleichgroße Spannungen zu erzielen, dann muß der Umriß des Trägers nach den

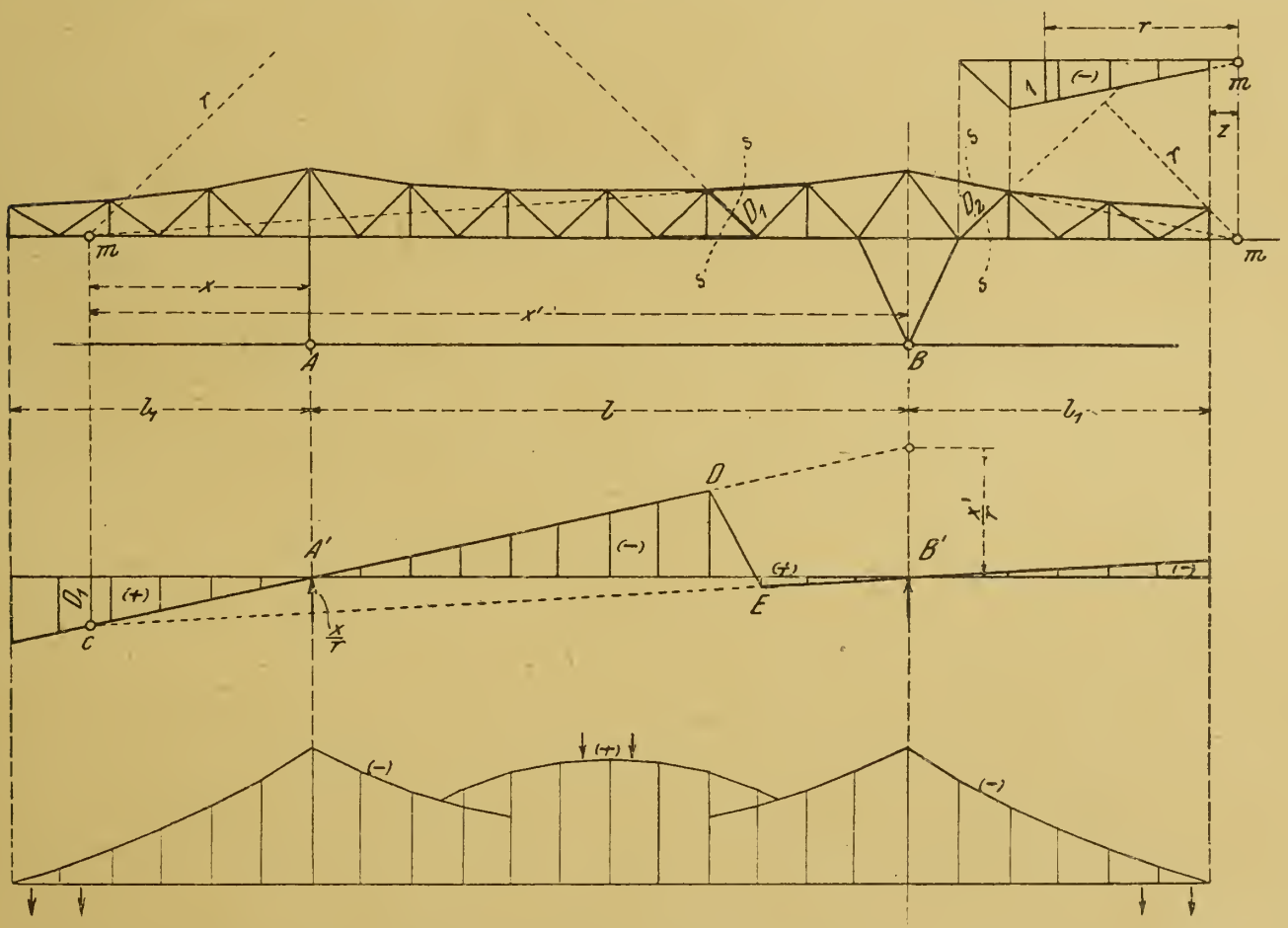


Fig. 47 c.

Fig. 47.

Fig. 47 b.

Fig. 47 a.

Maximalmomenten figurieren. Letztere sind nach dem bekannten Verfahren zu entwerfen (Fig. 47a). Die Krümmung des Obergurtes wird infolgedessen etwa die Form dieser Figur erhalten. Aus praktischen

und Gefälligkeitsgründen jedoch läßt man die Krümmung in der Mitte fallen, so daß der Träger das Bild Fig. 47 annimmt.

Die Gurtspannungen sind

$$S = \frac{M}{r}.$$

Zur Spannungsermittlung der Füllstäbe bedient man sich zweckmäßig der Einflußlinien.

Beispielsweise sollen die Einflußlinien des Stabes D_1 im Mittelfeld und D_2 im Kragarm entwickelt werden.

D_1. Nach Vornahme des Schnittes $s - s$ und bei Betrachtung des linken Trägerstückes, wenn $P = 1$ t im Treffpunkt m der geschnittenen Gurtstäbe angebracht wird, muß sein

$$D_1 \cdot r = \frac{1 \cdot x'}{l} \cdot x$$

oder

$$D_1 : x' = \frac{x}{r} : l.$$

Die Verhältnisgleichung liefert die Gerade $C - B'$ (Fig. 47 b). Alle übrigen Bestimmungspunkte der Einflußlinie sind hierdurch gegeben. Man ziehe von C aus eine Gerade durch A' bis zur Auflagersenkrechten B'; das hier abgeschnittene Stück muß sein $\frac{x'}{r}$. Sodann verbinde man die Punkte D und E. Schließlich muß die gekennzeichnete Gerade noch bis zu den Auslegerenden verlängert werden. Die schraffierte Fläche liefert die gesuchte Einflußlinie.

D_2. Man führe wie vorher einen Schnitt $s - s$ und kennzeichne den Treffpunkt der beiden geschnittenen Gurtstäbe. Dann erzeugt die Last $P = 1$ t am Auslegerende angreifend die Spannung

$$D_z = 1 \cdot \frac{z}{r}$$

oder

$$D_z : z = 1 : r,$$

eine Beziehung, die sich graphisch leicht auftragen läßt. Es bedarf keines weiteren Nachweises, daß die gewünschte Einflußlinie den in Fig. 47 c gezeigten Verlauf hat.

Beispiel 38. Ein fahrbarer Auslegerkran nach Fig. 48.

Das Haupttragwerk besteht aus zwei senkrechten Trägerwänden mit wagerechtem Windverband zwischen den Untergurten. Die

Obergurte werden nach unten abgesteift durch Querkreuze an jeder Vertikalen. Zum Zweck, die Katze möglichst schmal zu halten, läuft sie auf einer besonderen als Fachwerkträger ausgebildeten Fahrbahn, deren Anordnung Fig. 48 b erkennen läßt.

Um das bedeutende Kippmoment bei ausgefahrener Katze zu verringern, wird durch letztere ein Gegengewichtswagen korrespondierend auf dem jenseitigen Ausleger geführt. Bei vorliegendem Kranwerk wiegt der Gegengewichtswagen soviel wie die Katze (G), so daß nur noch das Moment aus der Nutzlast kippend wirksam ist. Letztere soll $N = 5$ t sein.

Ist Q das Gesamtgewicht der Anlage und bezeichnet a_1 die Fußbasis der Stütze, ferner r die größte Ausfahrt der Last, dann muß sein

$$(2 \cdot G + Q)\,\frac{a_1}{2} = n \cdot N\left(r - \frac{a_1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

wo n den Grad der Sicherheit gegen Kippen des Gerüstes bedeutet.

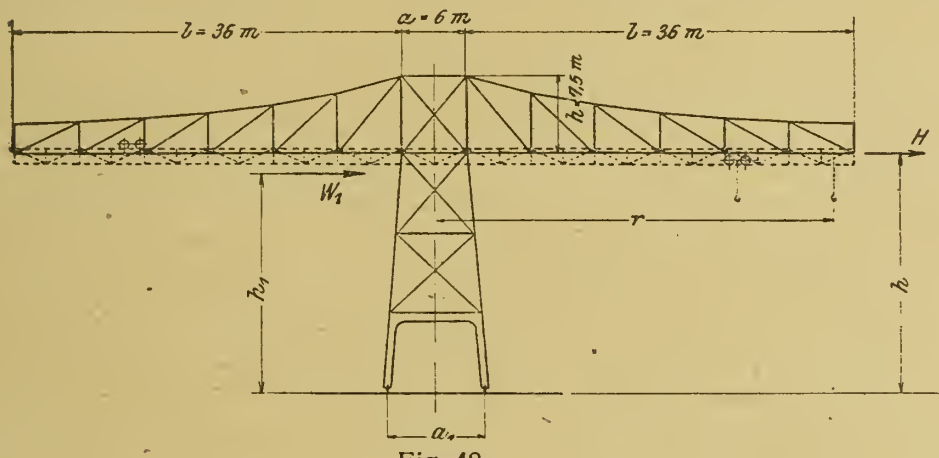


Fig. 48.

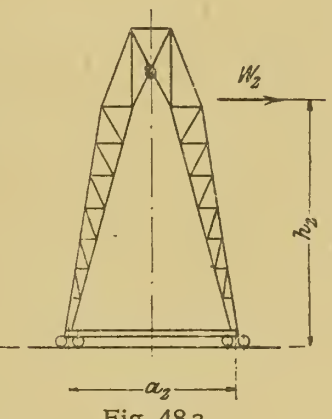


Fig. 48a.

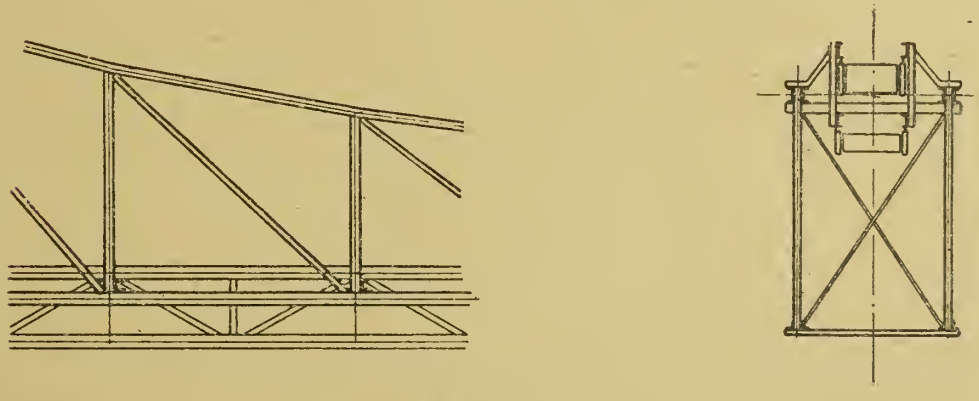


Fig. 48b.

Allein es können noch weitere mit N zusammentreffende Kräfte das Gerüst gefährden. Erstens der Horizontalschub H bei plötzlicher Hemmung der fahrenden Katze, sodann der Wind, dessen Resul-

tierende W_1 im Abstande h_1 vom Fußpunkte angreift. Infolgedessen ist

$$(2G + Q)\frac{a_1}{2} = n\left\{N\left(r - \frac{a_1}{2}\right) + H \cdot h + W_1 h_1\right\} \quad . \quad (70)$$

Derselben Bedingung muß die Querrichtung der Anlage genügen. Als minimalste senkrechte Lasten treten auf das Eigengewicht Q, zugleich die Gewichte $2G$ der leeren Katze und des Gegengewichtwagens. Die kippende Kraft ist der Wind W_2 am Hebelarm h_2 vom Fuße. Mithin gilt

$$(2G + Q) \cdot \frac{a_2}{2} = n \cdot W_2 \cdot h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Für die Berechnung des Auslegers sind maßgebend sein Eigengewicht $g = 0{,}34$ t pro m und die Raddrucke der belasteten Katze; sie betragen $P = 2{,}50$ t im Abstande $b = 2{,}4$ m. Die Systembildung ist so, daß die Diagonalen nur gezogen werden.

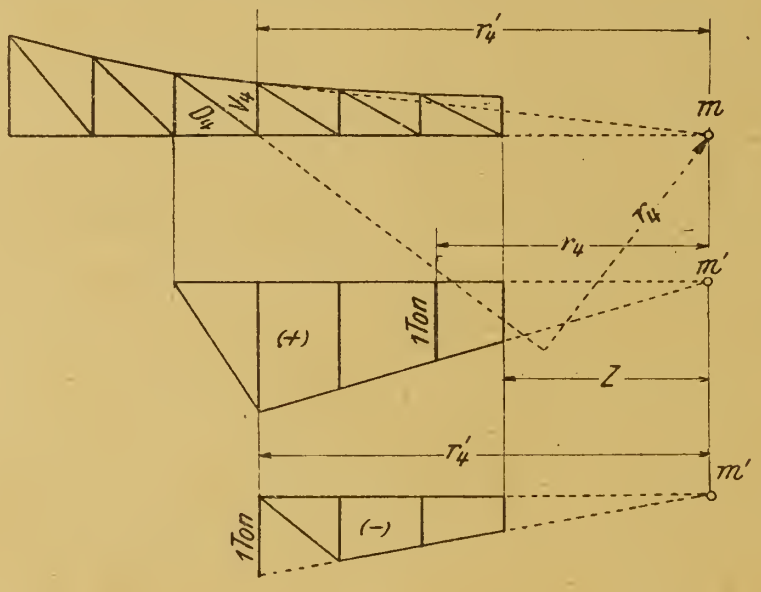


Fig. 48 c.

Fig. 48 d.

Fig. 48 e.

Man ermittle die Spannkräfte der Diagonalen und Vertikalen mit Hilfe von Einflußlinien. Hierfür geben Fig. 48 d und 48 e zwei Beispiele. Es ist für $P = 1$ t am Ende des Auslegers

$$D_4 = +1 \cdot \frac{z}{r_4}$$

oder

$$D_4 : z = 1 : r_4$$

und

$$V = -1 \cdot \frac{z}{r_4'}$$

oder

$$V_4 : z = 1 : r_4'.$$

Die größten Gurtspannungen berechnen sich am schnellsten auf Grund der Maximalmomente.

Das Moment aus dem Eigengewicht über Stützenmitte beträgt

$$M_0^g = \frac{g \cdot l^2}{2} = \frac{0{,}34 \cdot \overline{36}^2}{2} = 220{,}32 \text{ mt.}$$

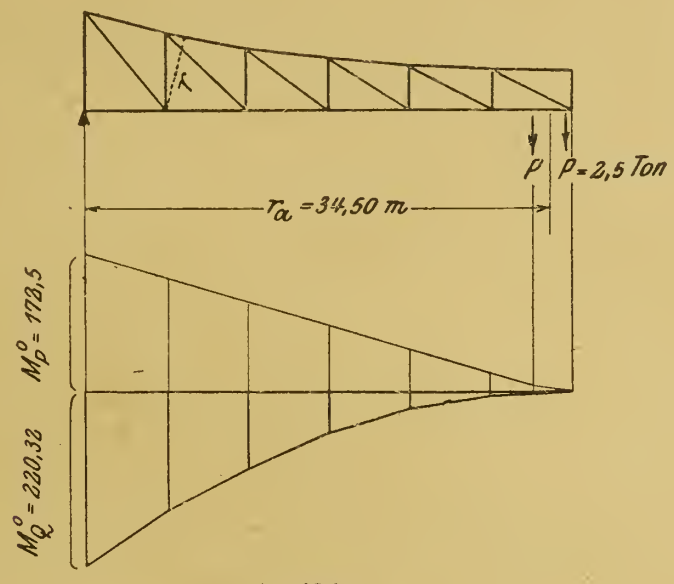


Fig. 48 f—g.

Das Moment über der Stützenmitte bei ausgefahrener Katze ist

$$M_0^P = 2\,P \cdot r_a = 5 \cdot 34{,}5 = 172{,}5 \text{ mt.}$$

Das Moment unter der Last P links

$$M_b = P \cdot b = 2{,}5 \cdot 2{,}4 = 6 \text{ mt,}$$

$$S_{max} = \frac{M}{r}$$

(Fig. 48 f und 48 g).

Beispiel 39. Ein ähnlicher Auslegerkran wie vorher, nur daß das Hauptträgersystem eine grundsätzliche Änderung erfährt, und

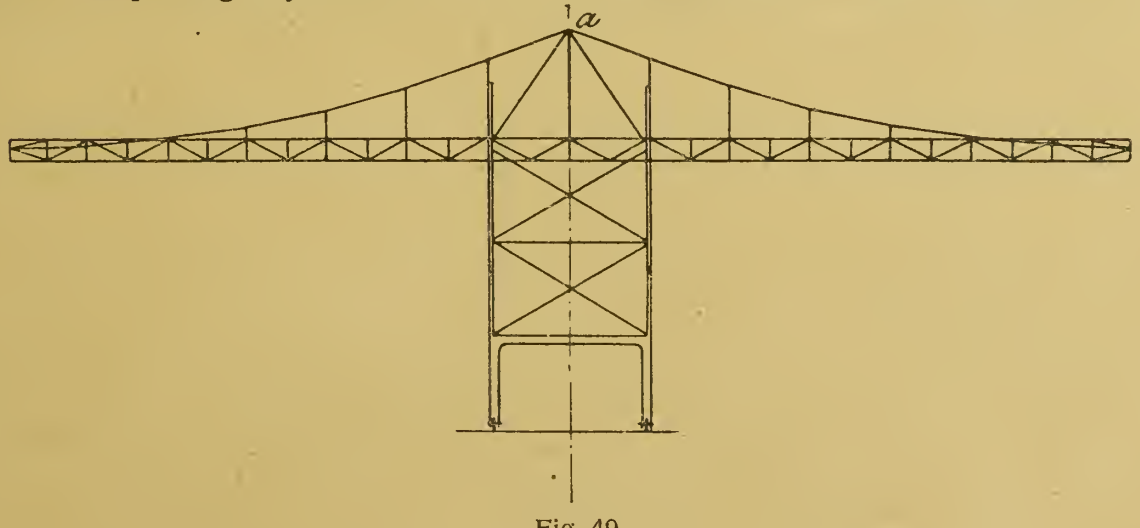


Fig. 49.

zwar durch Fortfall der Diagonalen. Dann muß der Untergurt biegungsstark sein, da er als Versteifungsbalken des kettenartig überspannten Obergurtes wirkt. Es liegt nahe, den hohen Fahrbahnträger an Stelle des Untergurtes zu rücken, wodurch die in Fig. 49 a gezeichnete Querschnittanordnung bedingt ist.

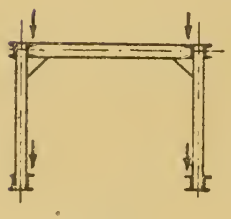


Fig. 49 a.

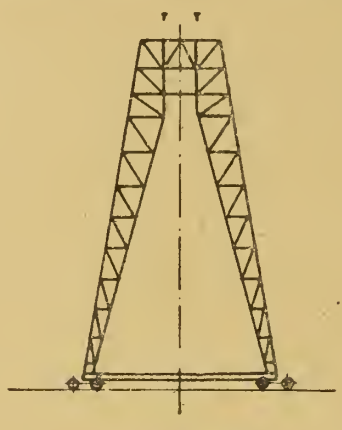


Fig. 49 b.

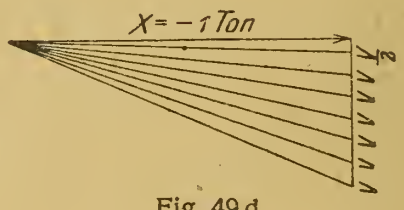


Fig. 49 d.

Als statisch unbestimmte Größe ist die wagerechte Seitenkraft X des Zuges im parabolischen Obergurt aufzufassen.

Es bezeichnen

J das Trägheitsmoment des Versteifungsbalkens,

F seinen Querschnitt,

n die Anzahl der Felder,

F_1 den Querschnitt des Obergurtes, s die Stablängen,

F_2 den Querschnitt der Hängestangen, s_2 die Stablängen.

Wir durchschneiden das Zugband im Aufhängepunkt a und bringen daselbst die Kräfte

$$X = -1 \text{ t}$$

entgegengesetzt gerichtet an. Dann entsteht der Kräfteplan (Fig. 49d). Die Spannungen der Hängestangen sind

$$V_1 = \frac{4\,h_0}{n\,l_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

des Endstabes

$$V_1' = \frac{2\,h_0}{n\,h_0}.$$

V_1 ergibt sich wie folgt:

Nach Fig. 49 c liegt der Koordinatenursprung in der Auslegerspitze. Die Gleichung des Parabelbogens ist

$$y = \frac{h_0}{l_0^2} \cdot x^2.$$

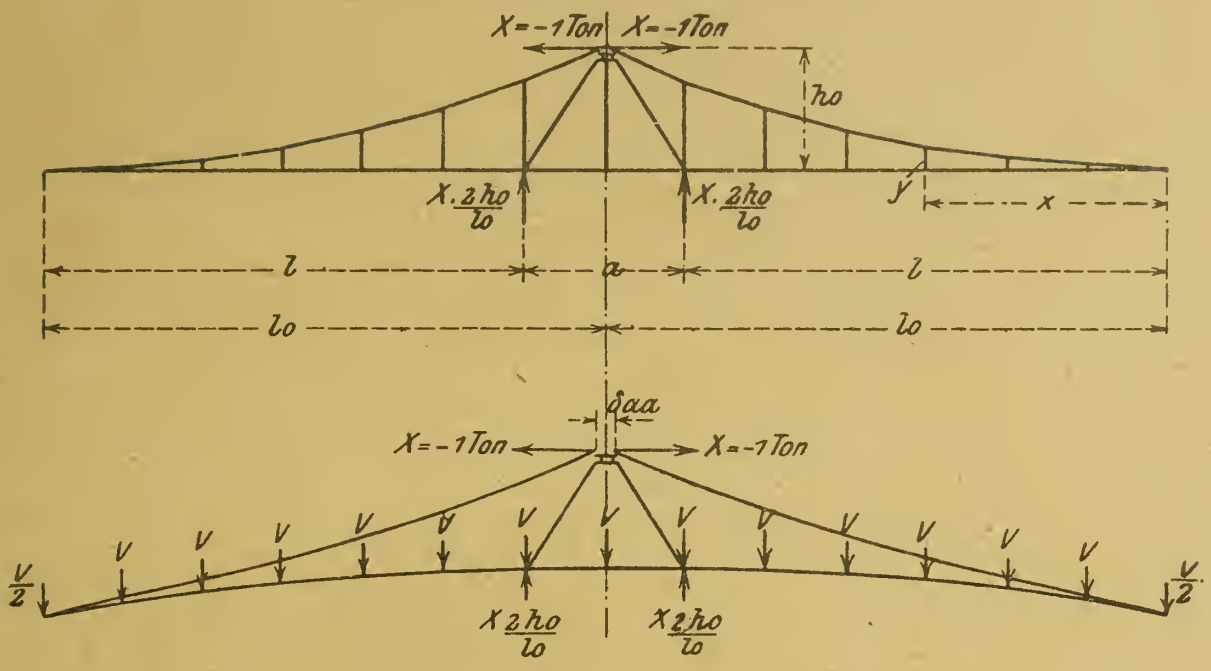


Fig. 49 c—e.

Die Höhe der ersten Vertikalen

$$y_1 = \frac{h_0}{l_0^2}\, x_1^2$$

oder weil

$$x_1 = \frac{2\, l_0}{n}$$

$$y_1 = \frac{4\, h_0}{n^2}.$$

Fig. 49 d liefert

$$\frac{V_1}{2} : 1 = \frac{4\, h_0}{n^2} : \frac{2\, l_0}{n}$$

oder

$$V_1 = \frac{4\, h_0}{n\, l_0} \cdot 1.$$

Der Versteifungsbalken wird mithin zunächst von den Kräften V_1 nach abwärts gerichtet angegriffen. Die Folge ist eine Verbiegung desselben und damit zusammenhängend eine Erweiterung δ_{aa}' der Schnittstelle bei *a*. Setzen wir wie früher an Stelle von

$$V_1$$

die gleichmäßig verteilte Belastung

$$p = \frac{n \cdot V_1}{2\, l_0} = \frac{2\, h_0}{l_0^2} \cdot 1.$$

Dies entspricht einer stetigen Krümmung des Obergurtes. Die Erweiterung δ_{aa}' kann daher unmittelbar von $X = -1$ t hergeleitet werden.

Die Ordinaten des Obergurtes waren

$$y = \frac{h_0}{l_0^2} \cdot x^2.$$

Die Tangente des Bogens ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 h_0 x}{l_0^2}.$$

Die Tangente des Bogens im Punkte a daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 h_0}{l_0}.$$

Infolgedessen beträgt die vertikale Seitenkraft daselbst

$$V_x = X \cdot \frac{2 h_0}{l_0}.$$

Diese kommt im Angriffspunkte der Stütze zum Ausdruck. Das Moment des Versteifungsbalkens im Abstande x vom Ende ist

$$M_x = X \cdot y = X \cdot \frac{h_0}{l_0^2} \cdot x^2,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{h_0}{l_0^2} \cdot x^2.$$

$$\frac{1}{JE} \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx = \frac{1}{JE} \int_0^{l_0} X \frac{h_0^2}{l_0^4} \cdot x^4 dx = \frac{X \cdot h_0^2 l_0}{5 JE}. \qquad (I)$$

Das Moment zwischen den Stützen aus V_x beträgt

$$M_x = X \cdot \frac{2 h_0}{l_0} \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{2 h_0}{l_0} x,$$

$$\frac{1}{JE} \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx = \frac{4}{JE} \int_0^{\frac{a}{2}} X \frac{h_0^2}{l_0^2} x^2 dx = \frac{X \cdot h_0^2 a^3}{6 l_0^2 JE} \qquad (II)$$

$$\frac{\delta_{aa'}}{2} = \mathrm{I} - \mathrm{II} = \frac{X h_0^2 l_0}{5 JE} - \frac{X h_0^2 a^3}{6 l_0^2 JE},$$

$$\delta_{aa'} = \frac{2 X h_0^2}{JE} \left(\frac{l_0}{5} - \frac{a^3}{6 l_0^2} \right).$$

Für $X = 1$ t, mithin

$$\delta_{aa'} = \frac{2 \cdot h_0^2}{JE} \left(\frac{l_0}{5} - \frac{a^3}{6 l_0^2} \right) \ldots\ldots (72)$$

Wegen der im Verhältnis zur Auslegerlänge geringen Stützenentfernung a ist dieser Wert genügend genau. In Wirklichkeit ist δ_{aa}' etwas kleiner und lautet:

$$\delta_{aa}' = \frac{2\,h_0^2}{J\,E}\left\{\frac{8\,l_0}{15} - \frac{8\,l}{3} + \frac{4\,l^2}{l_0} - \frac{4\,l^3}{3\,l_0^2} - \frac{l^4}{3\,l_0^3}\right\} \qquad (73)$$

Ferner erweitert sich die Schnittstelle durch die Längenänderung des Obergurtes, des Versteifungsbalkens sowie der Hängestangen. Der Einfluß des großquerschnittigen Versteifungsbalkens soll vernachlässigt werden. Wie bei Beispiel 19 berechnet sich die Erweiterung aus sämtlichen übergespannten Stäben nach der Bedingung

$$\delta_{aa}'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Infolgedessen ergibt sich die Gesamterweiterung zu

$$\delta_{aa} = \delta_{aa}' + \delta_{aa}''.$$

Nun folgt die Ermittelung der unter den Lasten

$$p = \frac{2\,h_0}{l_0^2} \cdot 1 \quad \text{(Fig. 49e)}$$

entstehenden Biegungslinie des Versteifungsbalkens. Vorausgesetzt war ein konstantes Trägheitsmoment J. Man benutze das schon früher empfohlene Verfahren, indem man die Form der Überspannung als Belastungsfläche einführt und hierfür das Seilpolygon zeichnet. Siehe auch Beispiel 20. Zur Kontrolle kann dann die Durchbiegung des Balkens in der Mitte nach

$$f_m = \frac{p \cdot a^2}{16\,J\,E}\left\{l^2 - \frac{5\,a^2}{24}\right\} \qquad (74)$$

und am Ende nach

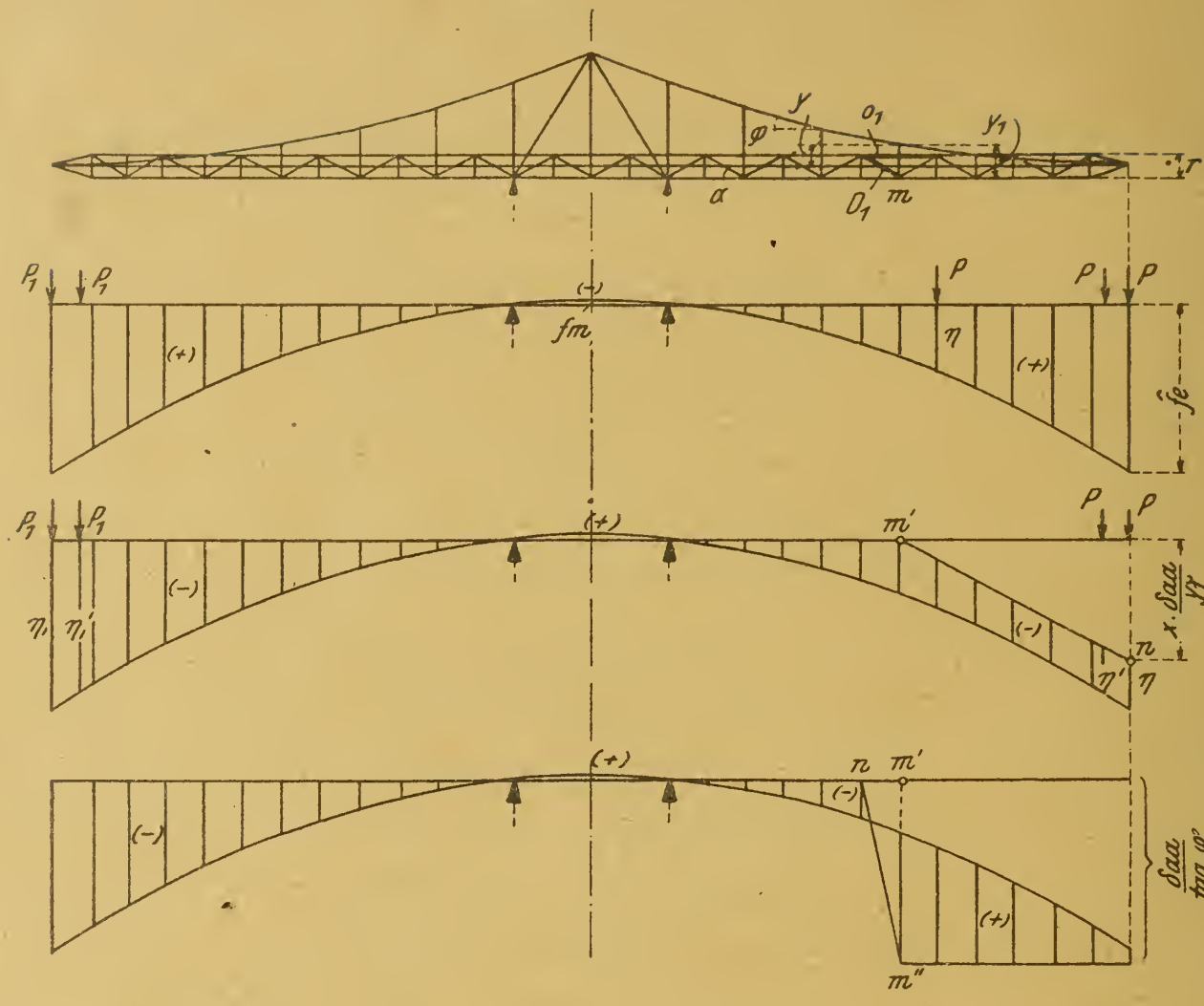
$$f_e = \frac{p\,l}{8\,J\,E}\left\{l^3 + 2\,a\,l^2 - \frac{a^3}{3}\right\} \qquad (75)$$

bestimmt werden.

Bezeichnet η die Ordinate der Biegungslinie, gemessen unter einer auf dem Träger wandernden Last P, dann ist die statisch Unbekannte

$$X = P\,\frac{\eta}{\delta_{aa}}.$$

Auf Grund dieser Beziehung können nun leicht die Spannungen der Stäbe des Versteifungsbalkens berechnet werden.



Stab O_1.

Wir bringen die Last $P = 1$ t in den Endpunkt des rechten Auslegers. Dann ist

$$-O_1 \cdot r + P \cdot x - X \cdot y_1 = 0 \left(y_1 = y + \frac{r}{2}\right),$$

$$O_1 = \frac{1}{r}\{P \cdot x - X \cdot y_1\},$$

$$O_1 = \frac{P}{r}\left\{x - \frac{\eta}{\delta_{aa}} \cdot y_1\right\} = \frac{1 \cdot y_1}{r\,\delta_{aa}}\left\{x\,\frac{\delta_{aa}}{y_1} - \eta\right\}.$$

Die Werte η sind gezeichnet (Biegungslinie). Die Größe

$$x \cdot \frac{\delta_{aa}}{y_1}$$

wird dargestellt durch die Gerade $n - m'$ (Fig. 49 h). Es kommen stets die beiden symmetrischen Laststellungen der Katze und des Gegengewichtwagens in Betracht. Wahrscheinlich tritt O_1 maximum bei ganz ausgefahrenen Lasten ein. Dann ist

$$-O_1^{\max} = \frac{y_1}{r\,\delta_{aa}}\{P\,(\eta + \eta') + P_1\,(\eta_1 + \eta_1')\}.$$

Die Spannung aus Eigengewicht beträgt

$$-O_1^g = \frac{\eta_1}{r\,\delta_{aa}} \cdot F_0 \cdot g,$$

wo F_0 die Einflußfläche und g das Gewicht der Konstruktion pro Längeneinheit bedeuten.

Stab D_1.

$P = 1$ t wird in den Knoten m gebracht. Bezeichnet α den Neigungswinkel der Schrägen und φ den Neigungswinkel des dem Knoten gegenüberliegenden Zugbandgliedes, dann ergibt sich die Diagonalspannung zu

$$D_1 = \frac{P}{\sin\alpha} - X\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\{P - X\operatorname{tg}\varphi\},$$

$$D_1 = \frac{P}{\sin\alpha}\left\{1 - \frac{\eta}{\delta_{aa}} \cdot \operatorname{tg}\varphi\right\} = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\delta_{aa}\sin\alpha}\left\{\frac{\delta_{aa}}{\operatorname{tg}\varphi} - \eta\right\}.$$

Fig. 49 i zeigt die Eintragung des ersten Gliedes

$$\frac{\delta_{aa}}{\operatorname{tg}\varphi}$$

in die Biegungslinie. Es entsteht somit die Einflußlinie der Stabspannung D_1. Die die größte Spannung liefernden Laststellungen können leicht ermittelt werden.

Beispiel 40. An dem in Fig. 50 abgebildeten Bock kann an Stelle der in der Praxis wenig geübten statisch unbestimmten Behandlung eine einfache, jedoch brauchbare Werte liefernde Rechnung gesetzt werden. Durch die Beseitigung der äußeren Rippe löse man das Fachwerk in ein statisch bestimmtes System auf. Dann ergeben sich folgende Spannkräfte

der Stützenschrägen $S = -\frac{P}{\sin\alpha}$,

des Zugbandes $S_H = +\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Letztere ist zugleich oben zwischen den Gelenken wirksam und muß von dem Rahmen aufgenommen werden. Die Stabspannungen des Rahmens lassen sich leicht vermittelst eines Cremonaplanes bestimmen.

Weiter untersuchen wir das Gerüst für den Angriff der Horizontalkraft H (Wind, Schwankung, Schrägzug der Last), wobei angenommen werden darf, daß sie sich zur Hälfte auf jeden Bockfuß überträgt.

Diese Rechnung bedingt eine starke äußere Rippe. Mit Bezug auf die Gliederung der Fig. 50 a leuchtet ein, daß der neue Stab eine günstige Wirkung auf die ersthin durch P erzeugten Spannungen hat,

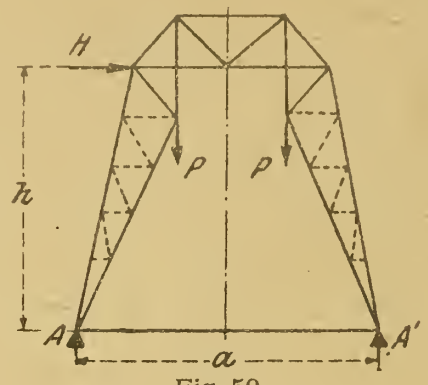


Fig. 50.

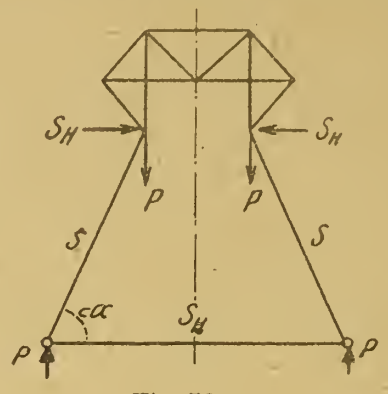


Fig. 50a.

indem er die Seitenkräfte S_H erheblich vermindert. Allerdings fällt infolgedessen der Rippe ein weiterer Kraftanteil zu, der durch reichliche Dimensionierung zu berücksichtigen ist.

Beispiel 41. Eine fahrbare Verladebrücke nach Fig. 51. Die Katze läuft zwischen den Hauptträgern auf den Innenrippen der Untergurte. Der Ausleger ist einziehbar und hängt in wagerechter Lage in einer auf der Hauptbrücke aufgebauten Überspannung. Wegen der gelenkartigen Stützung des Auslegers im Punkte a ist das System der Brücke statisch bestimmt. Über die Berechnung derjenigen Teile, die außerhalb der Überspannung liegen, ist nichts Besonderes zu sagen. Bemerkenswert ist jedoch die statische Untersuchung der durch die Überspannung beeinflußten Gebiete. Die Spannungen dieser Stäbe werden am einfachsten mit Hilfe von Einflußlinien ermittelt.

Es bezeichnet H die wagerechte Seitenkraft der Spannung in dem überspannten Zugstab, hervorgerufen durch eine Last P auf dem Ausleger. Bedeutet x' die Entfernung der Last von dem Gelenkpunkt a, dann ist

$$H = P \cdot \frac{x'}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Die Einflußlinie dieser Seitenkraft ist eine mit Null vom Punkte a ausgehende schräge Gerade. Das Maximum der Kraft tritt ein, wenn P am Auslegerende steht

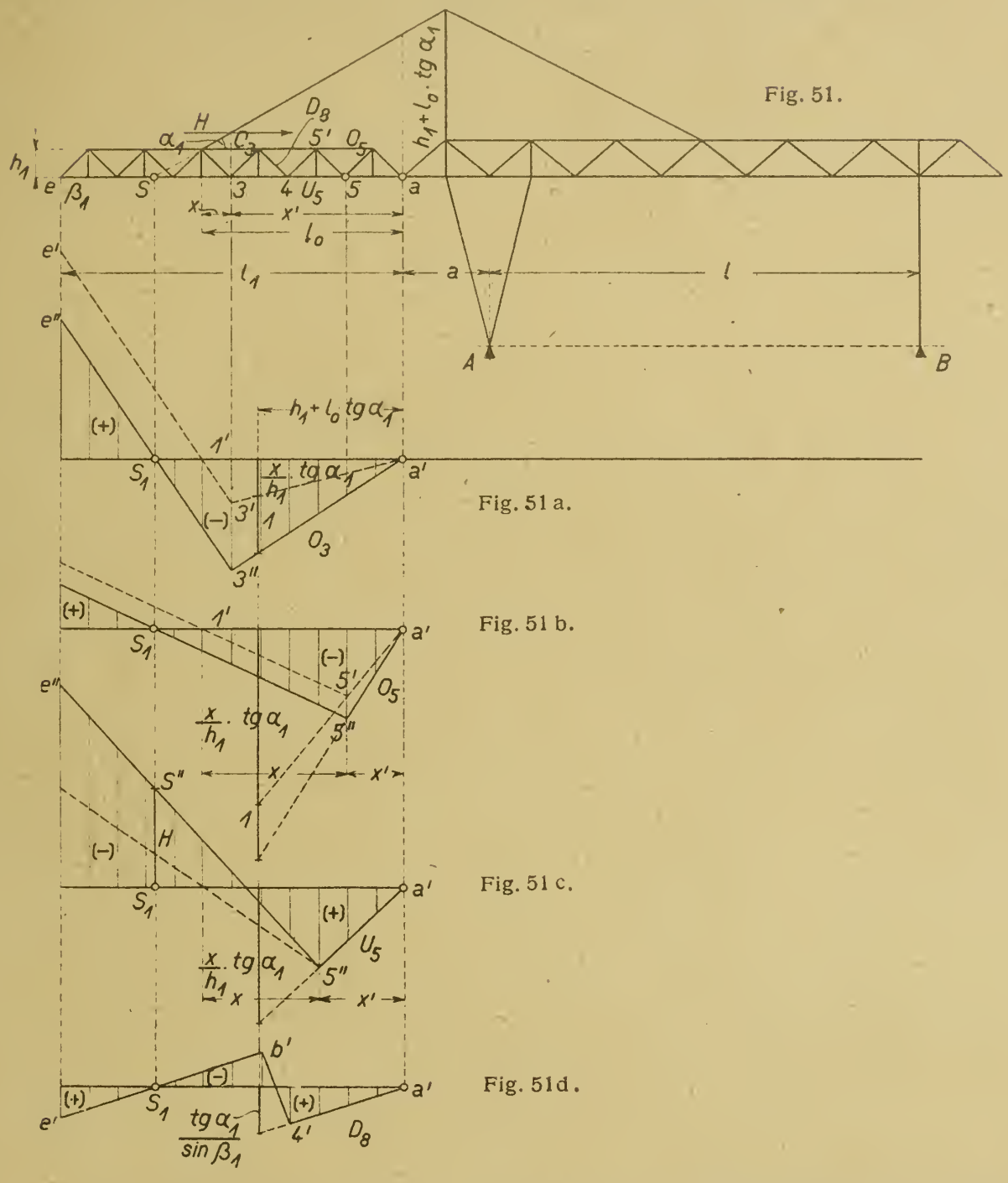
$$H_{max} = P \cdot \frac{l_1}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Hiernach ergeben sich durch Zerlegung die größten Spannkräfte in den drei überspannten Stäben.

Das Eigengewicht des Auslegers liefert

$$H_g = Q \cdot \frac{s}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1},$$

wo s die Entfernung des Schwerpunktes von a bedeutet.



S t a b O_3. Eine Last $P = 1$ im Knoten 3 erzeugt die Spannkraft (Fig. 51 a).

$$S = H \cdot \frac{h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1} = H + H \cdot \frac{x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1}$$

$$= \underset{\text{(I)}}{\frac{1 \cdot x'}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}} + \underset{\text{(II)}}{\frac{1 \cdot x \cdot x' \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1 (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1)}}.$$

Glied II.

$$S_{II} : x' = \frac{x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1} : (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1).$$

Dieses Verhältnis läßt sich graphisch durch den Linienzug a'— $3'$ darstellen. Nach früherem ist der ergänzende Ast die Gerade $3'$ — $1'$ — e'.

Glied I. $$S_I : x' = 1 : (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1).$$

Auch diese Proportion kann man zeichnerisch darstellen, und zwar durch die gerade Linie a' — $3''$. Die weitere Gerade $3''$— e'' ist durch den Spannungsnullpunkt S_1 gegeben; die Last P an dieser Stelle ergibt keine Spannung in dem Stabe. Die schraffierte Fläche liefert die gesuchte Einflußlinie. Die Stabkraft aus zwei Lasten P_1 und P_2 beträgt beispielsweise

$$S = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2.$$

Stab O_5. Eine Last $P = 1$ im Knoten 5 erzeugt wieder (Fig. 51b)

$$S = \frac{1 \cdot x'}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{1 \cdot x \cdot x' \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1 (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1)}.$$

Die graphische Auftragung der beiden Glieder ist dieselbe wie vorher. Maßgebend für die veränderte Richtung der einzelnen Linien ist nur die Größe x.

Stab U_5. Eine Last $P = 1$ im Knoten $5'$ bewirkt (Fig. 51c)

$$S = H \cdot \frac{x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1} = \frac{1 \cdot x \cdot x' \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1 (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1)}.$$

Als Verhältnis

$$S : x' = \frac{x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1} : (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1)$$

geschrieben, kann man diesen Ausdruck durch die Gerade a'— $5''$ darstellen. Bestimmend für den Ast $5''$— e'' ist der Punkt S'', denn die Last $P = 1$ an der Stelle S_1 ruft im Stab U_5 die Spannkraft H hervor.

$$H = 1 \cdot \frac{l_0 + \dfrac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Stab D_8. Die Last $P = 1$ im Knoten 4 erzeugt (Fig. 51d)

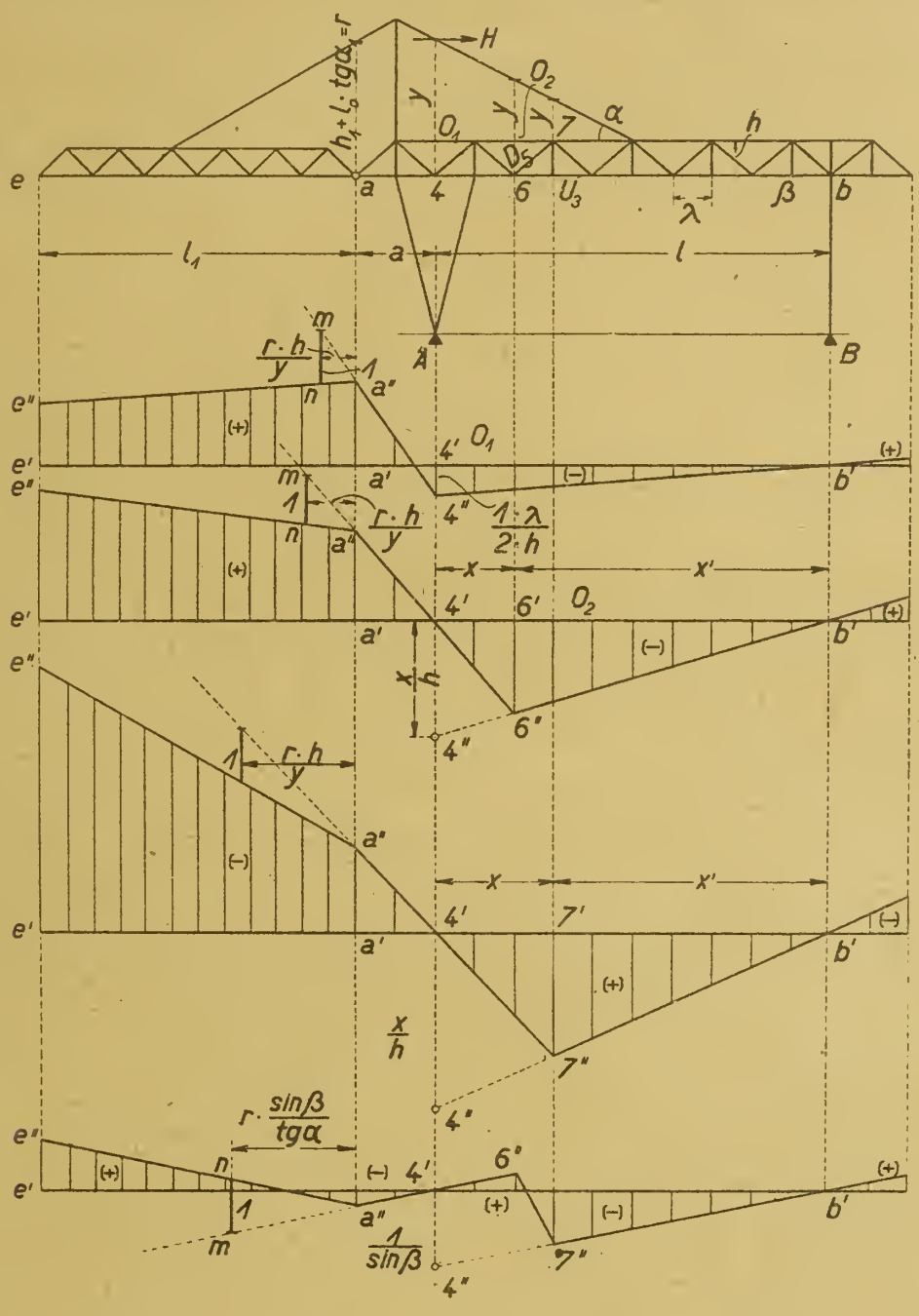
$$S = H \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \cdot \frac{1}{\sin \beta_1} = \frac{1 \cdot x' \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot \frac{1}{\sin \beta_1}$$

oder

$$S : x' = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sin \beta_1} : (h_1 + l_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1).$$

Dieses Verhältnis wird durch die Gerade $a'—4'$ dargestellt. Die Gerade $e'—b'$ ist durch den Spannungsnullpunkt S_1 gegeben; sie läuft ferner parallel zu der ersten Geraden. Durch Einfügung der Geraden $4'—b'$ ist die fertige Einflußlinie gegeben.

Einflußlinien für die Stäbe der Hauptbrücke.



Stab O_1.

a) Wirkung der Last $P = 1$ auf der Hauptbrücke zwischen den Punkten a und b (Fig. 51 e).

Die Last im Knoten 4 erzeugt

$$S = \frac{1 \cdot \lambda}{2 \cdot h}$$

Dieser Wert wird nach Fig. 51 f unter 4 aufgetragen. Die Gerade $4''— b'$ stellt dann den Einfluß für dieses Gebiet dar.

Sodann stellt man die Last in den Gelenkpunkt a und ermittelt die Spannkraft

$$S = \frac{1 \cdot a}{l} \cdot \frac{l}{h} - \frac{1 \cdot (a + l)}{2 \cdot l} \cdot \frac{\lambda}{h}$$

$$= \frac{1 \cdot a}{h} - \frac{1 \cdot (a + l)}{2\,l} \cdot \frac{\lambda}{h}.$$

Auftragung siehe Strecke $a'— a''$.

Nach Verbindung der Punkte $4''$ und a'' erhält man die Einflußlinie für das Gebiet Hauptbrücke.

b) Wirkung der Last $P = 1$ auf dem Ausleger.

Denkt man sich die Überspannung nicht vorhanden und den Ausleger als starre Fortsetzung des Hauptträgers, dann würde die verlängerte Gerade $4''— a''$ die Einflußlinie für die weiter über den Punkt a hinausschreitende Last darstellen; diese verlängerte Linie ist punktiert angedeutet. In dem Augenblick aber, wo die Last auf den Ausleger tritt, wird dieser Zustand durch die Spannkraft H der Überspannung beeinflußt.

Aus H entsteht

$$S_1 = \frac{1 \cdot x}{r} \cdot \frac{y}{h}$$

wo x die Entfernung der Last vom Punkte a bedeutet.

Oder

$$S_1 : x = 1 : \frac{r \cdot h}{y}.$$

Dieses Verhältnis wird graphisch durch das Dreieck $m — n — a''$ aufgetragen, womit die Richtung des letzten Astes $a''— e''$ der Einflußlinie gegeben ist.

S t a b O_2.

Die Last $P = 1$ im Knoten 6 bewirkt (Fig. 51 g).

$$S = \frac{1 \cdot x' \cdot x}{l \cdot h}$$

oder

$$S : x' = \frac{x}{h} : l.$$

Auftragung der Einflußlinie für das Gebiet $a — b$ durch den Linienzug $b'— 6''— 4' — a''$.

Die Wirkung der Last im Abstande x von a auf dem Ausleger infolge der Überspannung ist wieder

$$S_1 = \frac{1 \cdot x}{r} \cdot \frac{y}{h}$$

oder

$$S_1 : x = 1 : \frac{r \cdot h}{y}.$$

Darstellung dieses Verhältnisses wie vorher durch das Dreieck $m — n — a''$. Der weitere Verlauf der Einflußlinie ist hiermit bestimmt.

S t a b U_3.

Die Konstruktion der Einflußlinie ist dieselbe wie bei dem Stab O_2. (Siehe Fig. 51 h.)

S t a b D_5.

Die Last $P = 1$ im Knoten 7 erzeugt

$$S = \frac{1 \cdot x'}{l} \cdot \frac{1}{\sin \beta}.$$

Die Auftragung des Linienzuges $b' — 7'' — 6'' — 4' — a''$ ist nach früherem bekannt (Fig. 51 i).

Denkt man sich die Überspannung wieder beseitigt und den Ausleger als starre Fortsetzung der Hauptbrücke, dann würde der verlängerte Ast $4' — a''$ die Einflußlinie für die Strecke von a bis zum Auslegerende liefern. Die Diagonalspannung aus dem Zug der Überspannung ist aber

$$S_1 = \frac{1 \cdot x}{r} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta}$$

oder

$$S_1 : x = 1 : r \cdot \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Dieses Verhältnis wird wieder durch das Dreieck $m — n — a''$ zur Darstellung gebracht, wodurch die Richtung des letzten Astes $a'' — c''$ der gesuchten Einflußlinie gegeben ist.

Beispiel 42. Eine fahrbare Verladebrücke mit einer auf den Innenrippen der Untergurte laufenden Drehlaufkatze von 10 t Tragfähigkeit.[1])

In der Fig. 52 ist das Brückensystem ersichtlich. Fig. 52 a zeigt den in der wagerechten Obergurtebene liegenden Windverband.

[1]) Siehe mein Aufsatz im »Eisenbau« Jahrgang 1912, Heft 12 (Verlag W. Engelmann, Leipzig).

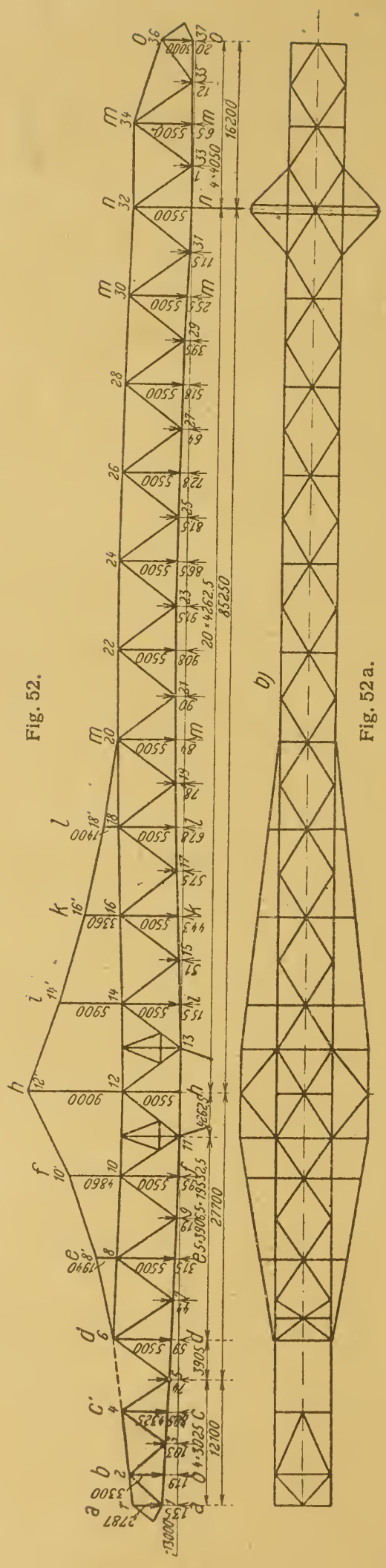


Fig. 52.

Fig. 52a.

In der Fig. 52 b ist ein Querrahmen dargestellt. Schließlich zeigt die Fig. 52 c noch das System der Stützen.

Infolge der Überspannung ist das Netzwerk einfach statisch unbestimmt.

Um zunächst ungefähre Querschnitte zu gewinnen, wird das System durch wagerechte Beweglichmachung des Stabes 11—13 in ein statisch bestimmbares aufgelöst. Auf Grund der gefundenen Werte kann dann eine genaue Berechnung vorgenommen werden.

Als statisch Unbestimmte wird die wagerechte Seitenkraft X des Zuges in der Überspannung eingeführt. (Siehe Fig. 52 d.)

Durchschneidet man die Überspannung in der Spitze bei a, und belastet die Schnittenden mit der Kraft $X = -1$ t, dann entsteht eine Erweiterung δ_a der Schnittstelle und zugleich eine Verbiegung des ganzen Hauptträgers, deren Ordinaten, bezogen auf den Untergurt, mit η bezeichnet werden. Die Biegungslinie ist alsdann die Einfluß-

Fig. 52b.

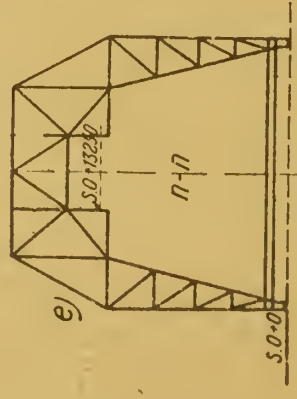


Fig. 52c.

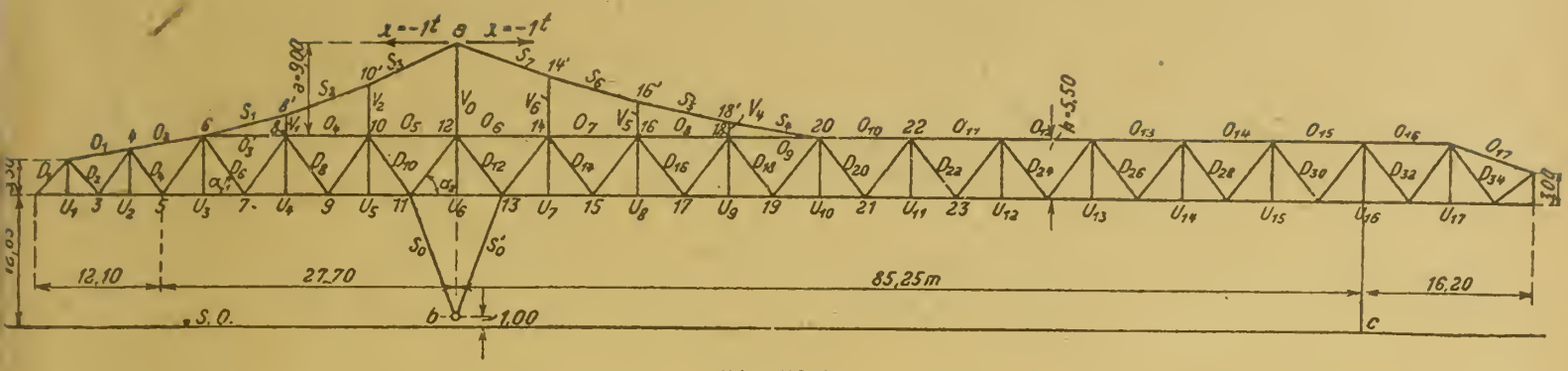


Fig. 52 d.

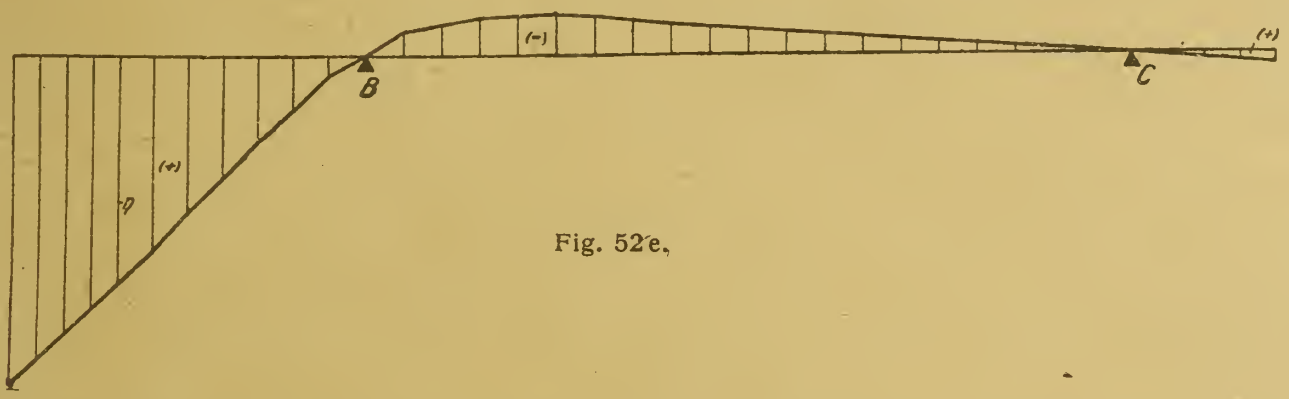


Fig. 52e.

linie für die statisch Unbestimmte X. Für eine Last P am Untergurt angreifend kann geschrieben werden:

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a},$$

wo η die Ordinate gemessen unter der Last P bedeutet.

Nach Bestimmung der Stabspannungen aus der Belastung $X = -1$ t und auf Grund der nach

$$\Delta = \frac{S_1 \cdot s}{F \cdot E}$$

gewonnenen Längenänderungen wird mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes die erforderliche Biegungslinie des Untergurtes festgestellt. (Vgl. Fig. 52e)

a) Eigengewicht der Brücke.

Das Eigengewicht pro Meter Hauptträger beträgt $g = 0{,}59$ t.

Hiernach ergibt sich

$$X_g = \frac{F_0}{\delta_a} \cdot g,$$

wo F_0 die Fläche der Einflußlinie bedeutet.

Außerdem werden die Knoten 6 bis 20 noch mit den Gewichten der Überspannung belastet.

Das gesamte Eigengewicht liefert $X = 19{,}13$ t.

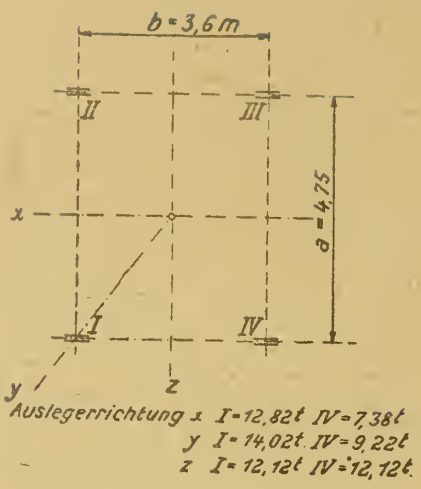


Fig. 52f.

Nach Kenntnis der Größe X können dann die tatsächlichen Stabkräfte aus dem Eigengewicht ohne weiteres ermittelt werden.

b) Die Katze.

Die Raddrucke bei den verschiedenen Auslegerstellungen sind in der Fig. 52 f angegeben.

Zur Bestimmung der Spannkräfte bedient man sich zweckmäßig des Verfahrens der Einflußlinien.

Stab O_3 (Fig. 52 g).

Die Last $P = 1$ t im Abstande x vom Knoten 7 erzeugt:

$$O_3 = \frac{1}{h}\{1 \cdot x - X \cdot r\} = \frac{1}{h}\left\{1 \cdot x - 1 \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot r\right\} = \frac{r}{h \cdot \delta_a}\left\{\frac{x \cdot \delta_a}{r} - \eta\right\}.$$

Die Werte η sind durch die Ordinaten der Einflußlinie Fig. 52 e gegeben. Das erste Glied der Klammer wird durch das Verhältnis

$$\delta_a : r$$

dargestellt und in die Einflußlinie für X eingetragen. Die mit vollausgezogenen Ordinaten versehene Fläche der Fig. 52 h liefert sodann die Einflußlinie für den Stab O_3.

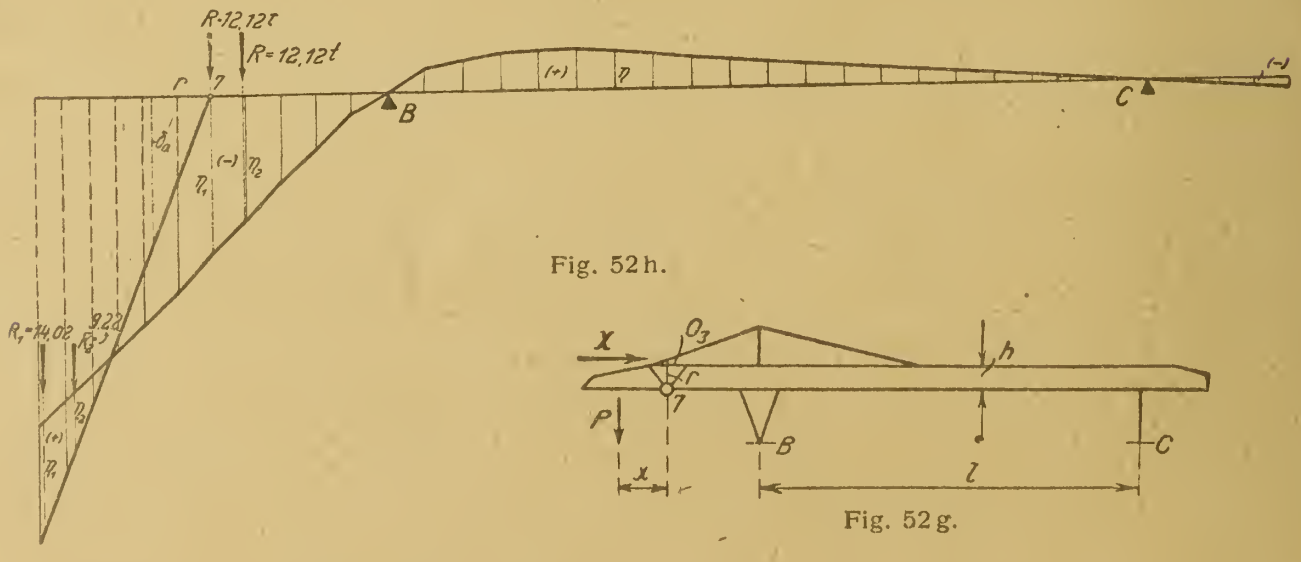


Fig. 52h.

Fig. 52g.

Die größte Druckspannung entsteht, wenn die Katze mit quer gerichtetem Ausleger in das negative Einflußgebiet gefahren wird.

$$-S = \frac{r}{h \cdot \delta_a} \cdot R\,(\eta_1 + \eta_2) = -27{,}82\text{ t}.$$

Steht die Katze im äußersten positiven Einflußgebiet und ist der Ausleger über Eck gerichtet, dann ergibt sich die größte Zugspannung des Stabes zu:

$$+S = \frac{r}{h \cdot \delta_a}(R_1 \cdot \eta_1 + R_2 \cdot \eta_2) = +16{,}30\text{ t}.$$

S t a b O_6 (Fig. 52 i).

Die Last $P = 1$ t im Knoten 13 liefert

$$O_6 = \frac{1}{h}\left\{\frac{1 \cdot x' \cdot x}{l} - X \cdot r\right\} = \frac{r}{h \cdot \delta_a}\left\{\frac{x' \cdot x \cdot \delta_a}{r \cdot l} - \eta\right\}.$$

Die Werte η sind wieder durch die Ordinaten der Einflußlinie Fig. 52 e gegeben. Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$O_6^0 : x = \frac{x \cdot \delta_a}{r} : l$$

schreiben und graphisch auftragen.

Auf Grund vorstehender Darlegung ist in der Fig. 52 k die Einflußlinie für den S t a b O_7 entwickelt.

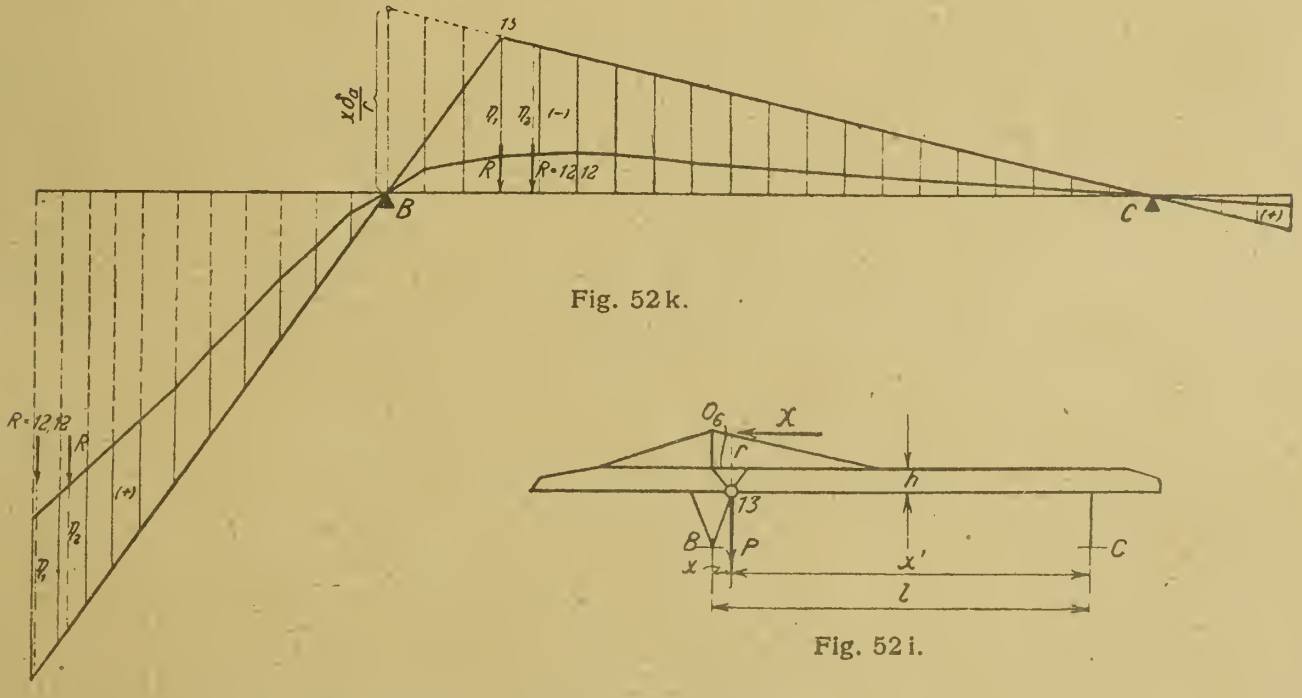


Fig. 52 k.

Fig. 52 i.

Als Maximalspannungen ergeben sich:

$$-S = \frac{r}{h \cdot \delta_a} \cdot R(\eta_1 + \eta_2) = -35{,}50\text{ t},$$

und

$$+S = \frac{r}{h \cdot \delta_a} \cdot R(\eta_1 + \eta_2) = +46{,}50\text{ t}.$$

S t a b U_7 (Fig. 52 l).

Die Last $P = 1$ t im Knoten 14 bewirkt:

$$U_7 = \frac{1}{h}\left\{\frac{1 \cdot x' \cdot x}{l} - X \cdot r\right\} = \frac{r}{h \cdot \delta_a}\left\{\frac{x' \cdot x \cdot \delta_a}{r \cdot l} - \eta\right\}.$$

Auftragung der Einflußlinie siehe Fig. 52 m.

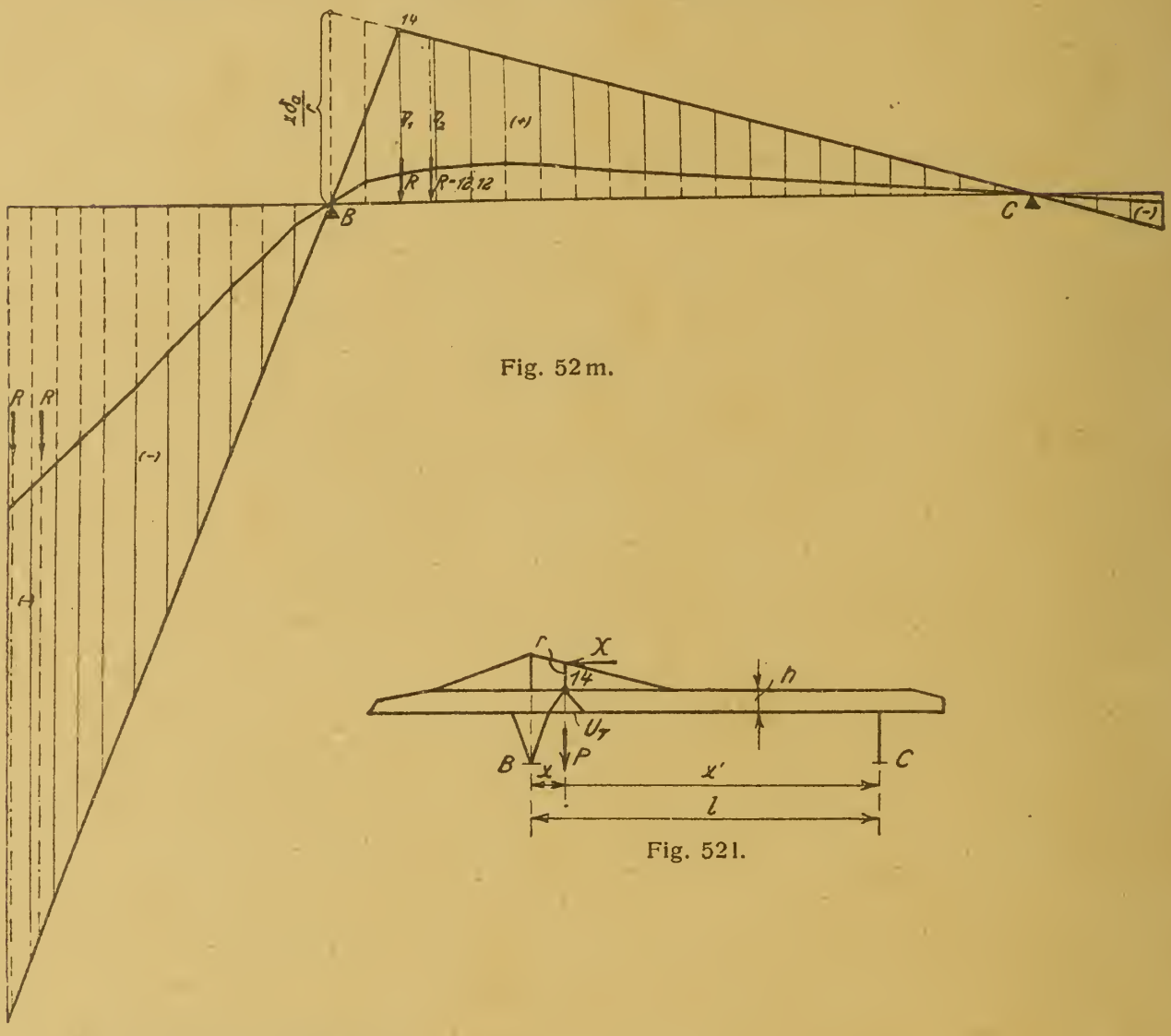


Fig. 52 m.

Fig. 52 l.

Es wurden gefunden

$$-S = \frac{r}{h \cdot \delta_a} \cdot R\,(\eta_1 + \eta_2) = -\,91{,}90\text{ t},$$

und

$$+S = \frac{r}{h \cdot \delta_a} \cdot R\,(\eta_1 + \eta_2) = +\,26{,}90\text{ t}.$$

S t a b D_8 (Fig. 52 n).

Die Last $P = 1$ t im Knoten 8 ergibt eine Querkraft für das Feld 8—9.

$$T_8 = 1 - X \cdot \operatorname{tg}\beta_2 = 1 - \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\delta_a}\left\{\frac{\delta_a}{\operatorname{tg}\beta_2} - \eta\right\}.$$

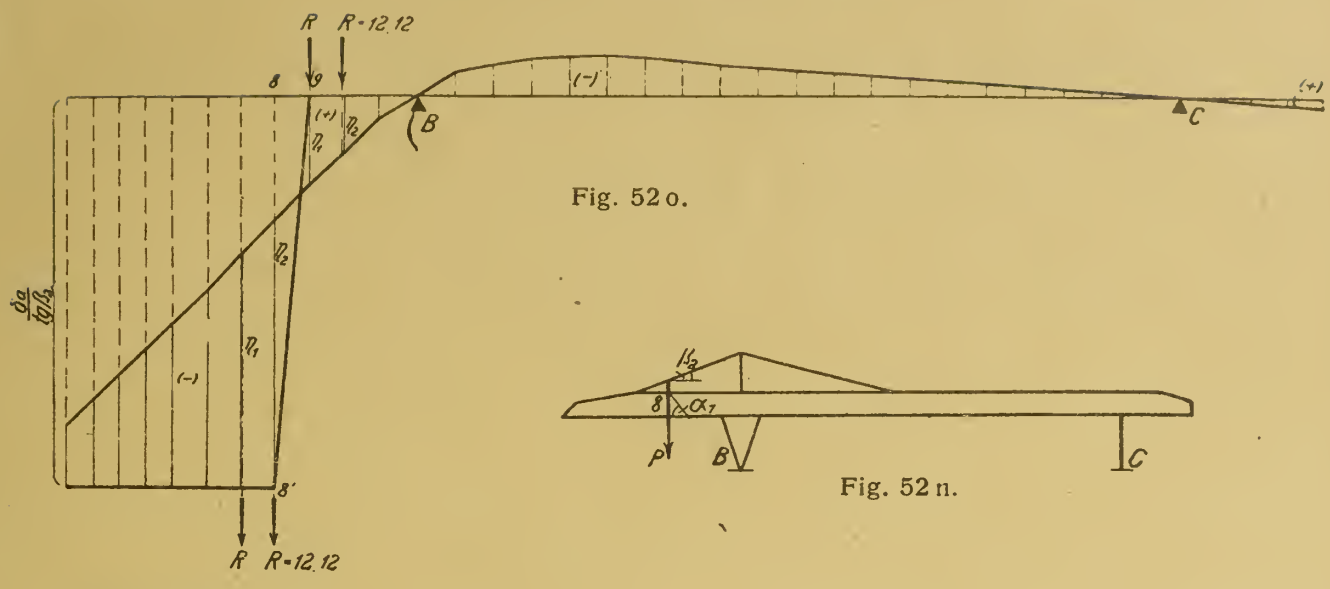


Fig. 52 o.

Fig. 52 n.

Hiernach:

$$-D_8 = \frac{1}{\sin \alpha_1} \cdot T_8 = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\delta_a \cdot \sin \alpha_1} \left\{ \frac{\delta_a}{\operatorname{tg} \beta_2} - \eta \right\}.$$

Die Fig. 52 o zeigt die Konstruktion der Einflußlinie für die Stabkraft D_8.

Man gewinnt:

$$-S = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\delta_a \cdot \sin \alpha_1} \cdot R\,(\eta_1 + \eta_2) = -19{,}20\ \text{t},$$

$$+S = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\delta_a \cdot \sin \alpha_1} \cdot R\,(\eta_1 + \eta_2) = +5{,}59\ \text{t}.$$

S t a b D_{11} (Fig. 52 p).

Die Last $P = 1$ t im Knoten 13 erzeugt eine Querkraft für das Feld 11—12 von

$$T_{11} = \frac{1 \cdot x'}{2 \cdot l} - X \cdot \operatorname{tg} \beta_3 = \frac{x'}{2 \cdot l} - \frac{\eta}{\delta_a} \cdot \operatorname{tg} \beta_3 = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{\delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot \delta_a}{2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \beta_3} - \eta \right\}.$$

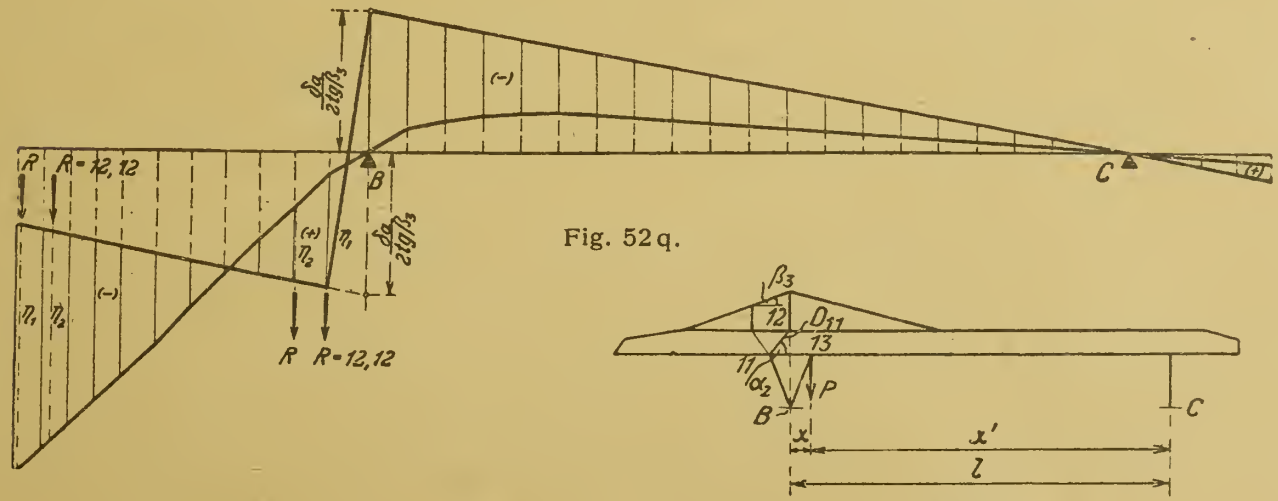


Fig. 52 q.

Fig. 52 p.

Hiernach

$$-D_{11} = \frac{1}{\sin \alpha_2} \cdot T_{11} = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{\delta_a \cdot \sin \alpha_2} \left\{ \frac{x' \cdot \delta_a}{2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \beta_3} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$D_{11}{}^0 : x' = \frac{\delta_a}{2 \cdot \operatorname{tg} \beta_3} : l$$

auffassen und graphisch darstellen.

Die Konstruktion der Einflußlinie siehe Fig. 52 q.

Die Zahlen liefern

$$-S = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{\delta_a \cdot \sin \alpha_2} \cdot R (\eta_1 + \eta_2) = -24{,}45 \text{ t},$$

$$+S = \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{\delta_a \cdot \sin \alpha_2} \cdot R (\eta_1 + \eta_2) = +10{,}15 \text{ t}.$$

Die Spannkräfte der Gurtungen des außerhalb der Überspannung liegenden statisch bestimmbaren Brückenteiles ermitteln sich am einfachsten mit Hilfe der größten Knotenmomente. Bezeichnen M_m das Knotenmoment und r den senkrechten Hebelarm des dem Knoten gegenüberliegenden Stabes, dann ist:

$$S = \pm \frac{M_m}{r}.$$

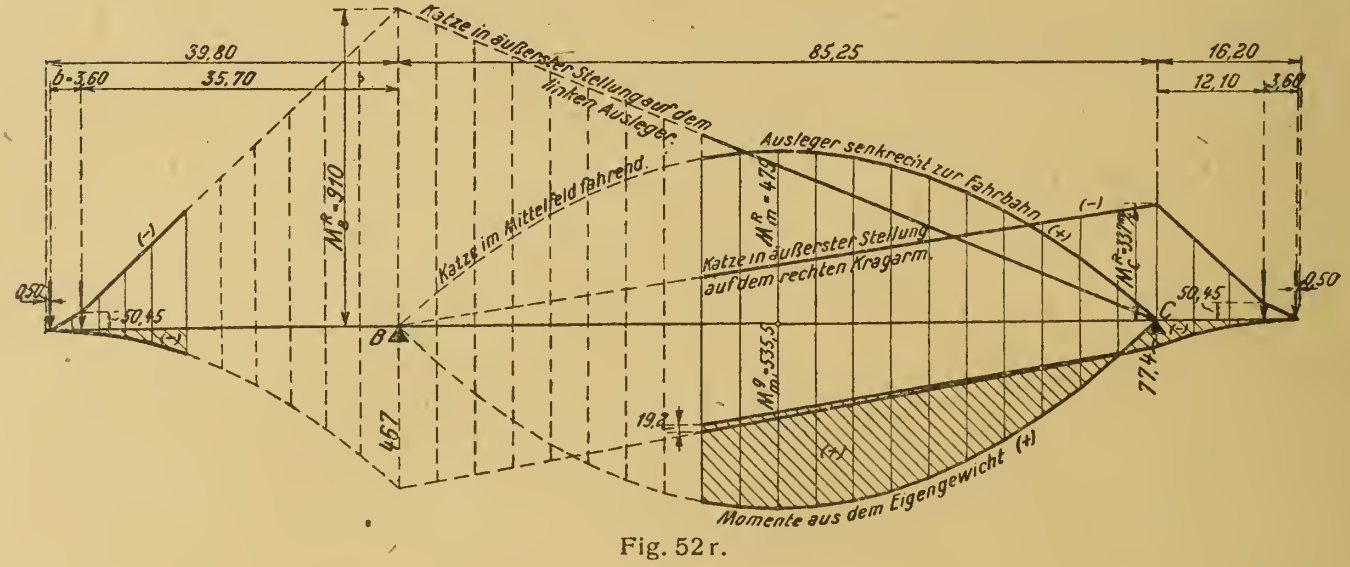


Fig. 52 r.

a) Die Momente aus dem Eigengewicht. Auftragung Fig. 52 r.

b) Die Momente aus der fahrenden Katze.

In derselben Figur sind einmal die Momente dargestellt, wenn die Katze sich in der äußersten Stellung auf dem großen Kragarm befindet, und das andere Mal, wenn sie das Ende des rechten Krag-

armes erreicht hat. Fährt die Katze im großen Mittelfeld der Brücke, dann ergibt sich ein Maximalmoment von:

$$M_R = \frac{R}{2 \cdot l}\left(l - \frac{b}{2}\right)^2.$$

Streng genommen verläuft die Maximalmomentenlinie für den ganzen Träger nach einer herzförmigen Kurve, allein wegen des zur Trägerlänge geringen Radstandes b darf statt dessen eine gewöhnliche Parabel mit der Pfeilhöhe M_R angenommen werden (Fig. 52 r).

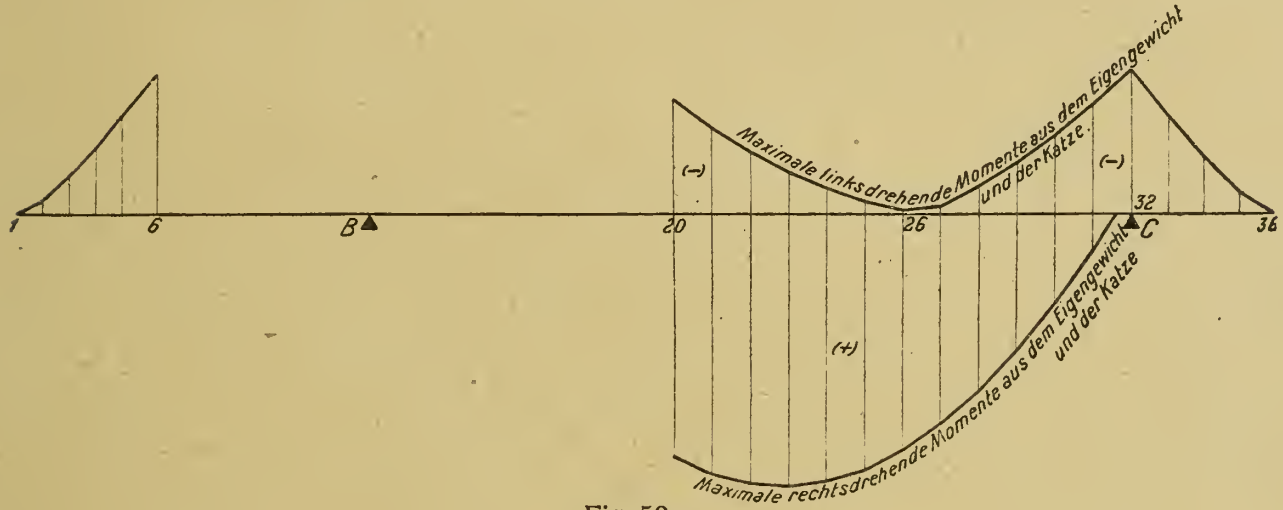


Fig. 52 s.

In der Fig. 52 s sind die ungünstigsten positiven und negativen Momente aus dem Eigengewicht und der Katze zusammengestellt.

Die Spannkräfte der Diagonalstäbe des parallelen, außerhalb der Überspannung liegenden Trägerteils wurden auf Grund der Querkräfte ermittelt (Fig. 52 t).

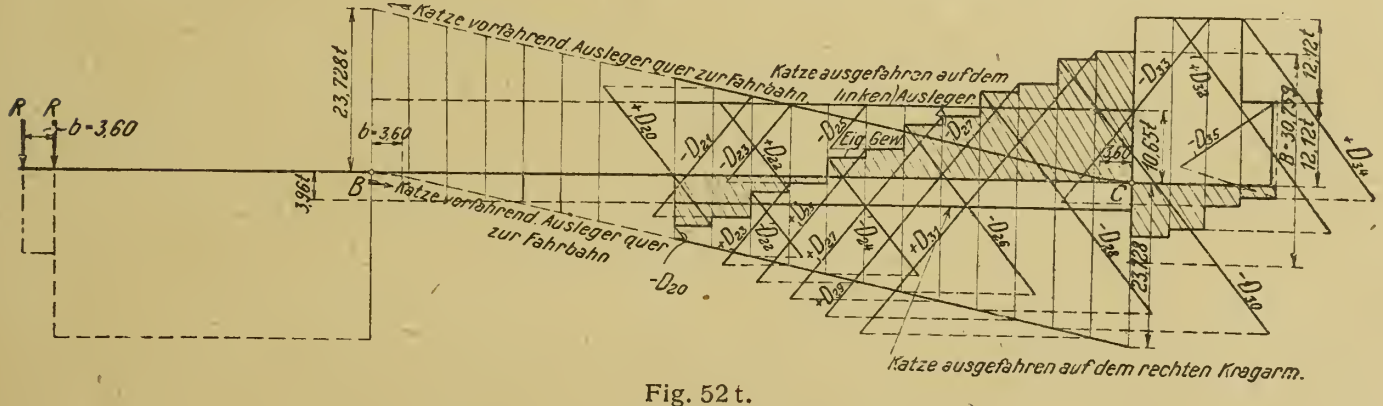


Fig. 52 t.

Die Bestimmung der Diagonalspannungen der schrägen Auslegerschnäbel geschieht mit Hilfe von Einflußlinien.

Natürlich werden alle zusätzlichen Spannungen aus Wind, Massenbeschleunigungen, Bremskräften usw. berücksichtigt.

Die portalartigen Brückenstützen werden als Zweigelenkbogen mit verbindendem Zugband an den Füßen durchgerechnet.

Bei den Stützen insbesondere zeigt sich die Bedeutung der Kräfte aus der Massenbewegung bzw. dem Abbremsen des fahrenden Kranes. Es erscheint daher angebracht, an dieser Stelle Näheres über den Gegenstand »Bremskräfte bei Kranen« mitzuteilen.

Die in Frage stehenden Kräfte lassen sich nur annähernd und bei gewissen Voraussetzungen ermitteln. Im allgemeinen sind sie abhängig von den elastischen Vorgängen in der bewegten und zur Ruhe gebrachten Eisenmasse. Hiervon ausgehend lassen sich die Kräfte selbst bei einfacheren Konstruktionen nur mit Schwierigkeiten herleiten, wobei die Resultate dann immer noch ungenau und unter Umständen sogar wertlos sind.

Man betrachte den in der Fig. 53 dargestellten Laufwagen. Die Last Q liege in der Mitte des Balkens und werde als starr angenommen. Sodann möge die Federung aller übrigen Konstruktionsteile vernachlässigt und nur die Elastizität des Balkens in wagerechter Richtung berücksichtigt werden. Als Gewicht sei nur $Q = M \cdot g$ eingeführt.

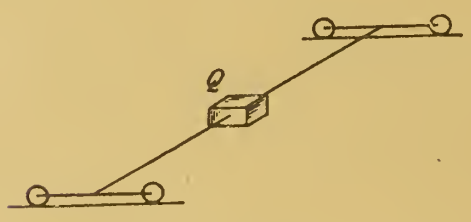


Fig. 53.

Der Wagen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v.

Die lebendige Kraft der Last ist:

$$L = \frac{M}{2} \cdot v^2.$$

Es werden alle vier Räder plötzlich zugleich gebremst. Bei der Annahme nun, daß der Balken starr ist, wird die lebendige Kraft L im Verlaufe des sofort einsetzenden Gleitens der Räder auf den Schienen durch Reibungsarbeit vernichtet. Die Länge des Gleitwegs richtet sich nach der Geschwindigkeit v. Die größte beim Gleiten der Räder auftretende wagerechte Kraft ist:

$$H = Q \cdot \mu,$$

wo μ den Reibungskoeffizient der gleitenden Räder auf den Schienen bedeutet.

Die Kraft H ist konstant. Bezeichnet s den Gleitweg, dann muß sein

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = H \cdot s,$$

oder

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = Q \cdot \mu \cdot s = M \cdot g \cdot \mu \cdot s,$$

hieraus

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \mu}.$$

Da jedoch der Balken elastisch ist, wird ein Teil der lebendigen Kraft L infolge der Formänderung desselben verzehrt.

Es läßt sich ermitteln, bei welcher Fahrgeschwindigkeit v die lebendige Kraft L beim Abbremsen des Wagens noch gerade ganz in elastische Formänderungsarbeit des Balkens umgesetzt wird.

Bezeichnet f die größte wagerechte Ausweichung des Balkens nach erfolgter Bremsung, dann ist:

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = H \cdot \frac{f}{2} = \frac{H}{2} \cdot H \cdot f_1 = \frac{H^2}{2} \cdot f_1,$$

wo f_1 die wagerechte Ausweichung des Balkens bei der Belastung durch $H = 1$ bedeutet.

Es folgt

$$H = v \sqrt{\frac{M}{f_1}}.$$

Setzt man diesen Wert gleich der im Augenblick des Gleitens der Räder einsetzenden Schubkraft, also:

$$v \sqrt{\frac{M}{f_1}} = Q \cdot \mu,$$

dann ergibt sich

$$v = \mu \sqrt{Q \cdot g \cdot f_1}.$$

Erreicht die Fahrgeschwindigkeit nicht diesen Wert, dann ist H kleiner als $Q \cdot \mu$. Überschreitet sie ihn, dann geht der Schub über in das Maximum

$$H = Q \cdot \mu.$$

Vorstehendes Beispiel zeigt, daß sich diesen Aufgaben, falls ganz einfache Verhältnisse vorliegen, ziemlich gut beikommen läßt. Meistens sind jedoch die Konstruktionen derart verwickelt, daß ihr elastischer Einfluß auf den Schub H nicht annähernd ermittelt werden kann. Man vergegenwärtige sich nur die Elastizität des Katzengerüstes, dann das Pendeln der Last, oder die Spielräume in den Maschinenteilen. Alles Dinge, die außer der schwer zu fassenden Elastizität des sperrigen Krangerüstes ihren Beitrag zu den Vorgängen liefern.

Nun haben aber Versuche ergeben, daß die Räder an Kranen, wenn sie vollständig abgebremst werden, schon bei geringer Ge-

schwindigkeit des Gerüstes gleiten. Dies besagt, daß nur ein geringer Teil der lebendigen Kraft L in elastische Formänderungsarbeit der Konstruktion umgesetzt wird, daß vielmehr der Hauptbetrag durch Gleiten der Räder auf den Schienen zum Auswirken kommt. Es beruht dies hauptsächlich in der verhältnismäßig großen Starrheit des Krangerüstes.

Dieser Umstand nun enthebt uns der Mühe, komplizierte, kaum nutzbare theoretische Untersuchungen anzustellen, liefert vielmehr eine Grundlage für die einigermaßen sichere Lösung der in Frage stehenden Aufgabe. Mit anderen Worten, wir verfügen nunmehr über ein Mittel zur Berechnung der Bremskräfte, bei dem die elastischen Einflüsse der Konstruktion in Fortfall kommen.

Es sei gegeben der Bock einer Verladebrücke, an dessen Kopf in fester Verbindung das Gewicht Q angreift (Fig. 53 a). Die Bewegungsrichtung ist in der Figur angegeben.

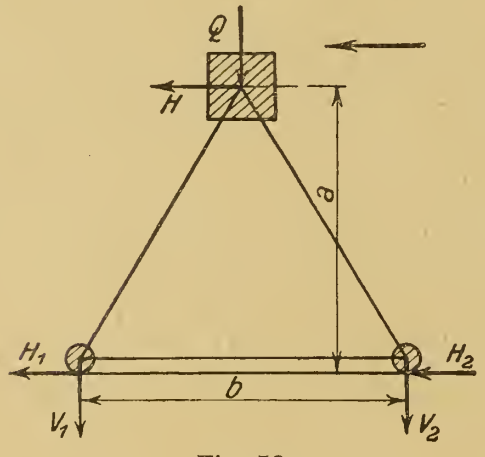


Fig. 53 a.

Fall I. Beide Räder werden zugleich abgebremst.

Der maximale, beim Gleiten der Räder auftretende wagerechte Widerstand am Schienenkopf ist

$$H = Q \cdot \mu.$$

Auf das linke Rad entfällt H_1, auf das rechte Rad H_2.

Es muß sein

$$H_1 + H_2 = H.$$

Diese Kraft wirkt zugleich im Schwerpunkt des Gewichtes Q.

Bezeichnet b die Entfernung der beiden Räder und a die Höhenlage des Gewichtes Q über der Schiene, dann ist

$$H_1 = \frac{Q}{2} + H \cdot \frac{a}{b} \cdot \mu = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \cdot \mu \right) \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

und

$$H_2 = \frac{Q}{2} - H \cdot \frac{a}{b} \cdot \mu = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mu \right) \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Hieraus folgen die vertikalen Drucke der Räder auf die Schiene:

$$V_1 = \frac{H_1}{\mu} = Q \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \cdot \mu \right),$$

$$V_2 = \frac{H_2}{\mu} = Q \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mu \right).$$

Bei einem bestimmten Verhältnis von a zu b wird $V_2 = 0$, d. h. das Bockgerüst befindet sich gerade im Zustande des Kippens. Dies tritt ein, wenn:

$$V_2 = Q\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b}\cdot\mu\right) = o,$$

mithin bei

$$a = \frac{b}{2\cdot\mu}.$$

Hierbei werden H_1 und V_1 am größten, nämlich

$$H_1 = Q\cdot\mu \qquad \text{und} \qquad V_1 = Q.$$

Auf Grund der vorstehend ermittelten Kräfte, und wenn man beachtet, daß die Fahrrichtung wechseln kann, läßt sich nunmehr die Berechnung des Bockes weitgehend durchführen.

In derselben Weise werden die Kräfte H zur Berechnung der Brücke aufgestellt.

Fall II. Es wird nur das linke Rad abgebremst.

Das rechte Rad (Fig. 53 b) rollt lose mit, infolgedessen bringt nur das linke Rad einen Widerstand auf $H_1 = H$. Es läßt sich folgende Beziehung anschreiben:

$$H = \frac{Q}{2}\cdot\mu + H\cdot\frac{a}{b}\cdot\mu,$$

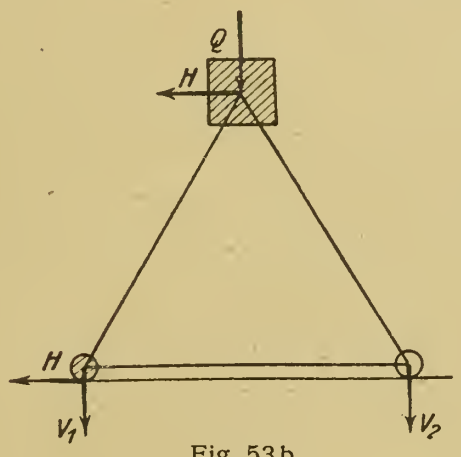


Fig. 53 b.

hieraus

$$H = \frac{Q\cdot\mu}{2\left(1 - \frac{a}{b}\cdot\mu\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Weiter ergibt sich

$$V_1 = \frac{H}{\mu} = \frac{Q}{2\left(1 - \frac{a}{b}\cdot\mu\right)}.$$

Es muß sein

$$V_1 + V_2 = Q,$$

oder

$$V_2 = Q - V_1 = Q - \frac{Q}{2\left(1 - \frac{a}{b}\cdot\mu\right)},$$

oder auch

$$V_2 = \frac{Q}{2} - H\cdot\frac{a}{b}.$$

Beide Gleichungen ergeben

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1 - \frac{2 \cdot a}{b} \cdot \mu}{1 - \frac{a}{b} \cdot \mu}.$$

Der senkrechte Druck V_2 am rechten Rad wird Null, wenn $V_1 = Q$ ist, also

$$Q = \frac{Q}{2\left(1 - \frac{a}{b} \cdot \mu\right)},$$

oder wenn

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{1 - \frac{2 \cdot a}{b} \cdot \mu}{1 - \frac{a}{b} \cdot \mu} = o, \text{ nämlich bei } a = \frac{b}{2 \cdot \mu},$$

d. h., bei diesem Wert von a kippt der Bock. Hierbei ist $H = Q \cdot \mu$.

Fall III. Es wird nur das rechte Rad abgebremst. Jetzt läuft das linke Rad (Fig. 53 c) lose mit, und der Widerstand H liegt nur am rechten Rad, $H_2 = H$.

Ähnlich wie oben besteht

$$H = \frac{Q}{2} \cdot \mu - H \cdot \frac{a}{b} \cdot \mu.$$

Hieraus

$$H = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(1 + \frac{a}{b} \cdot \mu\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Es folgt

$$V_2 = \frac{H}{\mu} = \frac{Q}{2\left(1 + \frac{a}{b} \cdot \mu\right)},$$

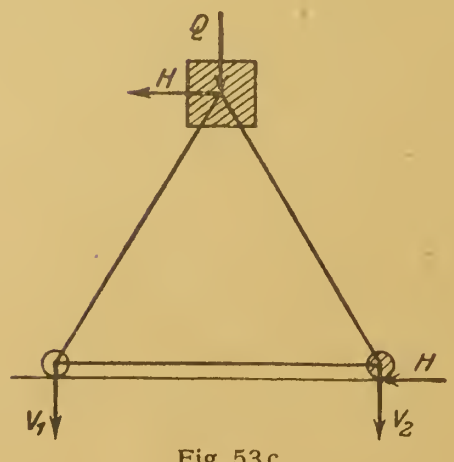


Fig. 53 c.

und aus

$$V_1 = Q - V_2$$

ergibt sich

$$V_1 = Q - \frac{Q}{2\left(1 + \frac{a}{b} \cdot \mu\right)},$$

oder auch

$$V_1 = \frac{Q}{2} + H \cdot \frac{a}{b},$$

hieraus

$$V_1 = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \mu}{1 + \frac{a}{b} \cdot \mu}.$$

Bei dieser Bremsung am rechten Rade kann der Bock nicht kippen.

Bisher wurde angenommen, daß das Gewicht Q fest mit der Bockkonstruktion verbunden ist. Meistens ist jedoch die Last lose aufgesetzt, wie z. B. die Katze auf die Schienen des Krangerüstes. Es soll versucht werden, auch für diesen Fall die Bremskräfte aufzustellen.

Fall IV (vgl. Fall I). Es werden wieder beide Räder zugleich gebremst.

Nach den Ermittelungen bei Fall I lassen sich wieder folgende Formeln anschreiben (Fig. 53 d):

$$H_1 = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \cdot \mu\right), \quad H_2 = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mu\right),$$

$$H_1 + H_2 = Q \cdot \mu,$$

$$V_1 = Q \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \cdot \mu\right), \qquad V_2 = Q \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mu\right),$$

$$V_1 + V_2 = Q.$$

Für die lose aufgesetzte Last Q sei vorausgesetzt, daß die Unterkonstruktion entweder starr ist, oder ihre Fußpunkte 1 und 2 gleiche Elastizität besitzen. Dann ergibt sich

$$H'_1 = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} + \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right), \qquad H'_2 = Q \cdot \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right),$$

$$H'_1 + H'_2 = H = Q \cdot \mu;$$

$$V'_1 = Q \left(\frac{1}{2} + \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right), \qquad V'_2 = Q \left(\frac{1}{2} - \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right),$$

$$V'_1 + V'_2 = Q.$$

Überschreitet die Höhe a' den Wert

$$a' = \frac{b'}{2 \cdot \mu},$$

dann kippt die aufgesetzte Last Q.

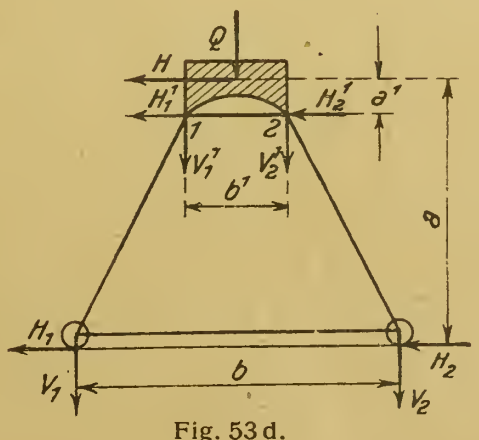


Fig. 53 d.

Bei der Annahme, daß der rechte Fußpunkt 2 vollständig nachgiebig ist,

muß die ganze wagerechte Kraft H von dem linken Fußpunkt 1 aufgenommen werden. Die Kraft $H = Q \cdot \mu$ überwiegt aber den unter Fall I abgeleiteten Reibungswiderstand am linken Fuß, nämlich den Wert

$$H' = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(1 - \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right)},$$

weshalb ein direkter seitlicher Widerstand durch Anlegen des Räderspurkranzes gegen die Schiene erfolgen muß.

Dasselbe tritt ein, wenn der Fußpunkt 1 links als vollständig elastisch angenommen wird. Auch hier ist $H = Q \cdot \mu$ größer als der Reibungswiderstand

$$H'' = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(1 + \frac{a'}{b'} \cdot \mu\right)}$$

am rechten Endpunkt 2, so daß dieser sich fest gegen die Schiene legen wird.

Ist die wagerechte Elastizität der Fußpunkte 1 und 2 verschieden, beispielsweise ausgedrückt durch J_1 und J_2, dann ergibt sich folgendes: Es möge J_2 kleiner sein als J_1, dann übersteigt $H = Q \cdot \mu$ bereits die gesamten Reibungswiderstände $(H' + H'')$, und es muß ein direkter Seitenwiderstand bei 1 erfolgen, der den Überschuß von H über $H' + H''$ aufnimmt.

Für die Praxis genügt die oben gemachte Annahme, daß beide Fußpunkte unnachgiebig oder gleich elastisch sind.

Fall V (vgl. Fall II). Es werde nur das linke Rad abgebremst.

Nach dem Fall II war

$$H = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mu\right)} \text{ usf.}$$

Weiter läßt sich für die aufgesetzte Last Q schreiben

$$V'_1 = \frac{Q}{2} + H \cdot \frac{a'}{b'} \quad \text{und} \quad V'_2 = \frac{Q}{2} - H \cdot \frac{a'}{b'}.$$

Bei gleicher Elastizität der Fußpunkte 1 und 2 geht H zur Hälfte auf jeden Fuß über. Bei verschieden großer Elastizität (ausgedrückt durch J_1 und J_2) verteilt sich H wie folgt:

$$H'_1 = H \cdot \frac{J_1}{J_1 + J_2} \quad \text{und} \quad H'_2 = H \cdot \frac{J_2}{J_1 + J_2}.$$

Fall VI (vgl. Fall III). Es werde nur das rechte Rad abgebremst.

Nach dem Fall III war

$$H = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(1 + \frac{a}{b} \cdot \mu\right)} \text{ usf.}$$

Sodann besteht für die aufgesetzte Last Q

$$V'_1 = \frac{Q}{2} + H \cdot \frac{a'}{b'} \quad \text{und} \quad V'_2 = \frac{Q}{2} - H \cdot \frac{a'}{b'}.$$

Hinsichtlich der Verteilung von H auf die beiden Fußpunkte 1 und 2 gilt dasselbe wie vorher.

Zwecks Anwendung der vorstehenden Ausführungen möge folgendes Zahlenbeispiel gerechnet werden (Fig. 53 e).

Gegeben ein Laufkran von 60 t Tragfähigkeit.

$Q_1 = 80$ t (Katze mit angehängter ganz hochgezogener Last),
$Q_2 = 30$ t (Trägergewicht),
$a = 4$ m, $b = 2{,}5$ m,
$a' = 2{,}5$ m, $b' = 1{,}0$ m,
$\mu = 0{,}15$ (Stahlguß auf Flachstahl).

1. Die Bremskraft H aus Q_1 (Fig. 53 e und 53 f).

Die Katze wird in die Mitte des Trägers gestellt. Bremsung der Räder A und B links. Vgl. Fall II und V.

$$H = \frac{Q_1 \cdot \mu}{2\left(1 - \frac{a}{b} \cdot \mu\right)} = \frac{80 \quad 0{,}15}{2\left(1 - \frac{4}{2{,}5} \cdot 0{,}15\right)} = \frac{12}{2\,(1 - 0{,}24)}$$

$$= \frac{12}{2 \cdot 0{,}76} = 7{,}9 \text{ t}.$$

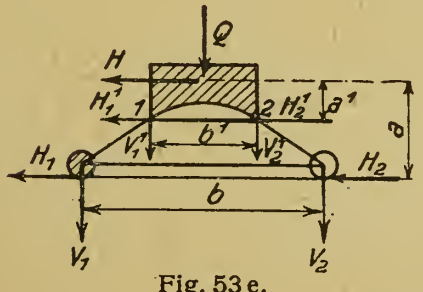


Fig. 53 e.

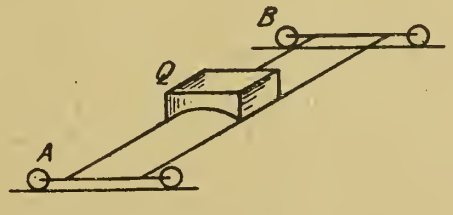


Fig. 53 f.

Die senkrechten Raddrucke auf die Kranlaufbahn betragen für ein Rad

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7{,}9}{0{,}15} = 26{,}3 \text{ t}.$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{2} - V_1 = \frac{80}{2} - 26{,}3 = 13{,}7 \text{ t}.$$

Es werde gleiche wagerechte Elastizität der beiden Katzenbahnen angenommen. Nach Fall V verteilt sich H zur Hälfte auf jede Katzenlaufschiene

$$H = \frac{7{,}9}{2} = 3{,}95 \text{ t}.$$

Die senkrechten Drucke der Katzenlaufräder auf die Schiene ergeben sich zu

links
$$V'_1 = \left\{\frac{Q_1}{2} + H \cdot \frac{a'}{b'}\right\} \frac{1}{2} = \left\{\frac{80}{2} + 7{,}9 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}0}\right\} \frac{1}{2}$$
$$= \left\{40 + 19{,}7\right\} \frac{1}{2} = \sim 29{,}9 \text{ t}.$$

rechts
$$V'_2 = \left\{\frac{Q_1}{2} - H \cdot \frac{a'}{b'}\right\} \frac{1}{2} = \left\{\frac{80}{2} - 7{,}9 \cdot \frac{2{,}5}{1{,}0}\right\} \frac{1}{2}$$
$$= \left\{40 - 19{,}7\right\} \frac{1}{2} = \sim 10{,}2 \text{ t}.$$

2. Die Bremskräfte H aus Q_2.

Der Schwerpunkt der Trägermasse liegt zufällig in der Höhe der Kranlaufschiene. Dann geht die Gleichung Fall II, nämlich

$$H = \frac{Q \cdot \mu}{2\left(1 - \frac{a}{b} \cdot \mu\right)}$$

über in

$$H = \frac{Q \cdot \mu}{2}.$$

Die Zahlen liefern

$$H = \frac{30 \cdot 0{,}15}{2} = 2{,}25 \text{ t}.$$

Auf jede Seite (Hälfte) der Trägerkonstruktion $H = \sim 1{,}30$ t.

Die Kraft belastet den Kranträger in wagerechter Richtung gleichmäßig verteilt.

Von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist bei den großen Abmessungen die Formänderung der betriebenen Brücke. Es kommt darauf an, den Hauptträgern die richtigen Überhöhungen zu geben, das heißt, dafür zu sorgen, daß die Laufbahn jeweils beim Durchfahren der Katze tunlichst wenig Ansteigungen oder Gefälle bietet.

a) Die Biegungslinie aus dem Eigengewicht. Sie wird auf Grund der tatsächlichen Querschnitte und Stabkräfte mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes ermittelt (siehe Fig. 52 u).

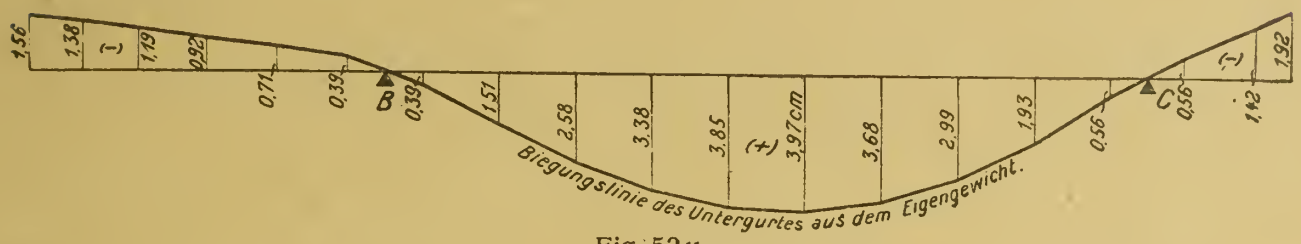


Fig. 52 u.

b) Die Biegungslinie aus der Katze. Zunächst wird die Deformationslinie des Untergurtes für die Belastung $P = 1$ t am Ende a des großen Auslegers entwickelt (Fig. 52 v). Diese Linie stellt zugleich die Einflußlinie für die senkrechte Bewegung des Punktes a dar. Sie liefert die Senkung des Punktes bei ausgefahrener Katze und zugleich die bei dieser Belastung eintretende Biegungslinie des ganzen Trägeruntergurtes. In der Fig. 52 w ist die Deformationslinie bei Wirkung des Eigengewichtes und der auf dem großen Ausleger ausgefahrenen Katze dargestellt.

Ebenso wird bezüglich des Punktes b in der Mitte der großen Spannweite verfahren. Die Fig. 52 x zeigt die Biegungslinie des Trägeruntergurtes bei der Belastung durch $P = 1$ t in dem fraglichen Punkte. Diese Linie bedeutet gleichfalls die Einflußlinie für die lotrechte Bewegung des letzteren. Sie gestattet die Ermittelung der Senkung von b bei Belastung durch die Katze an dieser Stelle und ergibt ferner die zugleich in die Erscheinung tretende Biegungslinie des ganzen Brückenuntergurtes. In der Fig. 52 y ist schließlich die resultierende Deformationslinie aus dem Eigengewicht und der Katze in Trägermitte aufgerissen.

Auf Grund dieser Feststellungen werden die in der Fig. 52 angegebenen Überhöhungen des Brückensystems ausgemittelt bzw. festgelegt.

Zur Berechnung der Stütze wird noch folgendes bemerkt. Die senkrechte Belastung setzt sich zusammen aus dem Brückeneigengewicht und dem Gewicht der belasteten, ganz auf dem großen Ausleger ausgefahrenen Drehlaufkatze. Wegen des Zugbandes zwischen den Füßen ist diese Aufgabe einfach statisch unbestimmt. Man wählt als statisch unbestimmte Größe den Zug X in dem Zugband. Dieser Fall ist unter Beispiel 35 bereits behandelt worden. Sodann ist die Stütze für die wagerechte Belastung aus Wind oder den Brems-

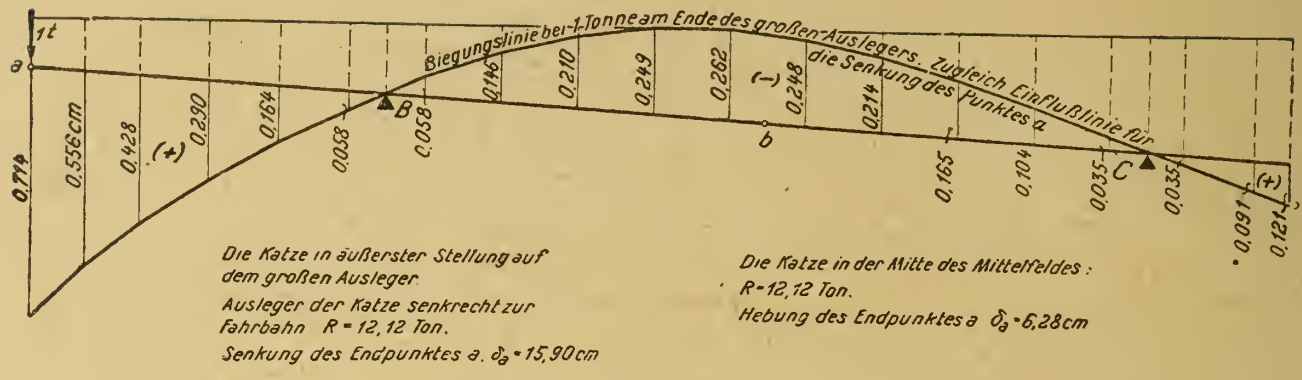


Fig. 52v.

Die Katze in äußerster Stellung auf dem großen Ausleger.
Ausleger der Katze senkrecht zur Fahrbahn R = 12,12 Ton.
Senkung des Endpunktes a. δ_a = 15,90cm

Die Katze in der Mitte des Mittelfeldes:
R = 12,12 Ton.
Hebung des Endpunktes a δ_a = 6,28cm

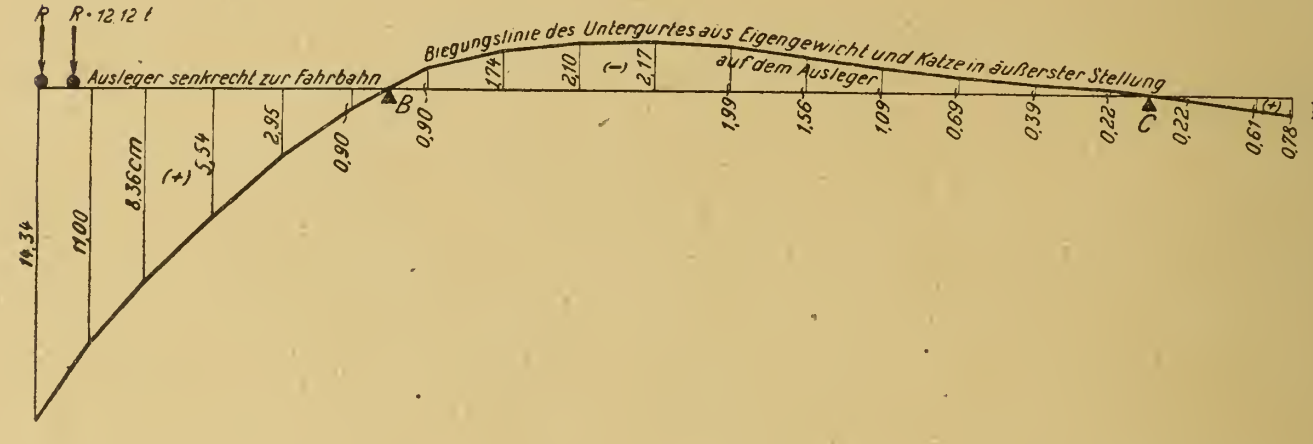


Fig. 52w.

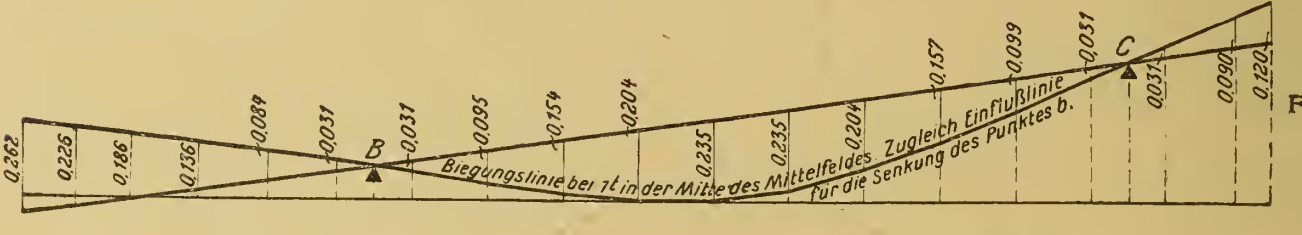


Fig. 52x.

Die Katze in äußerster Stellung auf dem Ausleger
R = 12,12 Ton.
Hebung des Punktes b δ_b = 6,05cm

Die Katze in der Mitte des Mittelfeldes:
R = 12,12 Ton
Senkung des Punktes b. δ_b = 5,70cm

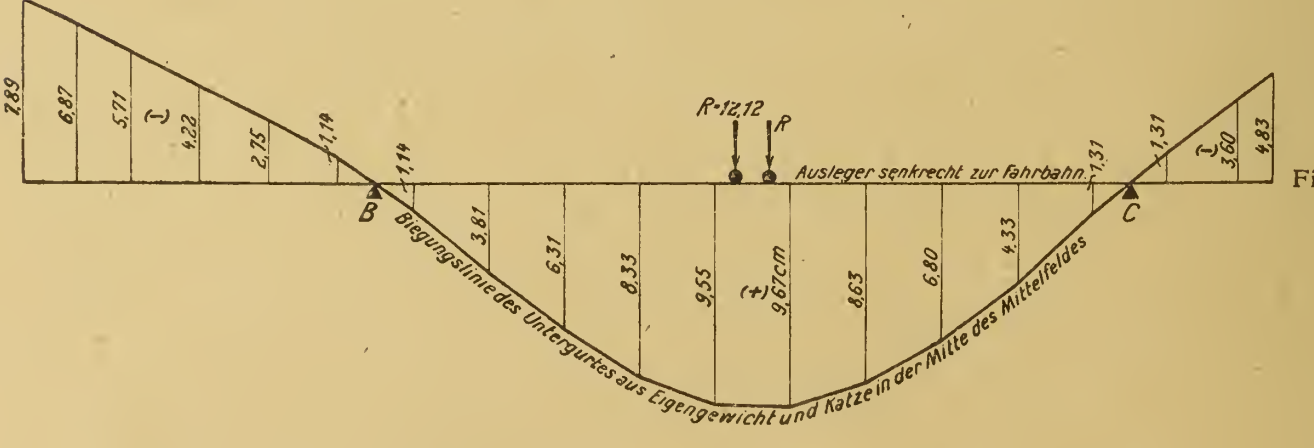


Fig. 52y.

kräften zu untersuchen. Wegen der Symmetrie der Konstruktion ist diese Aufgabe statisch bestimmt; der Schub wird durch das Zugband zur Hälfte auf jeden Fuß verteilt. Unter diesen Umständen wirkt das System als Dreigelenkbogen; die Spannkraft im oberen wagerechten Stab (gegenüber dem Gelenk im Scheitel) ist gleich Null.

Beispiel 43. Ein Verladegerüst nach Fig. 54. Vollwandiger Hauptträger mit Überspannung. Das System ist einfach statisch unbestimmt. Als statisch Unbestimmte wählt man die wagerechte Seitenkraft X der Spannkraft in der Überspannung.

Aufgaben ähnlicher Art wurden bereits früher bei Laufkranen und Kranbahnen behandelt. (Siehe insbesondere Beispiel 20.)

Man denkt sich das Zugband im Punkte a durchschnitten und an den Schnittenden die Kräfte $X = -1$ entgegengesetzt gerichtet angebracht. Unter dem Einfluß dieser Belastung verbiegt sich der Balken, und es tritt zugleich eine Erweiterung δ_a' der Schnittstelle ein.

Die Biegungslinie des Balkens ergibt sich, wenn man die Form der Überspannung als Belastung wirken läßt und hierfür das Seilpolygon zeichnet (Fig. 54 a und 54 b). Das Seilpolygon bekommt beim Aufzeichnen eine zufällige Gestalt und Lage; man braucht nur durch die Punkte A und B eine Gerade zu ziehen; in der Fig. 54 b sind die so gefundenen Ordinaten η auf einer Wagerechten aufgetragen.

In derselben Figur ist die zugleich eintretende Erweiterung δ_a' ermittelt. Diese Konstruktion bedarf, da es sich um einen einfachen Verschiebungsplan handelt. der früher bereits erklärt wurde, keiner weiteren Erläuterung.

Vernachlässigt man den geringen Einfluß der Längenänderung der Stäbe, dann bewirkt eine Last auf dem Balken

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a'}.$$

Man kann jedoch dem Einfluß der Längenänderung der Stäbe durch Vergrößerung des Wertes δ_a' um 5—10% Rechnung tragen.

Erscheint die genaue Berücksichtigung der Längenänderung geboten, dann beträgt dieser Einfluß nach früherem

$$\delta_a'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Es wird also

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a' + \delta_a''} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a}.$$

Man hat nur noch notwendig, den Wert δ_a'' auf den richtigen Maßstab bezüglich η und δ_a' zu bringen. Hierzu muß man den wahren Wert δ_a' wissen. Dieser ermittelt sich nach der Bedingungsgleichung

$$\delta_a' = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx$$

zu

$$\delta_a' = \frac{X \cdot h^2}{3\,J \cdot E}(a + b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Oder wenn $X = 1$

$$\delta_a' = \frac{1 \cdot h^2}{3 \cdot J \cdot E}(a + b).$$

Der Einfachheit wegen setzt man $E = 1$ und erhält

$$\delta_a' = \frac{1 \cdot h^2}{3\,J}(a + b)$$

und

$$\delta_a'' = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}.$$

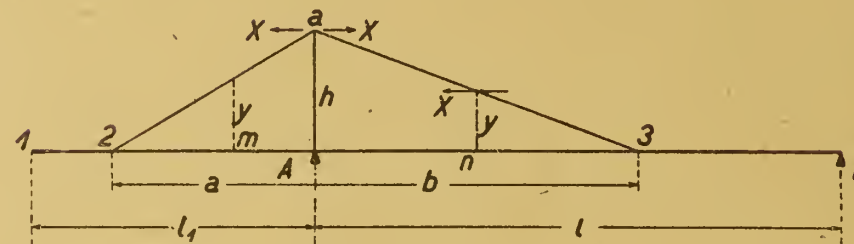


Fig. 54.

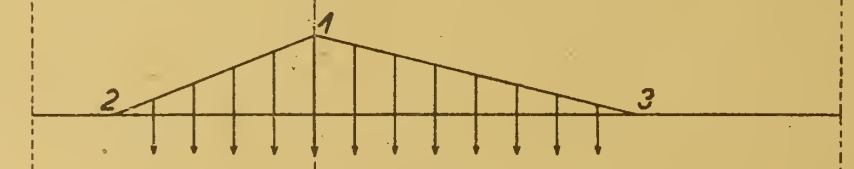


Fig. 54a.

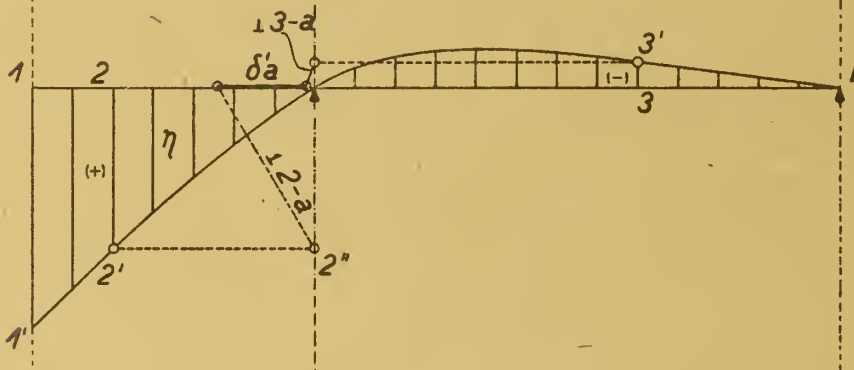


Fig. 54b.

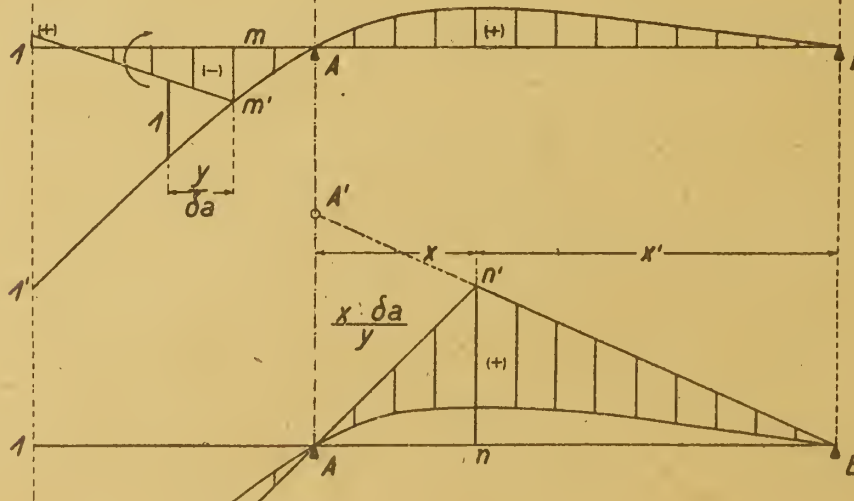


Fig. 54c.

Fig. 54d.

Nach Ermittelung des Maßstabes $\mathfrak{M}$ ergibt sich schließlich

$$X = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} = P \cdot \frac{\eta}{\delta_a' + \mathfrak{M} \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}}.$$

Vergleiche Beispiel 20.

Einflußlinie des Momentes an der Stelle m des Auslegers.

Die Last P befindet sich nach links im Abstande x von m.

$$M_m = P \cdot x - X \cdot y = P \cdot x - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot y$$

oder wenn $P = 1$

$$M_m = \frac{1 \cdot y}{\delta_a} \left\{ \frac{x \cdot \delta_a}{y} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$M_m^0 : x = 1 : \frac{y}{\delta_a}$$

schreiben und graphisch auftragen. Das zweite Glied η ist durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben (Fig. 54 c).

Zwei Lasten auf dem Balken liefern zum Beispiel

$$M_m = \frac{y}{\delta_a} \{ P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 \}.$$

Einflußlinie für die Stelle n des Balkens.

Die Last P im Punkte n bewirkt

$$M_n = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - X \cdot y = \frac{P \cdot x' \cdot x}{l} - P \cdot \frac{\eta}{\delta_a} \cdot y$$

oder wenn $P = 1$

$$M_n = \frac{1 \cdot y}{\delta_a} \left\{ \frac{x' \cdot x \cdot \delta_a}{l \cdot y} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer kann wieder als Verhältnis

$$M_n^0 : x' = \frac{x \cdot \delta_a}{y} : l$$

geschrieben und graphisch dargestellt werden. Linienzug $B - n' - A'$ bzw. $n' - A - 1''$. Das zweite Glied ist gegeben durch die Biegungslinie (Fig. 54 d).

Zwei Lasten ergeben wieder

$$M_n = \frac{y}{\delta_a} \{ P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 \}.$$

Das vorstehend gezeigte Verfahren zur Ermittelung des Wertes δ_a und der Biegungslinie kann natürlich bei jeder beliebig gestalteten Überspannung angewendet werden, wobei das an sich schon sehr bequeme Verfahren noch dadurch an Einfachheit gewinnt, wenn man den graphisch ermittelten Wert δ_a' mit Rücksicht auf den Einfluß der Längenänderung um etwa 5 bis 10% erhöht. Man erspart dadurch die etwas umständliche Berechnung des Beitrages $\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F}$ sowie die Ermittelung der wahren Größe δ_a' nach der Bedingungsgleichung

$$\delta_a' = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx.$$

Beispiel 44. Ein auf Verdrehen beanspruchter Brückenquerschnitt (Fig. 55). Die Brücke besteht aus zwei senkrechten Trägerwänden, die untereinander oben und unten durch wagerechte Verbände verbunden sind. Ferner befinden sich in jedem Fachwerkfelde Queraussteifungen. Die Verdrehung des Trägersystems wird durch einen einseitig ausladenden Kran hervorgerufen.

Diese so häufig vorkommende Aufgabe wird meistens umgangen; man vernachlässigt die Wirkung der Querverbindungen und schreibt den beiden Hauptträgern einfach ihre gewöhnlichen statisch bestimmten Anteile an der einseitigen Belastung zu. In Wirklichkeit üben die Querverbindungen eine starke Wirkung aus, indem sie die sonst spannungslosen wagerechten Verbände mit zur Kraftaufnahme heranziehen und dadurch die Hauptträger nicht unerheblich entlasten.

Für die folgende Untersuchung möge vorausgesetzt werden, daß die Hauptträger unter sich und die wagerechten Verbände unter sich gleich sind.

Die Excentrizität der Last R in bezug auf die Schwerachse des Trägervierecks sei e (Fig. 55 und 55 a).

Denkt man sich die Querverbindungen gelöst (Fig. 55 e), dann erhält jeder Hauptträger aus dem Moment $R \cdot e$ die Belastung

$$+ R \cdot \frac{e}{a} \text{ bzw. } - R \cdot \frac{e}{a}.$$

Zugleich verschieben sich die beiden Träger gegeneinander in senkrechter Richtung.

Spannt man die Querverbindung wieder an, dann entstehen nach Fig. 55 c in den Hauptwänden die entgegengesetzt gerichteten

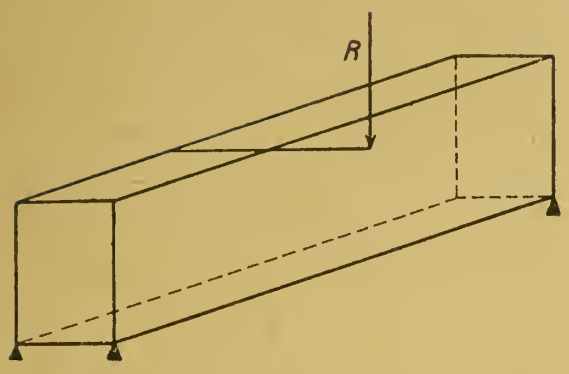


Fig. 55.

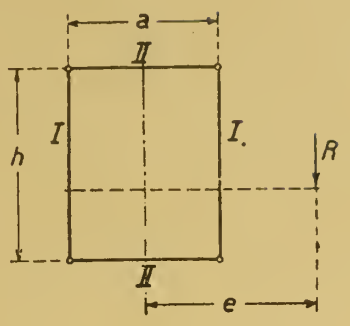


Fig. 55a.

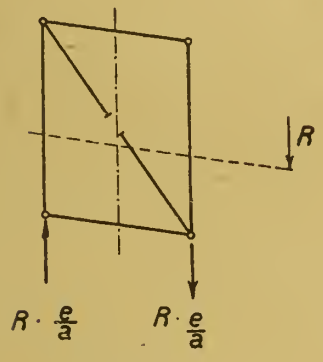


Fig. 55b.

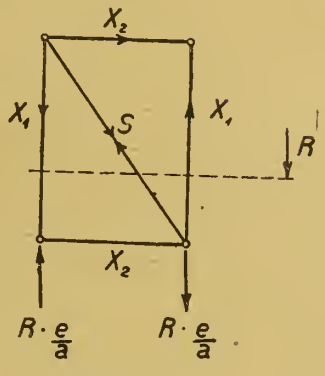


Fig. 55c.

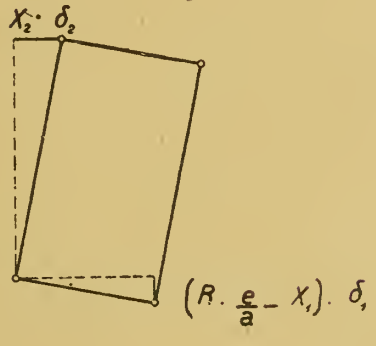


Fig 55d.

Kräfte X_1 und in den wagerechten Trägern die Kräfte X_2. Es muß sein

$$X_1 \cdot a = X_2 \cdot h.$$

Es bezeichnen

δ_1 die Verschiebung des Hauptträgers aus $X_1 = 1$,
δ_2 die Verschiebung des wagerechten Trägers aus $X_2 = 1$.

Nach Fig. 55 d besteht zwischen den tatsächlichen Verschiebungen der Träger folgende Beziehung

$$X_2 \cdot \delta_2 : h = \left(R \cdot \frac{e}{a} - X_1\right) \cdot \delta_1 : a$$

oder

$$X_2 = \left(R \cdot \frac{e}{a} - X_1\right) \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = X_1 \cdot \frac{a}{h},$$

hieraus

$$X_1 = R \cdot \frac{e}{a} \frac{h^2 \cdot \delta_1}{a^2 \cdot \delta_2 + h^2 \cdot \delta_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

weiter folgt

$$X_2 = R \cdot \frac{e}{a} \frac{a \cdot h \cdot \delta_1}{a^2 \cdot \delta_2 + h^2 \cdot \delta_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Die tatsächliche Belastung der Hauptträger ist hiernach:
Hauptträger links

$$\frac{R}{2} - R \cdot \frac{e}{a} + X_1 = \frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} - e\right) + X_1 \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Hauptträger rechts

$$\frac{R}{2} + R \cdot \frac{e}{a} - X_1 = \frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} + e\right) - X_1 \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Die wagerechten Verbände erhalten die Kräfte X_2.

Die vorstehenden Beziehungen gelten für jede Stellung von R innerhalb der Spannweite. Maßgebend für das Ergebnis sind jedesmal die Größen δ_1 und δ_2. Strenggenommen wirkt nicht allein die Quersteifung in der Ebene der Last R, sondern es üben auch alle anderen Querverbindungen einen Einfluß aus. Dieser ist jedoch von untergeordneter Bedeutung und kann vernachlässigt werden.

Die Größen δ_1 und δ_2 stehen, einerlei wo die Last R sich auf dem Träger befindet, sehr angenähert (bei vollwandigen Trägern mit unveränderlichem Querschnitt genau) in einem festen Verhältnis zueinander. Infolgedessen ergeben die Formeln 81 und 82 für die wandernde Last R auf dem Träger konstante Werte. Die Größen δ_1 und δ_2 ermittelt man zweckmäßig für die Belastung 1 in der Trägermitte.

Die Berechnung der einzelnen Träger erfolgt nach denselben Grundsätzen wie gewöhnlich belastete Träger.

Die wandernde Last auf dem Hauptträger links ist

$$\frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} - e\right) + X_1,$$

die auf dem Hauptträger rechts

$$\frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} - e\right) - X_1.$$

Als wandernde Last an den wagerechten Trägern kommt in Betracht

$$X_2.$$

Wird das Trägersystem beispielsweise von zwei Lasten R und R_1 angegriffen, dann hat man ebenso für die einzelnen Träger zwei entsprechend nach den obigen Formeln ermittelte wandernde Einzellasten.

Gegeben eine Verladebrücke mit den beiden einseitigen Lasten R und R_1.

$$a = 3\text{ m},\quad h = 4\text{ m},\quad e = 1\text{ m},\quad \delta_1 = 2\text{ mm},\quad \delta_2 = 3\text{ mm}.$$

Zu R (Gleichung 81)

$$X_1 = R \cdot \frac{e}{a} \frac{h^2 \cdot \delta_1}{a^2 \cdot \delta_2 + h^2 \cdot \delta_1}$$

$$= R \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16 \cdot 2}{9 \cdot 3 + 16 \cdot 2} = R \cdot \frac{32}{177} = R \cdot 0{,}181$$

$$X_2 = X_1 \cdot \frac{a}{h} = R \cdot 0{,}181 \cdot \frac{3}{4} = R \cdot 0{,}136.$$

Zu R_1.

$$X_1 = R_1 \cdot 0{,}181$$
$$X_2 = R_1 \cdot 0{,}136.$$

Die senkrechte Belastung des Hauptträgers links ist nach Gleichung 83

$$\frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} - e\right) + X_1 = \frac{R}{3}(1{,}5 - 1) + R \cdot 0{,}181$$
$$= R \cdot 0{,}167 + R \cdot 0{,}181 = R \cdot 0{,}348$$
$$R_1 \cdot 0{,}348$$

Die senkrechte Belastung des Hauptträgers rechts beträgt nach Gleichung 84

$$\frac{R}{a}\left(\frac{a}{2} + e\right) - X_1 = \frac{R}{3}(1{,}5 + 1) - R \cdot 0{,}181$$
$$= R \cdot 0{,}833 - R \cdot 0{,}181 = R \cdot 0{,}652$$
$$R_1 \cdot 0{,}652.$$

Besteht das Trägersystem aus vollwandigen Trägern unveränderlichen Querschnittes, dann wird

$$X_1 = R \cdot \frac{e}{a} \cdot \frac{h^2}{a^2 \cdot \frac{J_1}{J_2} + h^2} \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

und

$$X_2 = R \cdot \frac{e}{a} \cdot \frac{a \cdot h}{a^2 \cdot \frac{J_1}{J_2} + h^2} \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

Sind alle 4 Blechträger einander gleich, $a = h$, $J_1 = J_2$, dann folgt

$$X_1 = X_2 = \frac{R \cdot e}{2 \cdot a} \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

Vierter Abschnitt.

Turm- und Drehkrane.

Beispiel 45. Ein fahrbarer Turmkran mit drehbarem Ausleger nach Fig. 56.

Um das Kippmoment bei ausgefahrener Katze zu verringern, ordnet man auf dem anderen Ausleger ein Gegengewicht G an. In der Regel wird dasselbe so schwer gewählt, daß das nach dieser Seite drehende Moment bei eingezogener leerer Katze gleich ist dem nach rechts drehenden Moment bei ausgefahrener belasteter Katze.

Bezeichnet K das Gewicht des im Abstande l_1 verlagerten Antriebwerkes, L das Gewicht der leeren Katze und P das Gewicht der belasteten Katze, ferner Q das Gewicht des Auslegers, dann ist

$$-G \cdot l + K \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + L \cdot l^{\min} = +G \cdot l - K \cdot l_1 - Q \cdot l_2 - P \cdot l^{\max}$$

oder

$$G = \frac{2 \cdot Q \cdot l_2 + 2K \cdot l_1 + L \cdot l_{\min} + P \cdot l_{\max}}{2 \cdot l}.$$

Der Stützpfosten des Auslegers bildet eine Hohlpyramide und ist haubenartig auf den Schaft des Standgerüstes gestützt. Die senkrechten Lasten hängen sämtlich in der Spitze b, wo zugleich die Kraft H des aus dem Kippmoment des Auslegers entstehenden Kräftepaars

$$H = \frac{M}{h_0}$$

aufgenommen wird. Die andere entgegengesetzt gerichtete Kraft H äußert sich am Fuße der Haube.

Der Ausleger ist durchlaufend und wirkt infolgedessen wie ein Träger auf mehreren Stützen. Die Stützen sind die Aufhängestellen der schrägen Zugbänder. Man beachte, daß die Stützkräfte wagerechte Komponenten für den Balken abgeben.

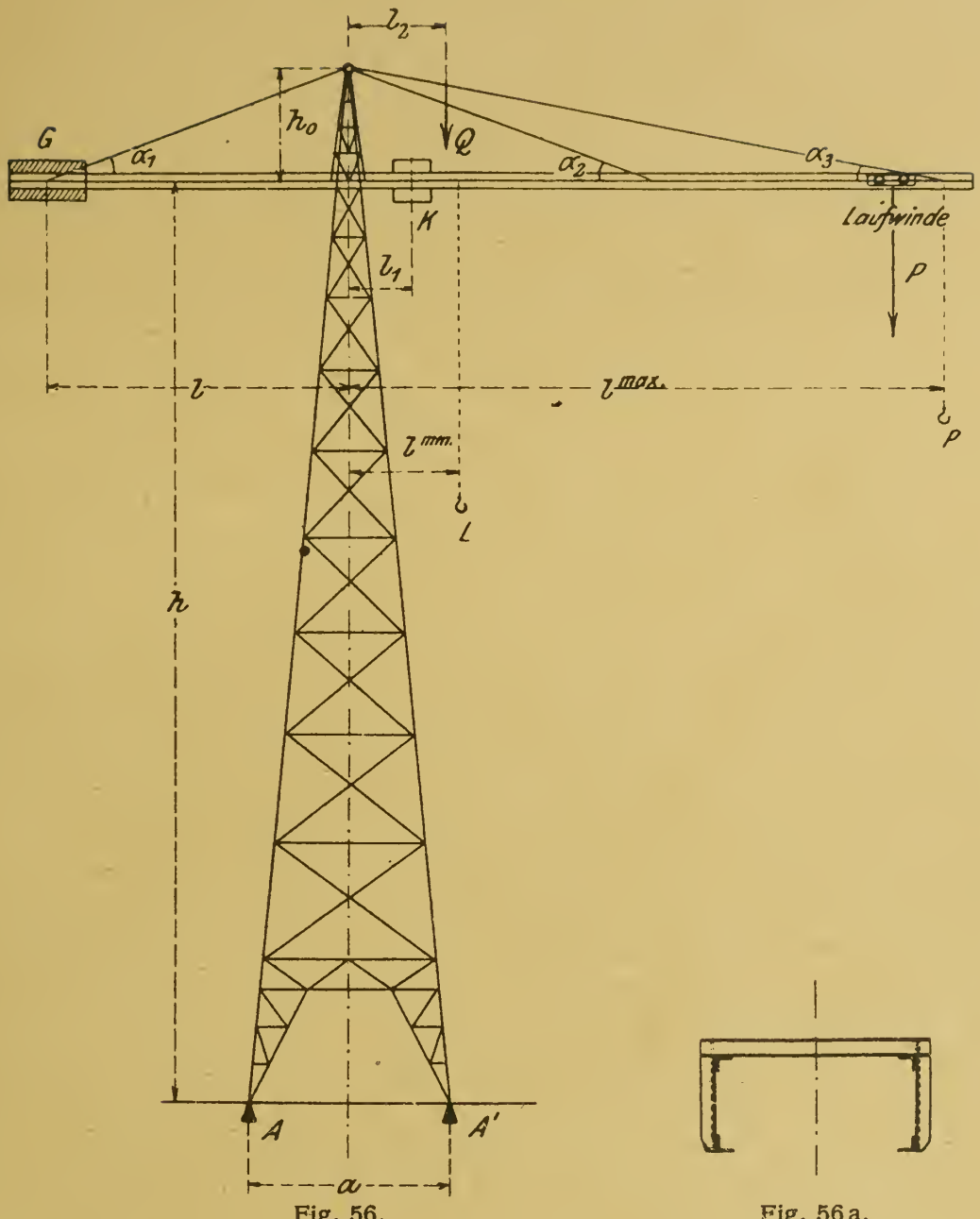


Fig. 56.

Fig. 56a.

Die Zugeisen nehmen keine Druckkräfte auf. Daher kann der Balken, je nachdem in welchem Felde die Last P steht, als Träger auf zwei, auf drei oder auf vier Stützen wirken. Befindet sich P beispielsweise im mittleren Felde, dann schwingt der rechte äußerste Stützpunkt nach oben, während die übrigen Punkte, insbesondere der Ort des Gegengewichtes, festliegen, wodurch dann ein Träger auf nur drei Stützen zustande kommt. Vernachlässigt man den Einfluß der Längenänderung der Stäbe, dann liefern die Beispiele 22 und 24, sowie die Einflußlinien für durchgehende Balken im Anhang eine Lösung für die vorliegenden Aufgaben. Man übersehe jedoch nicht, daß die Nachgiebigkeit der langen Zugglieder nicht unerheblich ist und trage diesem ungünstigen Umstande durch reichliche Dimensionierung des Balkens Rechnung.

Im Interesse eines gefälligen Aussehens dürfte es sich empfehlen, die Schrägen des Turmes (Diagonalen) parallel laufen zu lassen. Die Aufgabe lautet daher: Ein Trapez von der Höhe h_1, der Grundlinie a_1 und der Kopfbreite b in n-Felder zu teilen, die der Bedingung genügen, daß ihre Diagonalen parallel laufen. Hierzu bediene man sich (Fig. 56 b) folgender Formeln:

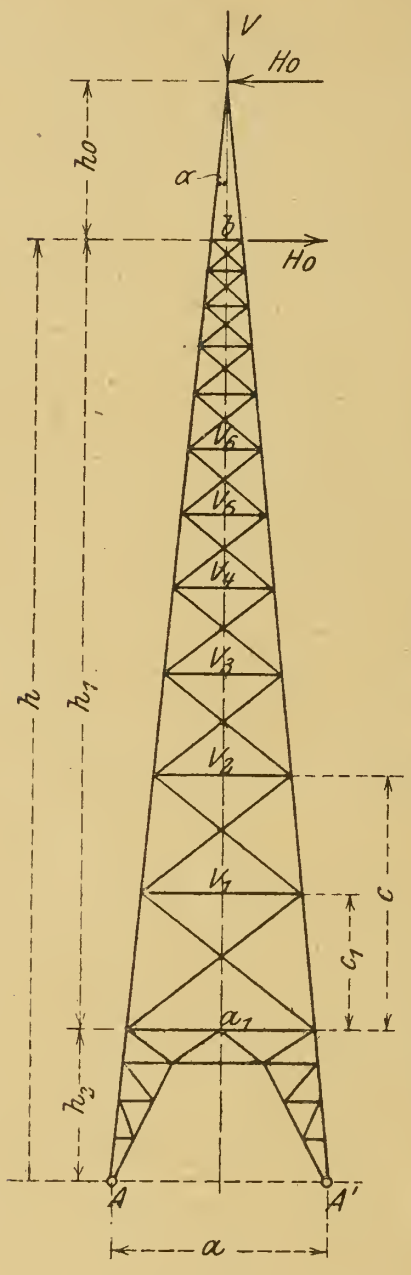


Fig. 56 b.

$$v_1^{\,n} = a_1^{\,n-1} \cdot b$$
$$v_2^{\,n-1} = v_1^{\,n-2} \cdot b$$
$$v_3^{\,n-2} = v_2^{\,n-3} \cdot b$$
$$v_4^{\,n-3} = v_3^{\,n-4} \cdot b$$
$$v_5^{\,n-4} = v_4^{\,n-5} \cdot b \text{ usf.}$$

Der zu einem beliebigen v gehörende Abstand c berechnet sich aus

$$c = h_1 \frac{a_1 - v}{a_1 - b}.$$

Im allgemeinen dürfte es genügen, nach Ermittelung der ersten Wagerechten

$$v_1^{\,n} = a_1^{\,n-1} \cdot b \text{ oder } v_1 = \sqrt[n]{a_1^{\,n-1} \cdot b} \quad . \quad (88)$$

den Wert

$$c_1 = h_1 \cdot \frac{a_1 - v_1}{a_1 - b} \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

zu bestimmen, denn nach Auftragung des letzteren können die übrigen Felder durch Parallelverschiebung der Diagonalen konstruktiv genau festgelegt werden.

Das Kippmoment des Auslegers liefert die horizontalen gleichen und entgegengesetzten Kräfte

$$H = \frac{M}{h_0}.$$

Zugleich ist in der Spitze wirksam die Gesamtvertikalkraft V bei belasteter ausgefahrener Katze oder V_1 bei leerer eingezogener Katze.

Man untersucht das Gerüst vorteilhaft einmal für den Angriff der Kräfte V, V_1 und H_0 in der Spitze, das andere Mal getrennt davon für den Belastungszustand H_u am Fuße der Haube. Erstere erzeugen nur Spannungen in den äußeren Rippen, während H_u außer den Eckspannungen noch Spannungen in den Füllstäben hervorruft. (Wegen

der schlanken Gestalt des Turmes dürfen die Fachwände als in der Ebene liegend angenommen werden.)

Wenn α der halbe Spitzwinkel ist, dann liefert V bzw. V_1 für die äußeren Rippen beiderseitig

$$S_v = \frac{V}{4 \cos \alpha} \text{ und } \frac{V_1}{4 \cos \alpha}.$$

H_0 ergibt

$$S_H = \pm \frac{H_0}{4 \sin \alpha}.$$

Sodann ermittle man mit Hilfe eines Cremonaplanes die Spannungen beim Angriff der Kraft H_u. Die zugehörigen Auflagergrößen sind

$$A_H = A_H' = \frac{H_u}{2}$$

und

$$A_v = A_v' = \frac{H_u \cdot h}{a}.$$

Die Spannkräfte S_H gelten bei Stellung des Auslegers quer zum Turmquerschnitt; sie werden jedoch größer, wenn der Ausleger diagonal d. h. über Eck gerichtet ist. Dann wird

$$S_H = \pm \frac{H_0}{4 \sin \alpha} \cdot \sqrt{2}.$$

Wie Fig. 56 b erkennen läßt, soll die Gliederung derart sein, daß die Schrägen nur Zugkräfte aufnehmen. Dies bedingt bei entgegengesetzt gerichtetem Schub H_u (wenn das Kippmoment wechselt) umgekehrt gerichtete Schrägen, so daß das fertige Fachwerk ein System mit gekreuzten Diagonalen ist.

Die aus den drei bzw. zusammenwirkenden Belastungen resultierenden Spannungen lassen sich leicht finden.

Hierauf sind die Stabkräfte aus dem Eigengewicht zu ermitteln. Dieses hängt in jedem Eckknoten und bewirkt (bis zum Portal unten) nur Spannungen in den Rippen und den Horizontalen.

Schließlich muß noch die nicht unbedeutende Wirkung des Windes in Rechnung gestellt werden. Man lasse den Wind in jedem Eckknoten wagerecht angreifen und bestimme die entsprechenden Stabspannungen.

Die oben berechneten Spannkräfte aus V_1, H_0 und H_u, ferner aus Eigengewicht treten bei eingezogener leerer Katze ein, also bei einem Zustand, wenn die Anlage ruht. Zu dieser Zeit kann aber ein Sturm

eintreten, infolgedessen das Gerüst so stark sein muß, daß es jenen Kräften in Zusammenwirkung mit einem Winddruck von 200 kg pro m^2 mit Sicherheit widersteht. Man lasse es sich angelegen sein, mit Sorgfalt die ungünstigsten Spannungswerte zu verfolgen.

Natürlich gelten die Ergebnisse für alle vier Gerüstwände, weil der drehbare Ausleger jede Stellung einnehmen kann.

Das Kippmoment des Auslegers war M. Bedeutet Q_1 das Eigengewicht des Stützgerüstes und ist W die resultierende Windkraft im Abstande h_w vom Fuße, dann muß sein

$$Q_1 \cdot \frac{a}{2} = n \{M + W \cdot h_w\}.$$

Beispiel 46. Ein einziehbarer Ausleger zu einem Drehkran nach Fig. 57. Das Einziehen erfolgt durch eine in dem Punkte d des Auslegers angreifende Spindel. Der Antrieb wie auch das Hubwerk liegen auf dem festen, schraffierten Teil des Kranes. Maßgebend für die statische Ermittelung des Auslegers ist die Rollenanordnung in der Auslegerspitze. In der Fig. 57 a ist der hier vorliegende Fall angedeutet. Die Last P hängt in zwei Seilsträngen, von denen der eine im Punkt f am Ausleger befestigt ist, während der andere über die Schnabelrolle nach dem Hubwerk führt. Die Spannkraft $\frac{P}{2}$ dieses Anzugstranges liefert eine schräggerichtete Mittelkraft R_1, die sich mit der Spannkraft $\frac{P}{2}$ des festen Stranges zu einer Resultierenden R_0 zusammensetzt. (Plan Fig. 57 b.) Bringt man diese Resultierende zum Schnitt mit der verlängerten Spindelrichtung, und zieht durch diesen Punkt o' eine Gerade $o' - a$, dann ergibt diese Gerade die Richtung des Auflagerdruckes K des Auslegerfußpunktes a. Hiernach läßt sich dann der Kräfteplan Fig. 57 c zeichnen, der die Größe des Auflagerdruckes K sowie den Spindelzug Z ergibt. Ferner liefert der Plan die Stabkräfte des Auslegers.

Die vorstehende Ermittelung ist natürlich bei verschiedenen Stellungen des einziehbaren Auslegers zu führen, um zu den ungünstigsten Resultaten zu kommen.

Die senkrechten Auflagerdrucke A und B des Kranes sind wie gewöhnlich

$$A = + P \cdot \frac{l}{a} + P$$

$$B = - P \cdot \frac{l}{a}.$$

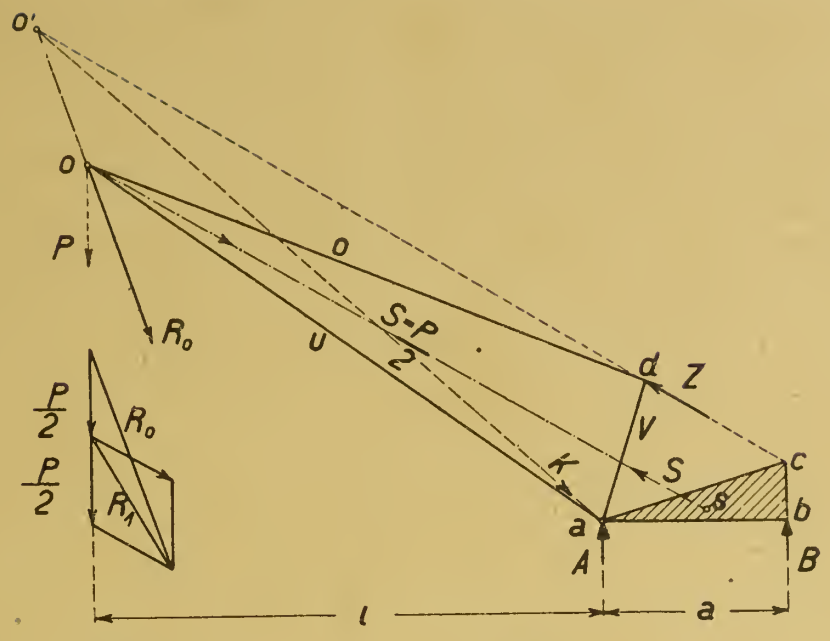


Fig. 57b. Fig. 57.

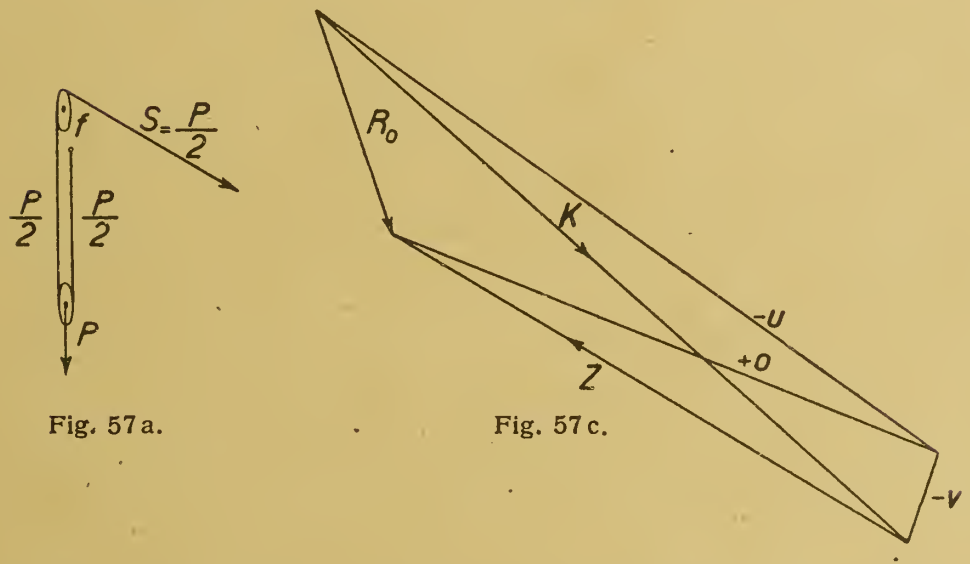


Fig. 57a. Fig. 57c.

Die Fig. 57d, 57e, 57f geben genaueren Aufschluß über die statische Sachlage bei einem Flaschenzuge. Dieses Beispiel wird genügen, um zu zeigen, wie die Wirkungsweise der Kräfte auch bei irgend einer anderen beliebigen Rollenanordnung ist.

Die Mittelkraft R_S aus den beiden Seilzügen S (dem aufgehängten Seil und dem anziehenden) geht durch den Drehpunkt 0 der Rollen. Hier setzt sich diese Mittelkraft mit der Mittelkraft $4\,S$, die ebenfalls im Drehpunkt der Rollen angreift, zu der Resultierenden R zusammen.

Als Ersatzkräfte für die Kraft $4\,S$ kommen zur Berechnung des Krangerüstes demnach die beiden Züge S und die Kraft R in Betracht. Zwecks Übung sind in dem Plan Fig. 57f die Stabkräfte sowie die Widerlagerdrucke des in der Fig. 57d dargestellten Krangerüstes ermittelt.

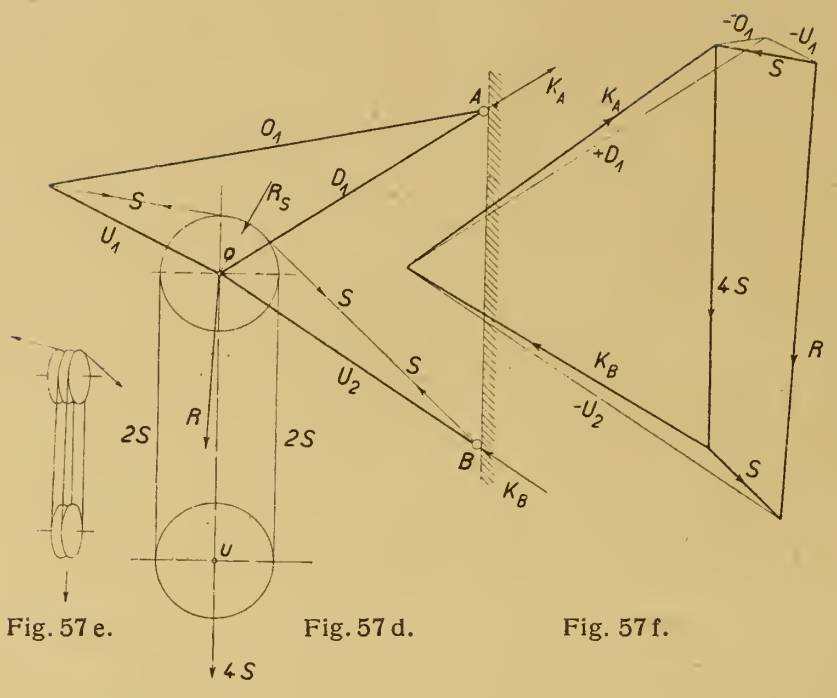


Fig. 57 e. Fig. 57 d. Fig. 57 f.

Es kann ein Grund dafür gegeben sein, den Ausleger unten offen zu lassen, das heißt, nur in der Obergurtebene und als Fortsetzung in dem schrägen Rücken einen Windverband anzuordnen (Fig. 58). Man hat dann den in der Fig. 58 a angedeuteten Querschnitt des Auslegers, wo wagerechte Kräfte durch den portalartigen Querverband in den oberen Windverband geleitet werden. Unter der Voraussetzung nun, daß die Einziehspindeln keine weiteren Kräfte als nur die aus der senkrechten Belastung des Auslegers (Eigengewicht und Last) aufnehmen dürfen, ist das Raumfachwerk des Auslegers gegen schräg oder wagerecht gerichtete Kräfte nicht stabil sondern beweglich. In der Fig. 58a ist die statische Wirkung eines Querrahmens angegeben. Die Vertikalkräfte V_1 gehen in die beiden Hauptträgerwände, während die ursächliche Kraft W vom Windverband aufgenommen wird. Die Fig. 58 gibt Aufschluß über die Auflagerbedingungen des Auslegers in den Gelenken a und a'. Die Widerlagerdrucke K in Richtung der Geraden $o — a$ sind

$$K = \pm W \frac{s}{m}.$$

In Richtung der Auflagerachse $a — a'$ liegt der Widerstand W. (Siehe auch Fig. 58 f.)

Betrachtet man nur den oberen Windverband (Scheibe I), (Fig. 58 c), dann erscheinen in den Punkten b und b' die Kräfte: W in der Achse $b — b'$ und in der Längsrichtung der Scheibe

$$H' = \pm W \cdot \frac{b'}{m}.$$

Der Schub W wird von der Scheibe II in die Auflager a und a' gebracht, während die Kräfte H' keinen Stützpunkt finden, um zur Wirkung zu gelangen. Es fehlt also etwas in dem Raumsystem. Infolgedessen wird das ganze Gebilde verschoben, sodaß man etwa, um einen Augenblick in der Bewegung festzuhalten, die in den Fig. 58 d und 58 e

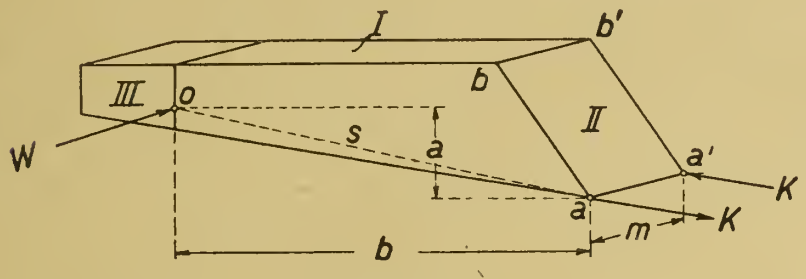


Fig. 58.

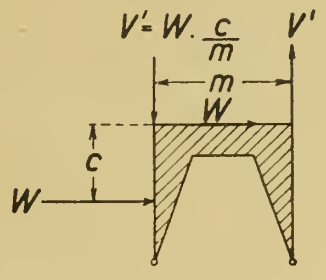


Fig. 58 a.

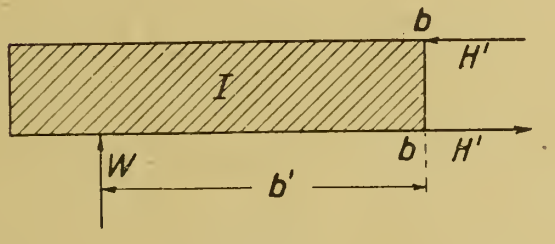


Fig. 58 c.

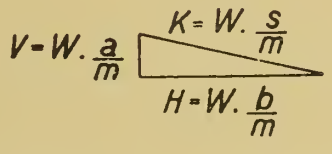


Fig. 58 b.

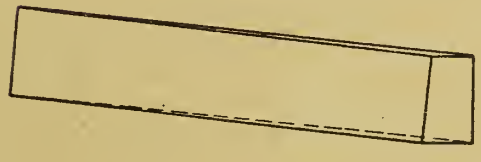


Fig. 58 d.

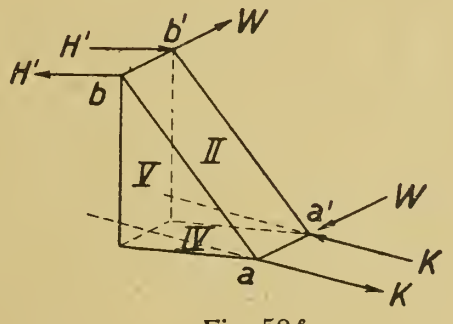


Fig. 58 f.

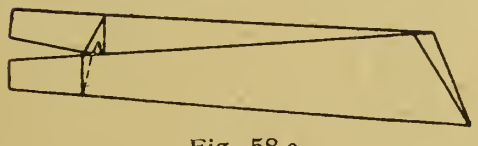


Fig. 58 e.

gezeichnete Verdrehung und Lageveränderung der Scheiben erhält. Es treten hierbei gefährliche Verdrehungs- und Eckspannungen in allen verbindenden Konstruktionsteilen ein, die unter Umständen zum Zusammenbruch des Gerüstes führen können.

Man kann nun die Beweglichkeit des Raumsystems dadurch beseitigen, indem man nach der Fig. 58 f im Bereich der Auflager-

stellen zwei weitere Scheiben IV und V einfügt, die in Verbindung mit der Scheibe II einen starren Körper bilden, der die erforderlichen Kräfte H' aufbringt.

Die vorstehenden Darlegungen haben den Zweck, die Nachgedanken in der Bildung von Raumsystemen bei Kranen zu fördern. Man begegnet nicht selten Systemen, die in dieser Beziehung unzulänglich und fehlerhaft sind. Wenn solche Gerüste trotzdem Stand halten, so liegt dies daran, daß vielleicht nicht allzu große seitliche Belastungen eintreten, oder daß die oben genannten Verdrehungen und Eckspannungen doch einen erheblichen Widerstand ausüben.

Meistens jedoch sind es die Spindeln, die unfreiwilligerweise und ohne daß man ihnen die Aufgabe zugedacht hat, die notwendigen Gleichgewichtskräfte aufbringen.

Es bedarf keiner Frage, daß bei einem so spitzen Schnabel wie der Ausleger Fig. 57 infolge der steifen Eckverbindung in der Spitze außer den Systemspannkräften noch ganz erhebliche Momente in die Stäbe gelangen. Der Ausleger wird die in der Fig. 59 angedeutete Form annehmen. Diese Nebenspannungen werden, wenngleich sie gefährlich sein können, wohl selten gebührend berücksichtigt, so daß es sich lohnt, den Vorgang etwas genauer zu untersuchen. Der Einfachheit wegen möge das in der Fig. 59 a gezeichnete Stabsystem betrachtet werden. Die Stäbe sind unten gelenkig gelagert und in der Spitze steif miteinander verbunden.

Fig. 59.

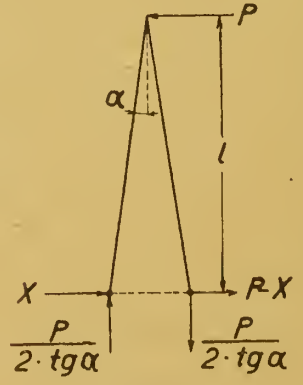


Fig. 59 a.

Als fragliche Größe kann man den wagerechten Schub X an dem linken Fuß einführen (Fig. 59 a). Diese Größe würde, wenn die Längenänderung der Stäbe gleich Null wäre, den Wert haben

$$X = \frac{P}{2}.$$

Bei diesem Zustand erhielten die Stäbe keine Momente, sondern nur Längskräfte, d. h. reine Systemspannungen. Jedoch erleiden

die Stäbe erhebliche Längenänderungen, wodurch sich X ändert, so daß die Resultierende aus X und dem senkrechten Auflagerdruck nicht mehr in der Stabachse liegt und infolgedessen Momente erzeugt.

Man kann X nach der bekannten Bedingungsgleichung ermitteln

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx + \int \frac{S}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot dx = 0.$$

Linke Schräge.

$$M_x = \frac{P}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha - X \cdot x \qquad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -x$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^l \left\{ -\frac{P \cdot x^2}{2} + X \cdot x^2 \right\} dx = -\frac{P \cdot l^3}{6 \cdot J \cdot E} + \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E} \qquad \text{(I)}$$

$$S = \frac{P}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{X}{\sin \alpha} \qquad \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{F \cdot E} \int_0^l \left\{ \frac{P}{2 \sin^2 \alpha} + \frac{X}{\sin^2 \alpha} \right\} dx = \frac{P \cdot l}{2 \sin^2 \alpha \cdot F \cdot E} + \frac{X \cdot l}{\sin^2 \alpha \cdot F \cdot E} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{I} + \text{II} = 0$$

$$\frac{X \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E} + \frac{X \cdot l}{\sin^2 \alpha \cdot F \cdot E} = \frac{P \cdot l^3}{6 \cdot J \cdot E} - \frac{P \cdot l}{2 \sin^2 \alpha \cdot F \cdot E}$$

oder

$$X = \frac{P}{2} \cdot \frac{l^2 \cdot \sin^2 \alpha - \dfrac{3 \cdot J}{F}}{l^2 \cdot \sin^2 \alpha + \dfrac{3 \cdot J}{F}} \qquad \ldots\ldots \qquad (90)$$

Das größte Moment des Stabes in der Spitze ist

$$M = \frac{P \cdot l}{2} - X \cdot l$$

Zahlenbeispiel. $P = 8$ t, $l = 5$ m, Entfernung der Füße 1 m.

Querschnitt][*NP* 14 mit $J = 1210$ cm^4
$W = 173$ cm^3
$F = 41$ cm^2.

$$X = \frac{8}{2} \cdot \frac{\overline{500}^2 \cdot 0{,}0099 - \dfrac{3 \cdot 1210}{41}}{\overline{500}^2 \cdot 0{,}0099 + \dfrac{3 \cdot 1210}{41}} = 4 \cdot \frac{2386}{2564} = 3{,}72 \text{ t}.$$

Das Moment des Stabes beträgt hiernach

$$M = \frac{P \cdot l}{2} - X \cdot l = 4 \cdot 5 - 3{,}72 \cdot 5 = 20 - 18{,}6 = 1{,}4 \text{ mt},$$

Die Materialbeanspruchung ist

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = \frac{40\,200}{41} + \frac{140\,000}{173} = 980 + 810 = 1790 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei Vernachlässigung der Biegung ergibt sich eine Beanspruchung von

$$\sigma = 980 \text{ kg/cm}^2.$$

Fünfter Abschnitt.

Portal- und Hellgengerüste.

Beispiel 47. Feststehendes Portal mit obenlaufenden Lasten: Ein Rahmen, dessen Balken beiderseitig überragt. Die Verbindung des Balkens mit den Pfosten ist als steif anzusehen. Die Fußpunkte der

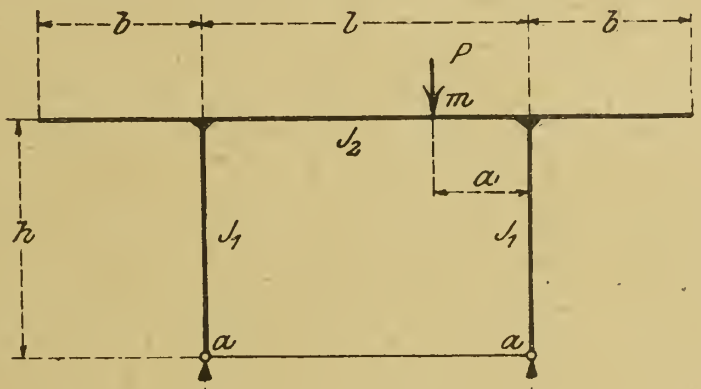


Fig. 60.

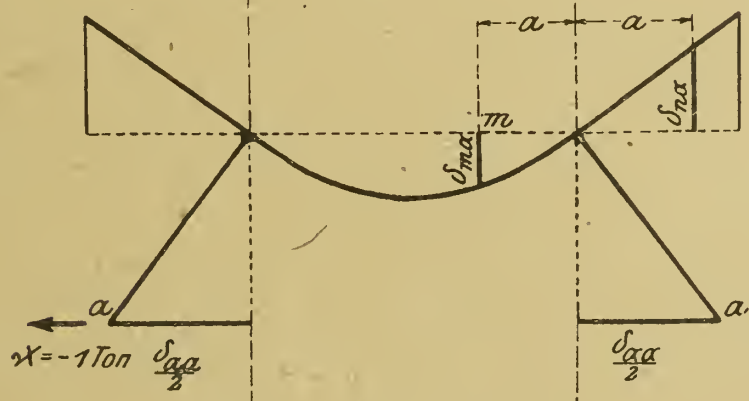


Fig. 60a.

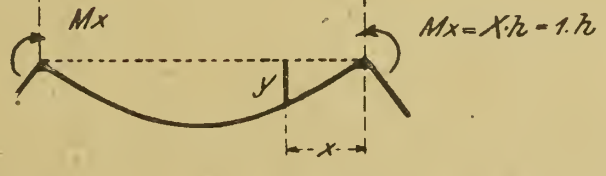


Fig. 60b.

Stützen werden in festen Gelenken gelagert. Das Trägheitsmoment jedes Pfostens sei J_1, das des Balkens J_2. Bei der statischen Untersuchung des Rahmens sollen Auflagerverschiebungen, da sie nur geringen Einfluß haben, unberücksichtigt bleiben. Fig. 60.

Belastungsannahme: eine über dem Balken wandernde Einzellast P. Diese erzeugt in den Fußpunkten a außer den gewöhnlichen senkrechten Auflagerdrucken noch einen Horizontalschub X, der sich aus der bekannten Bedingung

$$X = P \cdot \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

berechnen läßt, wo δ_{aa} die unter dem Kraftangriff von $X = -1$ t bewirkte Verschiebung des Punktes a bedeutet, während δ_{ma} die unter P gemessene Ordinate der zugleich entstehenden Biegungslinie des Balkens ist.

Die Größen δ_{ma} und δ_{aa} lassen sich auf folgende Weise herleiten.

Zunächst δ_{ma} für den mittleren Teil des Balkens. Dieser wird von dem Moment

$$M_x = X \cdot h = 1 \cdot h$$

angegriffen. Der zweite Differentialquotient der Biegungslinie ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M_x}{J_2 E} = \frac{h}{J_2 E}.$$

Hieraus durch Integration

$$\frac{d y}{d x} = \frac{h \cdot x}{J_2 \cdot E} + C.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird

$$\frac{d y}{d x} = 0,$$

also

$$\frac{h \cdot l}{2 J_2 E} + C = 0,$$

oder

$$C = -\frac{h \cdot l}{2 J_2 E},$$

infolgedessen

$$\frac{d y}{d x} = \frac{h \cdot x}{J_2 E} = \frac{h l}{2 J_2 E}.$$

Wiederum durch Integration

$$y = \frac{h \cdot x^2}{2 J_2 E} - \frac{h l x}{2 J_2 E} = \frac{h \cdot a}{2 J_2 E}(l - a) = \delta_{ma}. \quad . \quad (91)$$

Der Verlauf der Biegungslinie des Balkens zwischen den Stützen ist somit eine Parabel von der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{h \cdot l^2}{8 J_2 E}$$

Die geradlinige Verlängerung der Kurve (Tangente daran) ist die Richtung des Kragarmes. Die Ordinaten seiner Ausbiegung δ_{na} im Abstande a vom Stützpunkt

$$\left(\text{siehe oben } \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{h \cdot l}{2 J_2 E} \text{ für } x = 0\right)$$

haben den Wert

$$\delta_{na} = -\frac{h \cdot l \cdot a}{2 J_2 E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

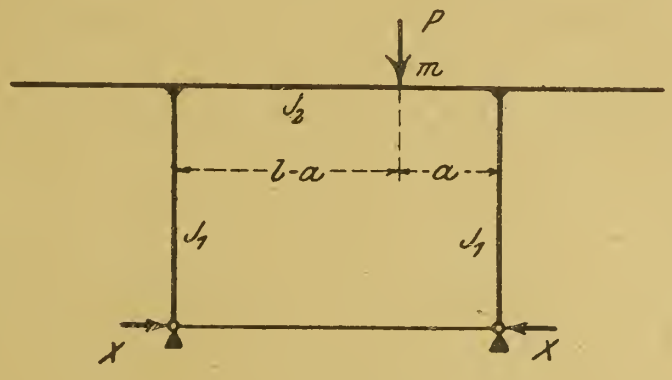


Fig. 60 c.

Nun die Größe δ_{aa}.

Zunächst steht der Pfosten senkrecht auf der Tangente der Parabel. Die hierdurch bewirkte Verschiebung des Fußpunktes a ist

$$\frac{h \cdot l \cdot h}{2 J_2 E}.$$

Sodann erhält der Pfosten noch eine Biegung

$$\frac{1 \cdot h^3}{3 J_1 \cdot E}.$$

Beide Werte zusammen ergeben die tatsächliche Verschiebung

$$\frac{\delta_{aa}}{2} = \frac{h^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{h^2 \cdot l}{2 \cdot J_2 \cdot E}$$

oder

$$\delta_{aa} = \frac{2 \cdot h^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{h^2 \cdot l}{J_2 \cdot E} \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Der Schub X, verursacht durch die Last P auf dem mittleren Teil des Balkens, ist daher

$$X = +P \cdot \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = +\frac{P h a (l-a)}{2 J_2 E \left(\frac{2 h^3}{3 J_1 E} + \frac{h^2 l}{J_2 E}\right)}$$

$$= +\frac{P a (l-a)}{2 h \left(\frac{2 h J_2}{3 J_1} + l\right)} = +\frac{P a (l-a)}{2 N} \quad \ldots \quad (94)$$

Der Schub X, verursacht durch die Last P auf dem Kragarm, beträgt

$$X = -P \cdot \frac{\delta_{na}}{\delta_{aa}} = -\frac{P\,h\,l\,a}{2\,J_2\,E\left(\frac{2\,h^3}{3\,J_1\,E}+\frac{h^2\,l}{J_2\,E}\right)}$$

$$= -\frac{P\,l\,a}{2\,h\left(\frac{2\,h\,J_2}{3\,J_1}+l\right)} = -\frac{P\,l\,a}{2\,N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Entgegen dieser gewissermaßen geometrischen Lösung läßt sich X auch mit Hilfe der Bedingung

$$\frac{1}{J\,E}\int M_x \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X}\, d\,x$$

bestimmen.

Pfosten.

Das Moment im Abstande x vom Fußpunkt

$$M_x = X \cdot x; \quad \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X} = x,$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^h M_x \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X}\, d\,x = \frac{1}{J_1 E}\int_0^h X \cdot x^2\, d\,x = \frac{X\,h^3}{3\,J_1\,E},$$

für beide Pfosten

$$\frac{2\,X \cdot h^3}{3\,J_1\,E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Balken rechts von P.

$$M_x = X \cdot h - \frac{P\,(l-a)\,x}{l}; \quad \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X} = h,$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^a M_x \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X}\, d\,x = \frac{1}{J_2 E}\int_0^a \left\{X\,h^2 - \frac{P\,(l-a)\,x}{l} \cdot h\right\} d\,x$$

$$= \frac{1}{J_2 E}\left\{X\,h^2\,a - \frac{P\,(l-a)\,a^2\,h}{2\,l}\right\} \quad . \quad (II)$$

Balken links von P.

$$\frac{1}{J_2 \cdot E}\left\{X \cdot h^2 \cdot (l-a) - \frac{P \cdot a \cdot (l-a)^2 \cdot h}{2 \cdot l}\right\} \quad . \quad . \quad (III)$$

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} = 0,$$

$$\frac{2 \cdot X \cdot h^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{1}{J_2 \cdot E}\left\{X \cdot h^2 \cdot a - \frac{P\,(l-a)\,a^2\,h}{2\,l} + X\,h^2\,(l-a) - \frac{P\,a\,(l-a)^2\,h}{2\,l}\right\} = 0,$$

$$X = + \frac{P\,a\,(l-a)}{2\,h\left(\frac{2\,h\,J_2}{3\,J_1} + l\right)} = + \frac{P\,a\,(l-a)}{2\,N} \quad . \quad . \quad (94)$$

In gleicher Weise wird sich die Gleichung 95 erbringen lassen.

Wir haben ein möglichst einfaches Konstruktionsverfahren für die Auffindung der Maximalmomente des Balkens im Auge. Das Moment im Angriffspunkt der Last zwischen den Stützen ist

$$M_a = B \cdot a - X \cdot h = \frac{P\,(l-a)\,a}{l} - \frac{P\,a\,(l-a)\,h}{2\,N} \quad . \quad (96)$$

Das erste Glied ist eine Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{P \cdot l}{4},$$

das zweite Glied ebenfalls eine Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{P\,l^2}{4} \cdot \frac{h}{2 \cdot N}.$$

Fig. 60 d zeigt die Konstruktion der beiden Parabeln, deren Differenz die positiven Maximalmomente des Balkens zwischen den Stützen liefert. Somit ist dieser Teil der Aufgabe gelöst.

Fährt die Last auf den Kragarm, dann wird der Balken zwischen den Stützen von wechselnden Momenten ergriffen. Das Moment im Abstande x von A ist

$$M_x = - A \cdot x + X \cdot h = - \frac{P \cdot a}{l} \cdot x + \frac{P \cdot a \cdot l}{2 \cdot N} \cdot h.$$

M_x wird am größten, wenn $a = b$, nämlich

$$M_x^{\max} = (+) \underbrace{\frac{P\,b\,l}{2N} \cdot h}_{\text{I}} (-) \frac{P\,b\,x}{l}.$$

Das erste Glied dieser Gleichung läßt sich als eine Konstante auftragen, während das zweite Glied ein Dreieck ist von der Höhe $P \cdot b$ unter dem Stützpunkt B.

Bezüglich der Momente für den Kragarm gelten die gewöhnlichen Regeln eines freiragenden Balkens.

In Fig. 60 f sind schließlich die überhaupt auftretenden größten Momente des ganzen Balkens zusammengestellt.

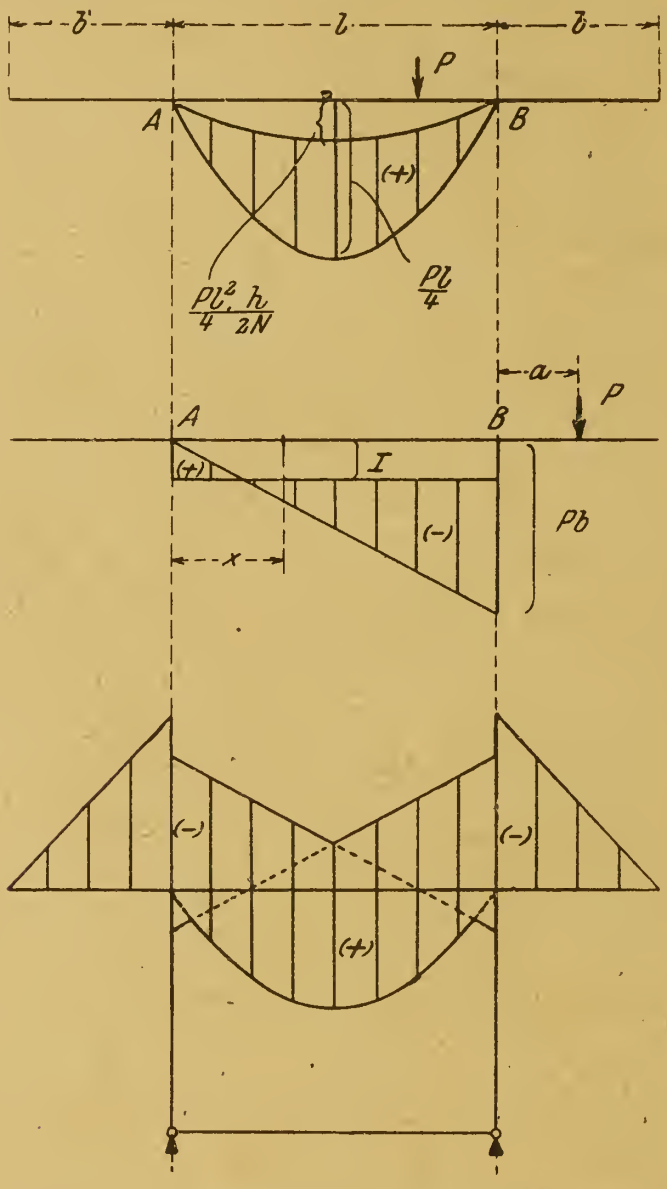


Fig. 60d.

Fig. 60e.

Fig. 60f.

Wo es erforderlich scheint, den Längsschub X im Balken mit den zugleich wirkenden Momenten zusammenzuwerfen, kann man ihn ebenfalls graphisch darstellen. Für gewöhnlich aber genügt die Bestimmung seines größten Wertes, um danach den Pfosten dimensionieren zu können. Der größte positive Schub ist nach Gleichung (94)

$$X^{\max} = + \frac{P l^2}{8 N}.$$

der größte entgegengesetzte nach Gleichung (95)

$$X^{\max} = - \frac{P l b}{2 N}.$$

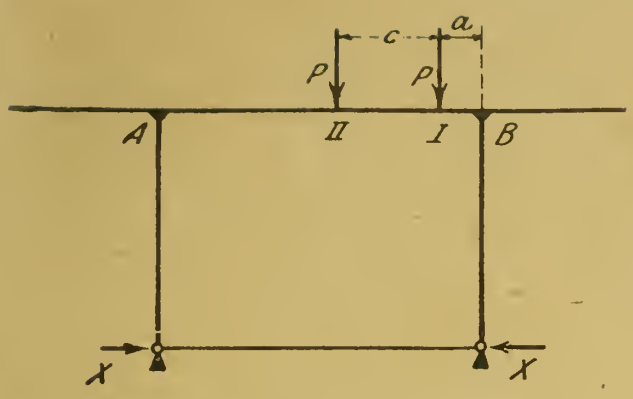


Fig. 60 g.

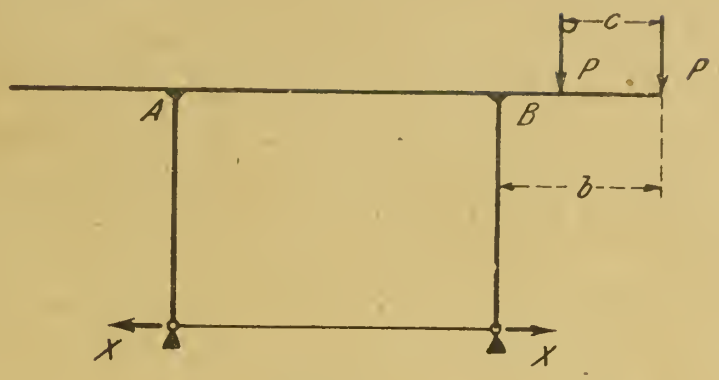


Fig. 60 h.

Weitere Belastungsannahme: ein über dem Balken wanderndes Lastenpaar $P - P$.

Mit Benutzung der Gleichung (94) bestimmt sich der Horizontalschub X, verursacht durch das Lastenpaar auf dem mittleren Teil des Balkens, zu

$$X = + \frac{P a (l - a)}{2 N} + \frac{P (a + c) \{l - (a + c)\}}{2 N} \quad . \quad . \quad (97)$$

der sein Maximum erreicht bei symmetrischer Laststellung zur Mitte, nämlich

$$X^{max} = + \frac{P (l^2 - c^2)}{4 N}.$$

Und weiter der Schub bei vollständig ausgefahrenem Lastenpaar auf dem Kragarm nach Gleichung (95)

$$X^{max} = - \frac{P l (2 b - c)}{2 N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Wie beim ersten Belastungsfall ist auch hier das Ziel ein möglichst einfaches zeichnerisches Verfahren zur Auffindung bzw. Darstellung der Maximalmomente des Balkens.

Das Moment zwischen den Stützen im Angriffspunkt I der rechten Last ist

$$M_a = B \cdot a - X \cdot h$$

$$M_a = \frac{2 P}{l} \left\{ \left(l - \frac{c}{2} \right) - a \right\} a - \frac{P \cdot a (l - a) \cdot h}{2 N} - \frac{P (a + c) \{l - (a + c)\} h}{2 N}.$$

Erstes Glied eine Parabel mit der Länge

$$\left(l - \frac{c}{2} \right)$$

und der Bogenhöhe

$$\frac{P}{2 l} \left\{ l - \frac{c}{2} \right\}^2.$$

Zweites Glied eine Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{P\,l^2}{4}\cdot\frac{h}{2N}.$$

Drittes Glied eine Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe $\left(\text{im Abstande } a=\frac{l}{2}-c \text{ von } B\right)$

$$\frac{P\,l^2}{4}\cdot\frac{h}{2N}.$$

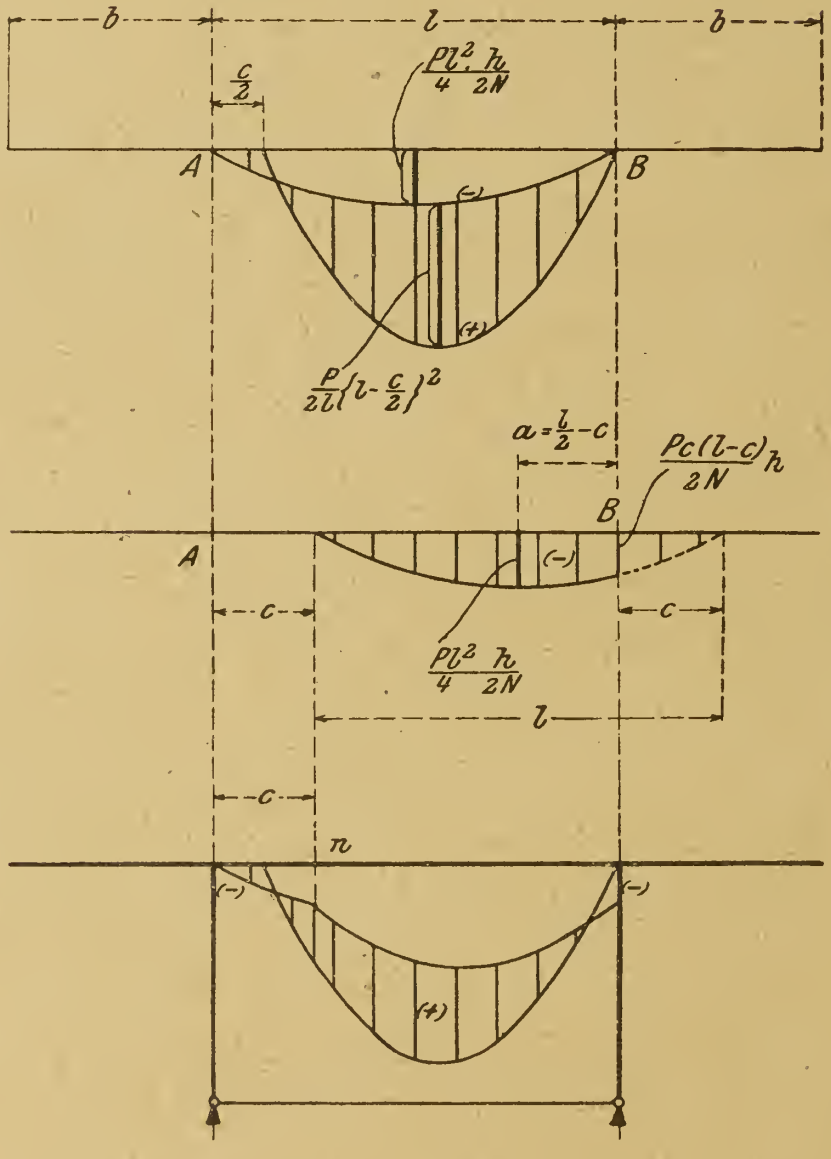


Fig. 60 i.

Fig. 60 k.

Fig. 60 l.

In Fig. 60 l sind die Momente der Fig. 60 i und 60 k vereinigt. Die schraffierte Fläche liefert somit die Maximalmomente, gemessen unter der Last I rechts. Sie ist nur gültig bis zum Punkte n, d. h. bis zum Augenblick, wo die Last II links über die Stütze rolllt.

Da eine symmetrische Belastung vorliegt, so ist das Spiegelbild der Figur maßgebend für die Momente unter der Last links.

In Frage stehen noch die Momente des mittleren Balkenteils bei ganz ausgefahrenem Lastenpaar auf dem Kragarm.

Das Moment im Abstande x von A ist nach Gleichung (98)

$$M_x = -Ax + X \cdot h = -\underbrace{\frac{2P\left(b - \frac{c}{2}\right)}{l}}_{\text{II}} \cdot x + \underbrace{\frac{Pl(2b-c)}{2N}}_{\text{I}} \cdot h.$$

Fig. 60 n zeigt die Auftragung der Werte I und II.

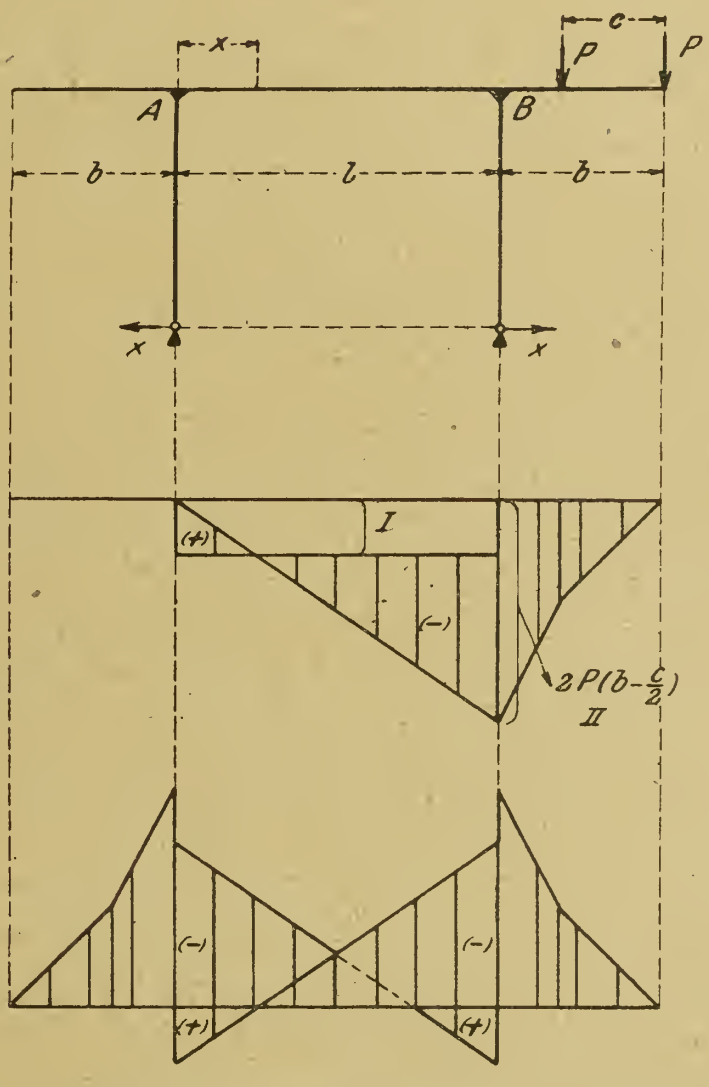


Fig. 60 m.

Fig. 60 n.

Fig. 60 o.

Bezüglich der Momente des Kragarmes gilt das beim ersten Belastungsfall Gesagte.

Endlich bedürfen wir noch der Kenntnis des durch das Eigengewicht des Balkens erzeugten Schubes X und der Momente.

Nach Gleichung (94) ist die Einflußlinie für X bei einer wandernden Last P auf dem Mittelteil des Balkens eine Parabel. Bezeichnet man mit p das Eigengewicht des Balkens pro Längeneinheit, dann

beträgt für diesen Trägerteil der Horizontalschub

$$X = p \cdot F_0,$$

wo F_0 die Fläche der Einflußlinie bedeutet. Somit

$$X = + p \frac{2}{3} l \cdot \frac{l^2}{4 \cdot 2N} = \frac{p \cdot l^3}{6 \cdot 2N}.$$

Das Eigengewicht des Kragarmes bewirkt ebenfalls einen Horizontalschub. Die Einflußlinie dafür verlief, Gleichung (95), nach einer Geraden. Auch hier gilt

$$X = - p \cdot F_0,$$

infolgedessen

$$X = - p \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{l \cdot b}{2N} = - \frac{p \cdot b^2 \cdot l}{2 \cdot 2N}$$

oder, da beide Kragarme zusammenwirken,

$$X = - \frac{p \cdot b^2 \cdot l}{2N}.$$

Der Gesamtschub aus dem Eigengewicht des Balkens ergibt somit

$$X = + \frac{p \cdot l^3}{6 \cdot 2N} - \frac{p \cdot b^2 \cdot l}{2 \cdot N} = \frac{p \cdot l \left(\frac{l^2}{6} - b^2 \right)}{2N}$$

$$\left[X \text{ wird} = o, \text{ wenn } b = \frac{l}{6} \sqrt{6} = 0{,}40825 \cdot l \right]$$

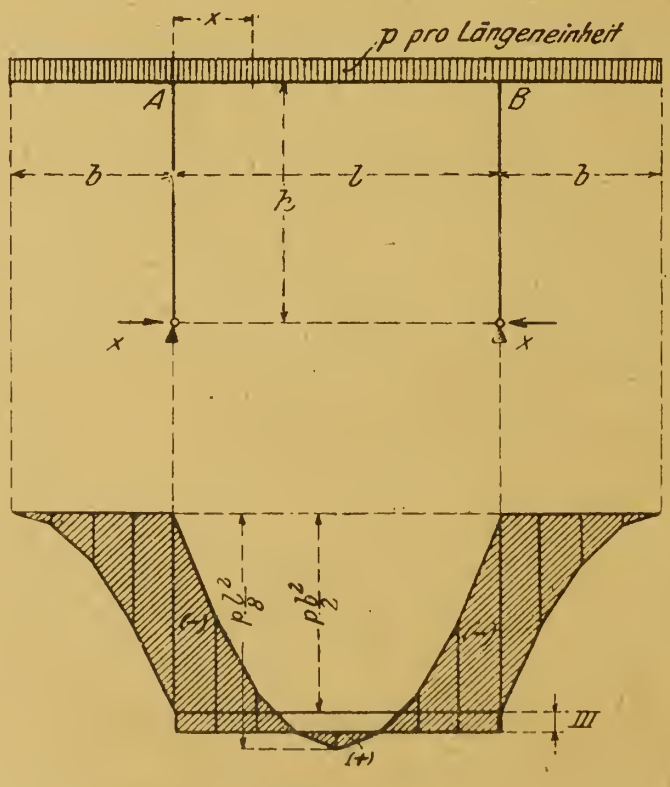


Fig. 60 p — q.

Das Moment im Abstande x von A ist

$$M_x = \frac{p\,(l+2\,b)\,x}{2} - \frac{p\,(b+x)^2}{2} - \frac{p\,l\left(\frac{l^2}{6} - b^2\right)}{2\,N} \cdot h$$

$$M_x = \underbrace{\frac{p}{2}\,x\,(l-x)}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{p}{2}\,b^2}_{\text{II}} - \underbrace{\frac{p\,l\left(\frac{l^2}{6} - b^2\right)}{2\,N} \cdot h.}_{\text{III}}$$

In Fig. 60 q sind die drei Glieder der Gleichung aufgetragen; die schraffierte Fläche gibt somit die Momente aus dem Eigengewicht des Balkens.

Beispiel 48. Ein Portal nach Fig. 61, befahren von einem Lastenpaar $P = P$. Die Konstruktion tritt nicht nur im Kranbau sondern auch sonst recht häufig auf, weshalb es nützlich ist, sie statisch zu untersuchen.

F a l l 1. Wenn das Lastenpaar symmetrisch zur Mitte steht.

Zu suchen ist der Horizontalschub X am Fuße.

Die Bedingungsgleichung (bei Vernachlässigung der geringfügigen Längenänderung der Schrägen) lautet wie immer

$$\frac{1}{J\,E}\int M_x \frac{\partial\, M_x}{\partial\, X}\,d\,x = 0.$$

P f o s t e n unterer Teil

$$\frac{X \cdot h^3_1}{3\,J_1\,E}.$$

Pf o s t e n oberer Teil

$$M_x = X \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot x; \qquad \frac{\partial\, M_x}{\delta\, X} = \frac{h_1}{h_2} \cdot x$$

$$\frac{1}{J_1\,E_2}\int_0^{h_2} X\,\frac{h^2_1 \cdot x^2}{h^2_2} \cdot d\,x = \frac{X \cdot h^2_1 \cdot h_2}{3\,J_1\,E}.$$

Für den ganzen P f o s t e n mithin

$$\frac{X \cdot h^3_1}{3\,J_1\,E} + \frac{X \cdot h^2_1\,h_2}{3\,J_1\,E} = \frac{X \cdot h^2_1 \cdot h}{3\,J_1\,E} \quad \ldots\ldots \quad (\text{I})$$

Balken von 0 bis 1.

$$M_x = X \cdot \frac{h}{c} \cdot x - M_0; \qquad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{h}{c} \cdot x$$

$$\frac{1}{J_2 E} \int_0^c X \cdot \frac{h^2}{c^2} \cdot x^2 \cdot dx - \frac{1}{J_2 E} \int_0^c M_0 \cdot \frac{h}{c} x \cdot dx$$

$$= \frac{X \cdot h^2 c}{3 J_2 E} - \frac{h}{c \cdot J_2 E} \int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx \quad \ldots \quad (II)$$

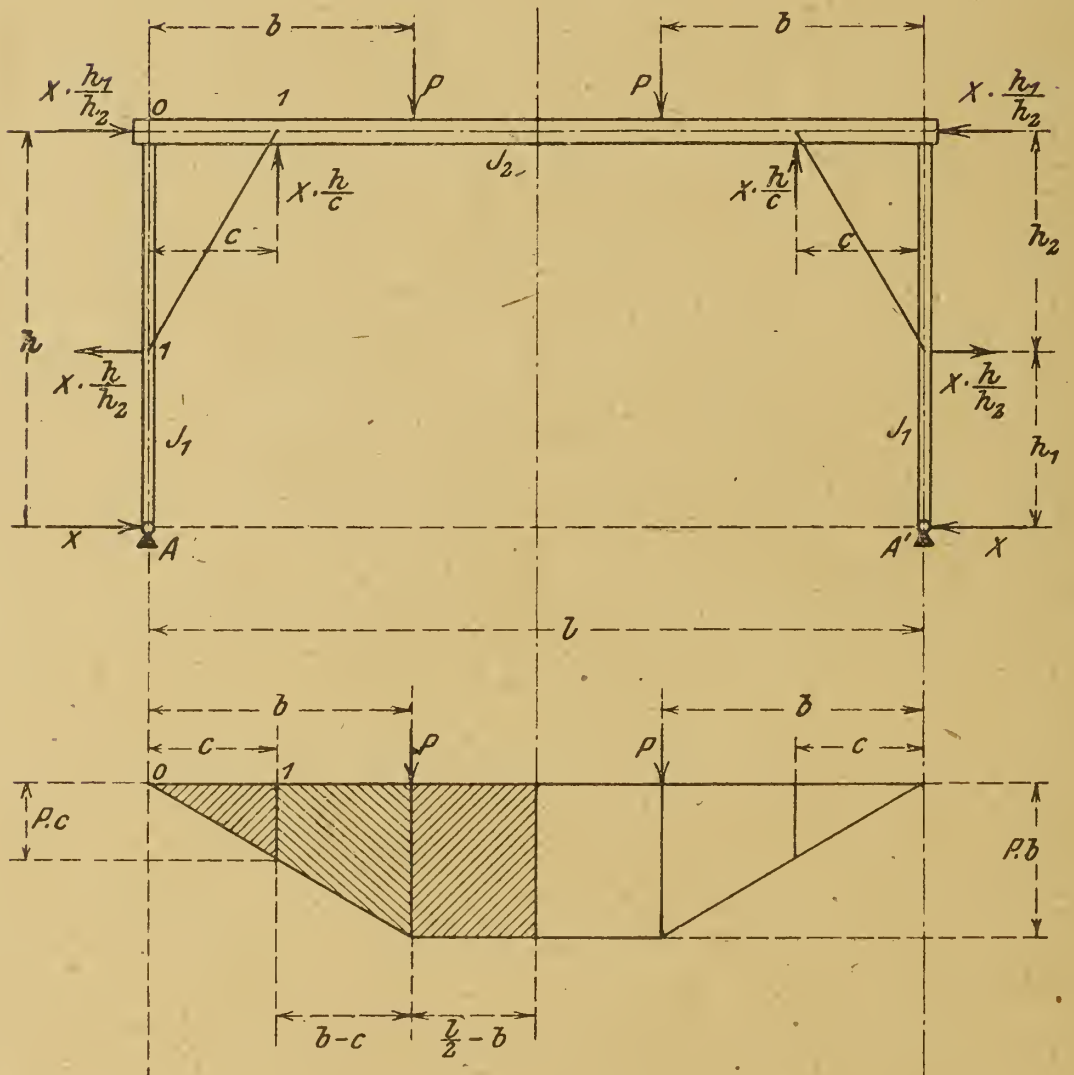


Fig. 61.

Fig. 61 a.

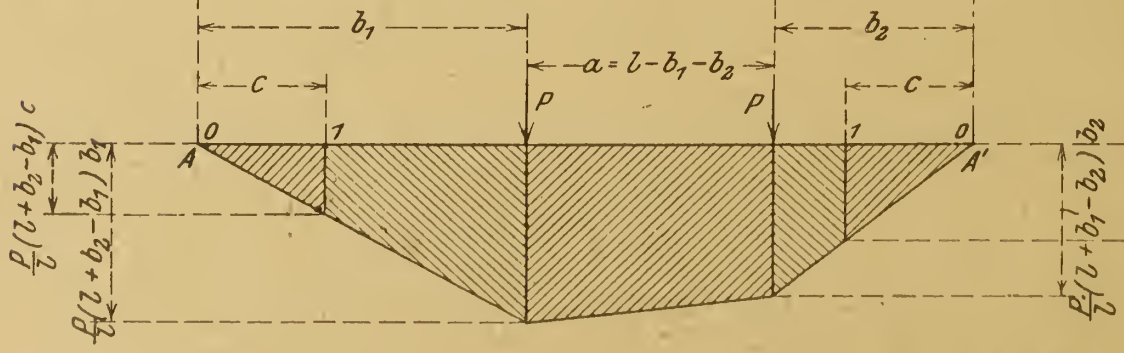


Fig. 61 b.

Balken von 1 bis $\frac{l}{2}$.

$$M_x = X \cdot \frac{h}{c} \cdot x - X \cdot \frac{h}{c}(x - c) - M_0 = X \cdot h - M_0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = h.$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_c^{\frac{l}{2}} X \cdot h^2 \cdot dx - \frac{h}{J_2 E}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx$$

$$= \frac{X \cdot h^2 l}{2 J_2 E} - \frac{X \cdot h^2 c}{J_2 E} - \frac{h}{J_2 E}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

$$I + II + III = 0,$$

$$\frac{X \cdot h_1^2 \cdot h}{3 J_1} + \frac{X \cdot h^2}{J_2}\left(\frac{l}{2} - \frac{2c}{3}\right) - \frac{h}{c \cdot J_2}\int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx$$

$$- \frac{h}{J_2}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx = 0.$$

Mit Bezug auf Figur 61 a ist:

$$\frac{h}{c \cdot J_2}\int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx = \frac{h}{c \cdot J_2} \cdot P \cdot c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2c}{3} = \frac{P \cdot c^2 \cdot h}{3 J_2}.$$

$$\frac{h}{J_2}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx = \frac{h}{J_2}\left\{P \cdot b\left(\frac{l}{2} - b\right) + \frac{P}{2}(b + c)(b - c)\right\}$$

$$= \frac{P \cdot b\, h\,(l - b)}{2 J_2} - \frac{P \cdot c^2 h}{2 J_2},$$

$$\frac{h}{c \cdot J_2}\int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx + \frac{h}{J_2}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx = \frac{P \cdot b\, h\,(l - b)}{2 J_2} - \frac{P \cdot c^2 h}{6 J_2}$$

$$= \frac{P \cdot h}{2 J_2}\left\{b\,(l - b) - \frac{c^2}{3}\right\}.$$

Schließlich

$$X = \frac{\frac{P}{2 J_2}\left\{b\,(l - b) - \frac{c^2}{3}\right\}}{\frac{h^2_1}{3 J_1} + \frac{h}{J_2}\left(\frac{l}{2} - \frac{2c}{3}\right)} = \frac{P}{2} \cdot \frac{b\,(l - b) - \frac{c^2}{3}}{\frac{h^2_1}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + h\left(\frac{l}{2} - \frac{2c}{3}\right)} \quad (99)$$

Nach Kenntnis des Schubes X lassen sich nunmehr die Momente der Pfosten und des Balkens bestimmen.

Fall 2. Wenn das Lastenpaar an beliebiger Stelle, aber zwischen den Schrägstützen steht.

Die Werte aus dem Schube X sind dieselben wie bei Fall 1. Neu zu berechnen sind

$$\frac{h}{c\,J_2}\int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx + \frac{h}{J_2}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx.$$

Vergleiche Fig. 61 b.

$$A = \frac{P}{l}(l + b_2 - b_1), \qquad A' = \frac{P}{l}(l + b_1 - b_2),$$

$$M_{\text{links}} = \frac{P}{l}(l + b_2 - b_1)\,b_1, \qquad M_{\text{rechts}} = \frac{P}{l}(l + b_1 - b_2)\,b_2.$$

$$2 \cdot \frac{h}{c \cdot J_2}\int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx = \frac{h}{c \cdot J_2}\left\{\frac{P}{l}(l + b_2 - b_1) \cdot c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2c}{3}\right.$$

$$\left. + \frac{P}{l}(l + b_1 - b_2) \cdot c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2c}{3}\right\}$$

$$= \frac{h}{c \cdot J_2}\left\{\frac{P}{l}(l + b_2 - b_1) \cdot \frac{c^3}{3}\right.$$

$$\left. + \frac{P}{l}(l + b_1 - b_2) \cdot \frac{c^3}{3}\right\} = \frac{2 \cdot P\,c^2\,h}{3\,J_2},$$

$$2 \cdot \frac{h}{J_2}\int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx$$

$$= \frac{h}{J_2}\left[\left\{\frac{P}{2l}(l + b_2 - b_1)\,b_1 + \frac{P}{2l}(l + b_2 - b_1)\,c\right\}(b_1 - c)\right.$$

$$+ \left\{\frac{P}{2l}(l + b_1 - b_2)\,c + \frac{P}{2l}(l + b_1 - b_2)\,b_2\right\}(b_2 - c)$$

$$\left. + \left\{\frac{P}{2l}(l + b_2 - b_1)\,b_1 + \frac{P}{2l}(l + b_1 - b_2)\,b_2\right\}(l - b_1 - b_2)\right]$$

$$= \frac{P \cdot h}{2\,J_2}\left[l\,(b_1 + b_2) - (b^2{}_1 + b^2{}_2) - 2\,c^2\right].$$

$$2 \cdot \frac{h}{c \cdot J_2} \int_0^c M_0 \cdot x \cdot dx + 2 \cdot \frac{h}{J_2} \int_c^{\frac{l}{2}} M_0 \cdot dx$$

$$= \frac{2 P c^2 h}{3 J_2} + \frac{P \cdot h}{2 J_2} [l (b_1 + b_2) - (b^2_1 + b^2_2) - 2 c^2].$$

Endlich

$$X = \frac{\frac{2 P \cdot c^2}{3 J_2} + \frac{P}{2 J_2} [l (b_1 + b_2) - (b^2_1 + b^2_2) - 2 c^2]}{\frac{2 h^2_1}{3 J_2} + \frac{2 h}{J_2} \left(\frac{l}{2} - \frac{2 c}{3} \right)}$$

$$= \frac{P}{2} \frac{\frac{l}{2} (b_1 + b_2) - \frac{1}{2} (b^2_1 + b^2_2) - \frac{c^2}{3}}{\frac{h^2_1}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} + h \left(\frac{l}{2} - \frac{2 c}{3} \right)} \quad . \quad . \quad (100)$$

Der größte Schub tritt bei symmetrischer Laststellung (Fall 1) ein. Das Maximalmoment für den Balken ergibt sich ziemlich genau, wenn die eine der Lasten um $\frac{a}{4}$ aus der Mitte steht. Dann ist

$$M_{max} = \frac{P}{2 \cdot l} \left\{ l - \frac{a}{2} \right\}^2 - X \cdot h.$$

Die abgeleiteten Formeln für X liefern verschiedene recht brauchbare Ausdrücke, wenn für c und h_1 gewisse Grenzwerte eingesetzt werden. Zum Beispiel bei Einführung von

$$h_1 = h \text{ und } c = 0$$

(das ist, wenn die Ecken gewöhnlich steif sind) kommt man zu den unter Beispiel 47 gefundenen Resultaten.

Beispiel 49. Ein Portal nach Fig. 62. Die statisch unbestimmten Größen wurden nach

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M} \cdot dx = 0$$

und

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = 0$$

ermittelt. M ist das Einspannmoment und X der wagerechte

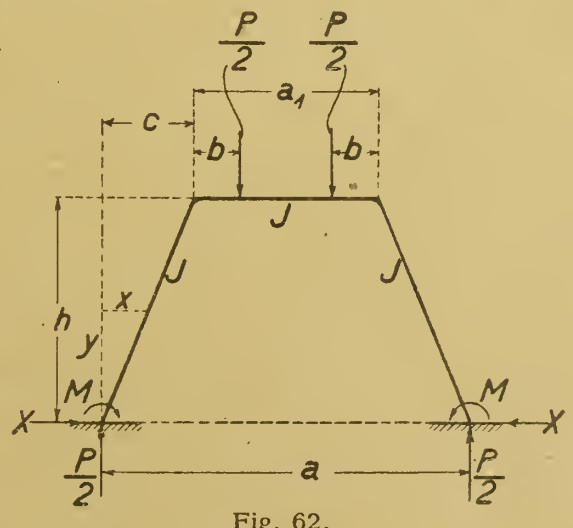


Fig. 62.

Schub an den Füßen. Man erhält zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die sich nach Einführung der Zahlenwerte eines gegebenen Falles leicht nach M und X auflösen lassen.

Nach M)

$$X \cdot h\,(l + a_1) - M\,(2 \cdot l + a_1) = \frac{P}{2}\left\{a_1\,(b + c) - b^2 + c \cdot l\right\} \quad (101)$$

Nach X)

$$X \cdot h\left(\frac{2 \cdot l}{3} + a_1\right) - M\,(l + a_1) = \frac{P}{2}\left\{a_1\,(b + c) - b^2 + \frac{2 \cdot c \cdot l}{3}\right\} \quad (102)$$

Der Pfosten. Das Moment an einer beliebigen Stelle im Abstande y vom Fuße ist

$$M_x = \frac{P \cdot x}{2} + M - X \cdot \frac{h}{c} \cdot x.$$

In der Ecke oben

$$M_e = \frac{P \cdot c}{2} + M - X \cdot h.$$

Der Balken. Das Moment unter der Last beträgt

$$M_b = \frac{P}{2}\,(b + c) + M - X \cdot h.$$

Setzt man in den obigen beiden Gleichungen probeweise $b = o$, dann ergibt sich richtig

$$M = 0$$

und

$$X = \frac{P}{2} \cdot \frac{c}{h}.$$

Hellgengerüste.

Hier eröffnet sich, weil die Krananlagen der Hellgen in so reichen Spielarten variieren und weil die verschiedensten Anforderungen an die Gerüste gestellt werden, in statischer Beziehung ein weites Gebiet.

Man begegnet meistens, wo nicht mit Vorbedacht und mit Recht auf eine statisch einfache und klare Anlage hingearbeitet wird, mehrfach statisch unbestimmten Systemen. Die Bemerkung, letztere absichtlich zu vermeiden, erscheint berechtigt, wenn man bedenkt, daß die der Berechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen (meistens Auflagerbedingungen) in Wirklichkeit garnicht zutreffen. Beispielsweise weichen die tatsächlichen Spannungsverhältnisse eines beiderseitig

eingespannten Balkens erheblich von den theoretischen ab, weil es eben nicht möglich ist, eine feste Einspannung zu erzielen. Überhaupt darf gesagt werden, daß die Verfolgung hoher statischer Unbestimmtheiten, da sie praktisch der Realität der Voraussetzungen entbehren, mehr theoretischen Nutzen haben.

Man wird also beim Entwurf von Hellgengerüsten den Grundsatz haben: ein klares System, möglichst statisch bestimmbar; Schaffung von Bedingungen, die wirklich zutreffen, somit sichere Rechnungsergebnisse.

Beispiel 50. Ein Hellgengerüst nach Fig. 63 von 149,6 m nutzbarer Länge, mit dem in Figur dargestellten Gesamtquerschnitt.

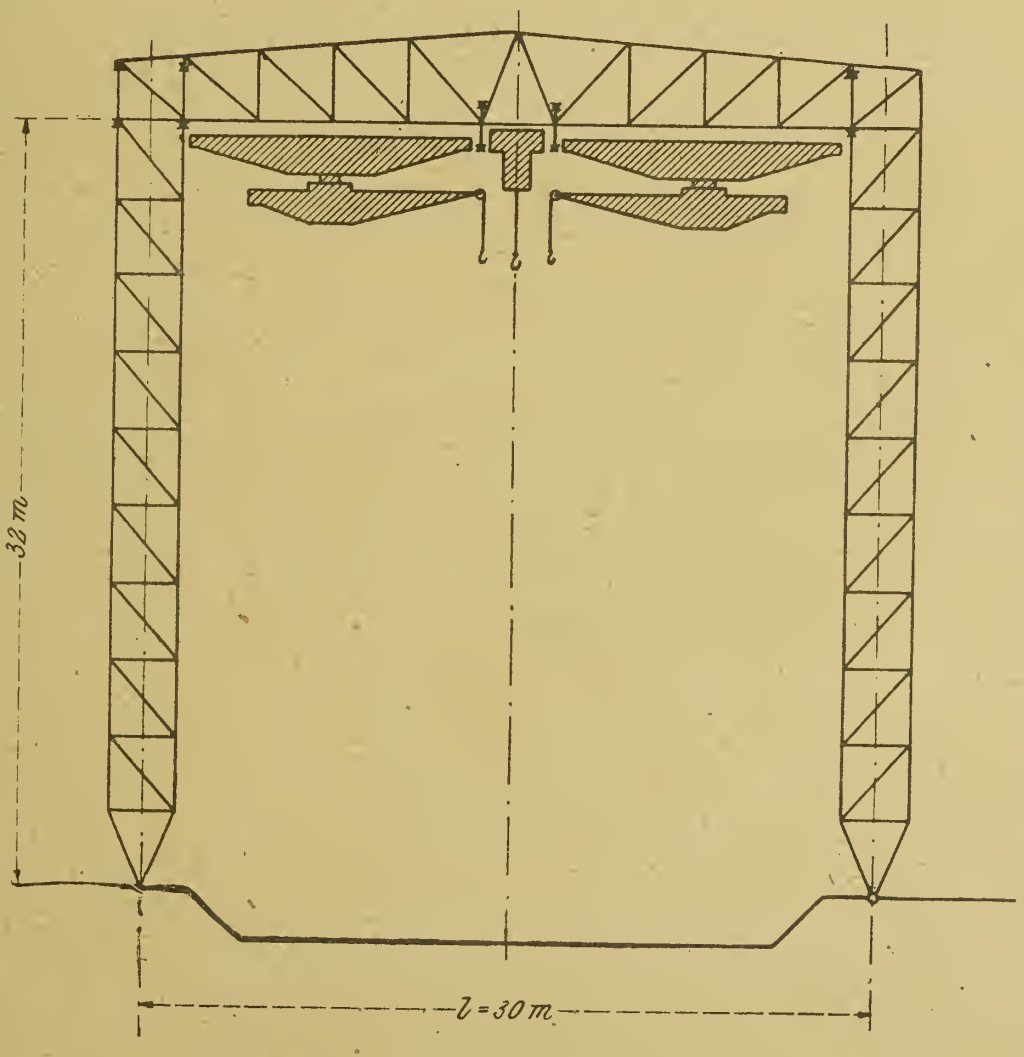


Fig. 63.

Die Krananlage ist folgende: In der Mitte zwei hintereinanderlaufende Katzen von je 5 t Tragkraft, sodann auf jeder Seite je zwei Laufkrane mit drehbarer Auslegerkatze, ebenfalls von 5 t Tragfähigkeit.

Die Raddrucke der leeren Katze sind

$$R_i,$$

die der Katze mit Last

$$R_m.$$

Der Radstand beträgt b (bzw. a zwischen zwei hintereinanderstehenden Katzen).

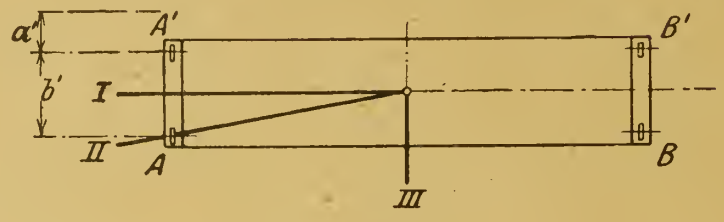


Fig. 63 e.

Die Verhältnisse und Raddrucke der Laufkrane mit Auslegerkatze gibt Fig. 63 e an.

Das Gerüst soll folgenden Belastungsfällen und Beanspruchungen genügen:

Bei Eigengewicht und leeren Kranen nicht über	800 kg pro cm²
Bei Eigengewicht, leeren Kranen und Wind 200 kg/m² nicht über . .	1600 kg pro cm²
Bei Eigengewicht, maximal belasteten Kranen, ohne Wind nicht über	1300 kg pro cm².

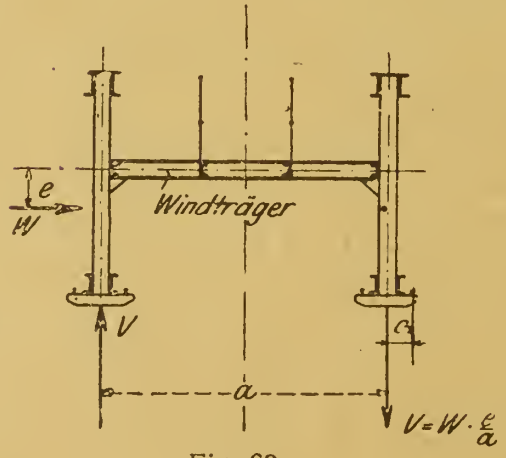


Fig. 63 a.

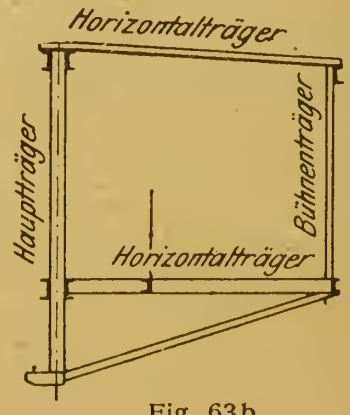


Fig. 63 b.

Querschnitt Fig. 63 zeigt die Anlage der Kranbahnen: in der Mitte zwei nebeneinanderliegende Längsträger; zwischen ihnen auf besonderen an den Untergurten hängenden Fahrbahnen laufen die Katzen; in gleicher Weise außerhalb der Träger sind die Fahrbahnen der großen Auslegerkrane angelegt (Fig. 63 a). Sodann liegen noch

Längsträger, als Tragorgane der zweiten Laufbahn der Auslegerkrane, zwischen den Säulen bzw. innenseitig der Säulen. Querschnitt Fig. 63 b.

Die Säulen stehen im Abstande $l = 22$ m, tragen die Hauptbinder und bilden mit diesen steife Rahmen, die die Aufgabe haben, alle

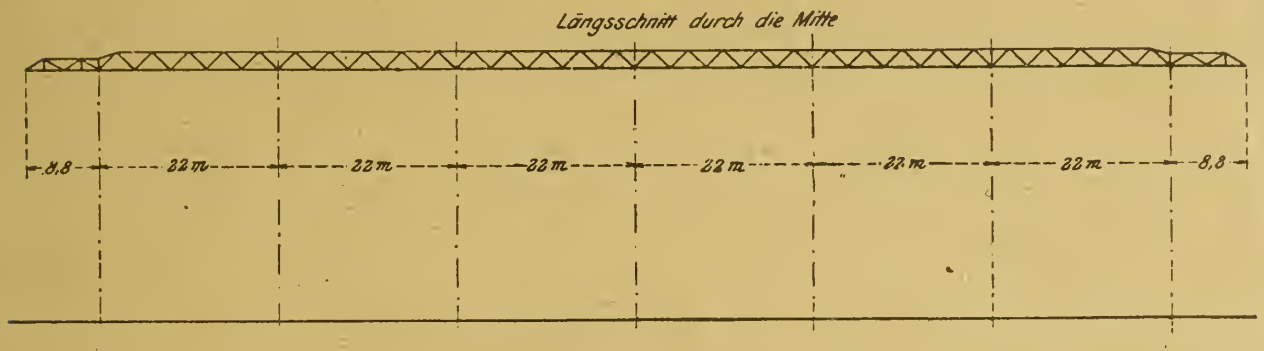


Fig. 63 c.

Kräfte quer zur Längsrichtung aufzunehmen (Fig. 63). Infolgedessen bedarf die Anlage für Wind in der bezeichneten Richtung keines besonderen Verbandes bzw. Stützorganes.

Sämtliche Längsträger sind von Binder zu Binder unterstützt, haben also eine Spannweite von $l = 22$ m.

Fig. 63 c zeigt einen Längsschnitt durch den Hellgen; Fig. 63 d läßt die Längsansicht erkennen.

Die Standsicherheit des Gerüstes nach dieser Richtung vornehmlich gegen Wind wird durch die in den beiden mittleren Säulen-

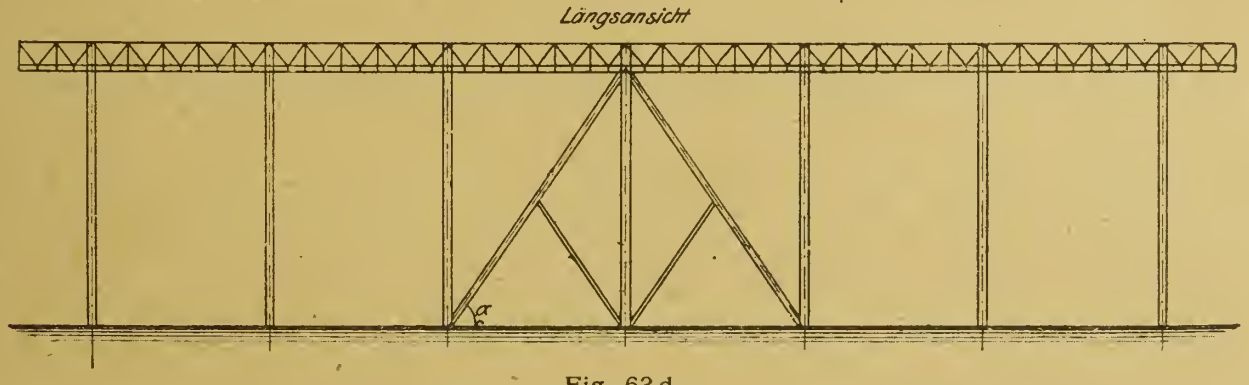


Fig. 63 d.

feldern errichteten Dreieckstreben herbeigeführt. Die Anordnung der Streben in der Mitte der Längswände geschieht mit der Absicht, die Längenänderungen der Anlage infolge Temperaturdifferenz nicht zu behindern.

Über die Anordnung von Nebenträgern für Wind sowie für Verdrehungskräfte der Fahrbahnen, ferner über die Bühnenträger geben die Fig. 63 a und 63 b Aufschluß.

Die Berechnung der Anlage beginnt mit den Fahrbahnträgern der Katzen und der Auslegerkrane.

1. Fahrbahnträger der Katzen. Laststellung Fig. 63 f. Maximalraddrucke R_m.

Um der Kontinuität des Trägers mit ziemlicher Annäherung Rechnung zu tragen, wird das Maximalmoment, das aus der Berechnung des Trägers als Träger auf zwei Stützen gefunden wird, mit dem Faktor 0,75 multipliziert. Daher

$$M^{\max} = \frac{R_m}{2\,l}\left\{l - \frac{a}{2}\right\}^2 0{,}75.$$

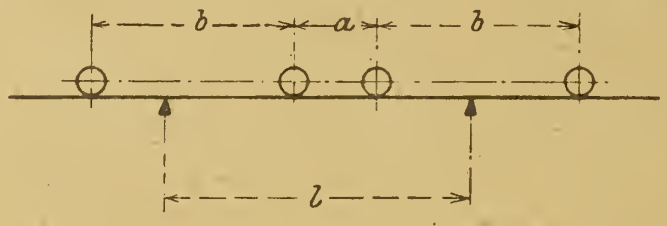


Fig. 63 f.

Eine genauere Berechnung kann nach der anhängenden Tafel für Träger auf vielen Stützen erfolgen.

Das Widerstandsmoment ist so groß zu wählen, daß

$$\sigma = \frac{M^{\max}}{W}$$

nicht über 1300 kg/cm² beträgt.

2. Fahrbahnträger der Auslegerkrane. Dieselbe Laststellung. Maximalraddruck ${}^{\text{II}}A_m$. Größtes Moment und Beanspruchung wie oben.

3. Die Konsole (Fig. 63 a).

Maximalmoment

$$M^{\max} = R_0 \cdot c,$$

wo R_0 der zu ermittelnde größte Lastanteil aus den Raddrucken ist. Beanspruchung nicht über 1300 kg/cm².

4. Die mittleren normalen Längsträger. System Fig. 63 g. Länge $l = 22$ m. Senkrechte Belastung: Eigengewicht, Katzen und Laufkrane.

Wegen der Vielfältigkeit der Belastungsfälle empfiehlt es sich Einflußlinien zu verwenden.

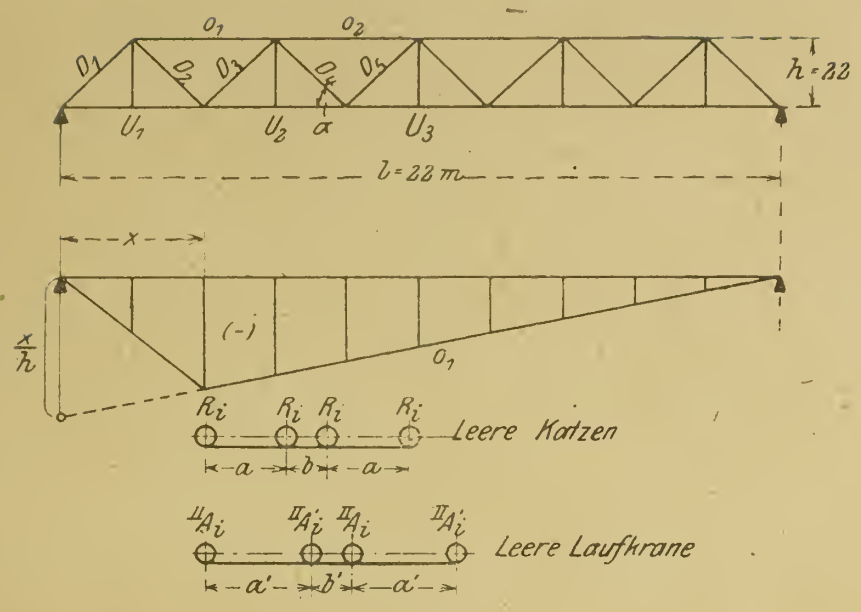


Fig. 63 g—h.

Fall 1. Eigengewicht und leere Krane. $\sigma = 800$ kg/cm².

S t a b O_1. Einflußlinie Fig. 63 h für $P = 1$ t.

Die leeren Katzen geben die Maximalspannung bei der in Figur gezeichneten Lasstellung. Ebenso die leeren Laufkrane; hier muß auf die Auslegerstellung II geachtet werden. Sämtliche Raddrucke können zugleich wirksam sein

$$O_1 = \Sigma P \cdot \eta.$$

Das Eigengewicht liefert $O_1^g = F_0 \cdot g$.

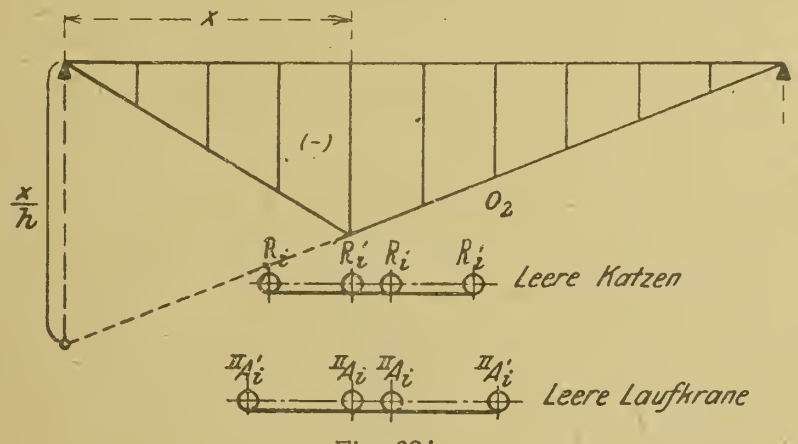


Fig. 63 i.

S t a b O_2. Einflußlinie Fig. 63 i für $P = 1$ t.

Die Maximalspannungen treten ein bei den in Figur gezeigten Laststellungen. Man achte wieder auf die Auslegerrichtung der Laufkrane. Wie oben sind sämtliche Raddrucke zugleich wirksam.

Aus Eigengewicht

$$O_2^g = F_0 \cdot g.$$

S t a b U_3. Einflußlinie Fig. 63 k für $P = 1$ t.

Die ungünstigsten Katzen- und Kranstellungen sind wie die des vorhergehenden Stabes.

Wie immer ist

$$U_3 = \Sigma P \cdot \eta.$$

Aus Eigengewicht

$$U_3^g = F_0 \cdot g.$$

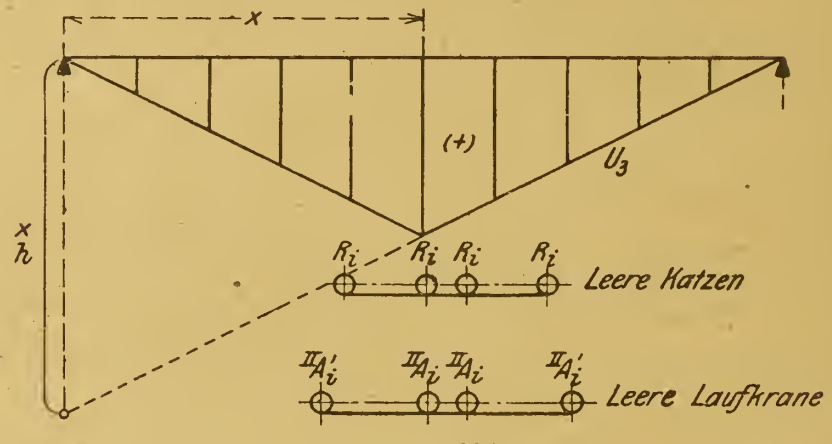


Fig. 63 k.

S t a b D_1. Einflußlinie Fig. 63 l für $P = 1$ t.

Man stelle, um die Maximalspannkraft zu erhalten, die Lasten wie bei Stab O_1. Auslegerrichtung des Laufkranes über II.

Das Eigengewicht

$$D_1^g = F_0 \cdot g.$$

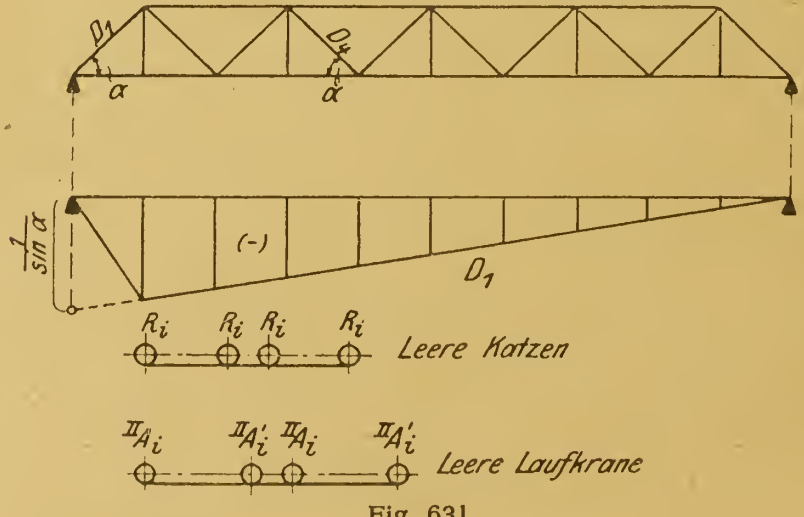


Fig. 63 l.

S t a b D_4. Einflußlinie Fig. 63 m für $P = 1$ t.

Die größte Zugspannung erfolgt bei der in Figur rechts unter der positiven Beitragsstrecke vermerkten Laststellung, die größte Druckspannung dagegen, wenn die Räder von links in das negative Feld ge-

schoben werden. Es wird dabei nochmals auf die Auslegerrichtung II des Laufkrans aufmerksam gemacht.

$$+ D_4 = \Sigma P \cdot \eta$$
$$- D_4 = \Sigma P \cdot \eta$$
$$+ D_4^g = F_0 \cdot g.$$

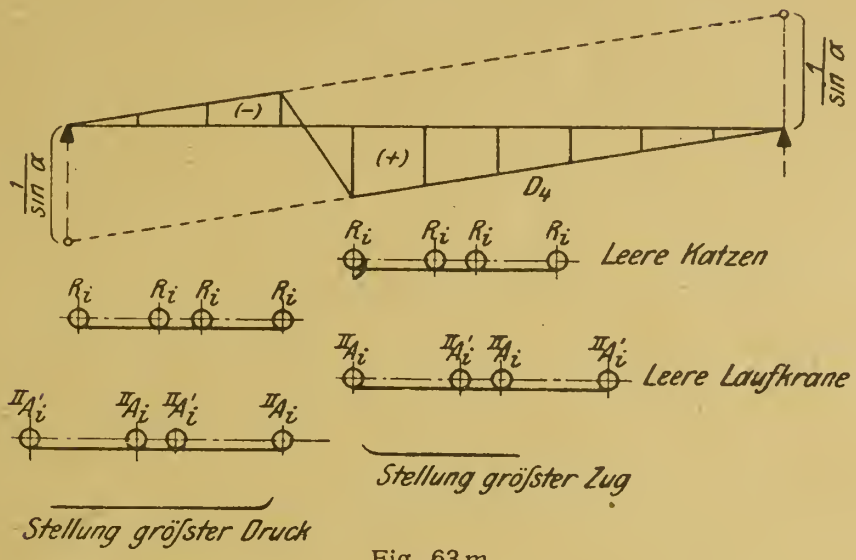


Fig. 63 m.

5. Die mittleren Längsträger mit Kragarm.

S t a b U_4. Einflußlinie Fig. 63 n für $P = 1$ t.

Man achte auf das negative Beitragsfeld des Kragarmes. Die maximalspannungserzeugenden Laststellungen sind in der Figur angegeben.

S t a b D_6. Einflußlinie Fig. 63 o für $P = 1$ t.

Die den größten Zug bewirkende Laststellung ist ohne weiteres erkennbar. Zur Herbeiführung der größten Druckkraft müssen, nach Maßgabe der Figur, die Katzen, desgleichen die Krane getrennt werden. Man achte auf die Auslegerrichtung der Laufkrane.

6. Die seitlichen Längsträger.

Die Träger unterscheiden sich von jenen zunächst dadurch, daß nicht wie dort die Untergurte zugleich die Fahrbahn bilden, daß diese vielmehr besonders angeordnet und an den verlängerten Vertikalen aufgehängt sind. Sodann dadurch, daß ihr System umgekehrt ist. Allein weil die Höhe h dieselbe ist, können die gezeichneten Einflußlinien auch hier benutzt werden, nur mit der Beachtung, daß die Vorzeichen sämtlich wechseln. Zum Beispiel ist die Einflußlinie des Stabes O_2 oben gültig für den hier zu berechnenden Stab U_3.

Als Belastung aller Träger kommen in Frage die Raddrücke zweier Laufkrane.

Nach Ermittelung der reinen Stabkräfte sämtlicher Längsträger gehe man an die Festellung der Nebenspannungen infolge exzentrischen Angriffs der Raddrucke. Die rahmenartige Querschnittsanordnung der Fig. 63 a ist geeignet, diesen Kräften, die natürlich bei leerer

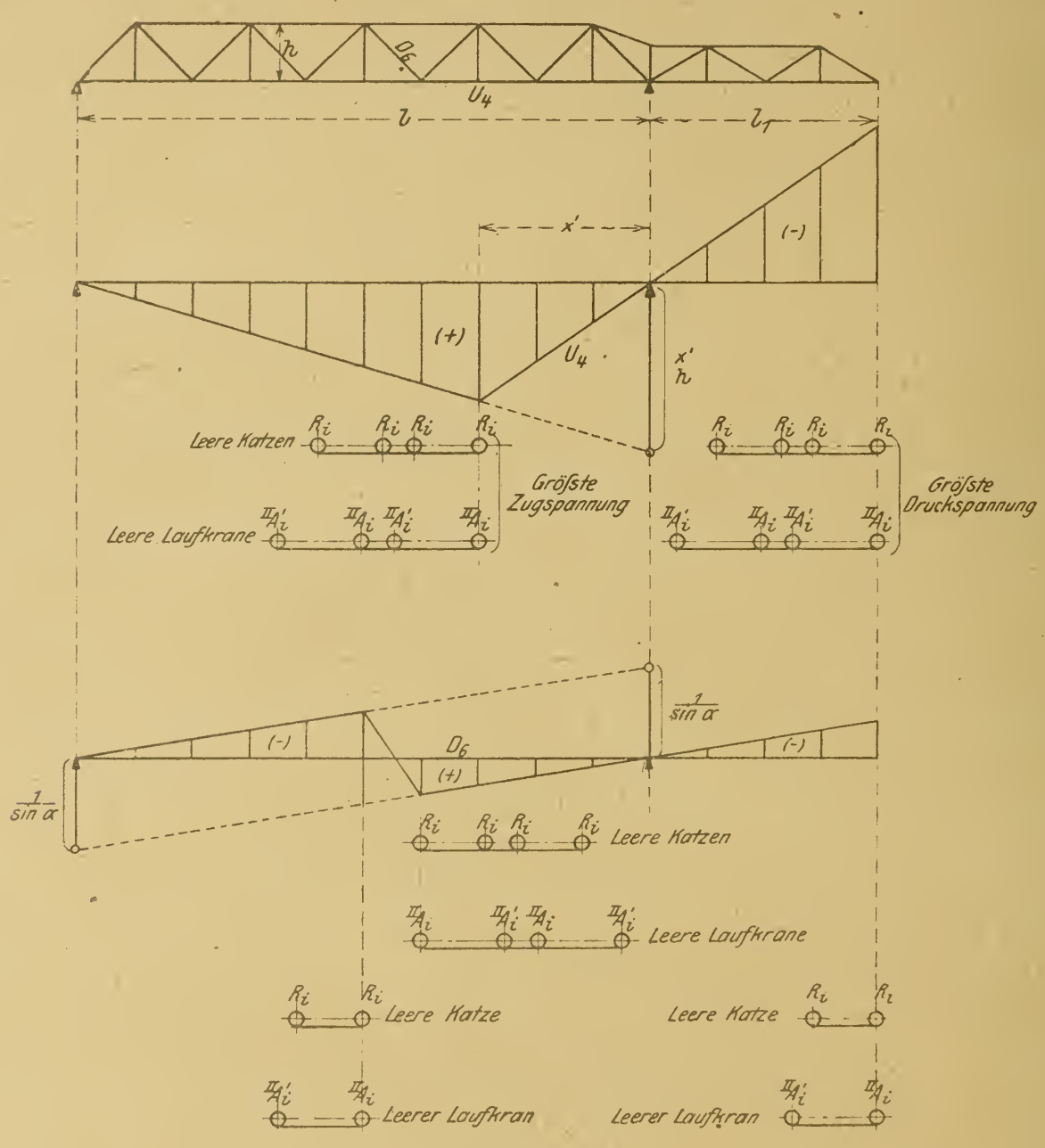


Fig. 63 n—o.

Katzenbahn und nur Anfahrt der Laufkrane am ungünstigsten werden, wirksam zu begegnen. Dasselbe dürfte von der Querschnittsanordnung der seitlichen Längsträger gesagt werden.

Hierauf folgt der statische Nachweis der Längsträger für die Belastung:

Fall 2. Eigengewicht, leere Krane, Wind 200 kg/m²; $\sigma = 1600$ kg/cm².

Die Spannungen aus Eigengewicht und leeren Kranen sind bekannt, es erübrigt sich also noch die Untersuchung der Träger auf Windangriff.

7. Die mittleren Längsträger.

Bezeichnet W die resultierende Windkraft gegen die Trägerwände und e ihr Abstand von der Schweraxe des Windträgers, dann ist das Drehmoment

$$M = W \cdot e$$

und das von den Wänden aufzunehmende Gegenkräftepaar

$$V = \frac{W \cdot e}{a}. \text{ (Fig. 63 a.)}$$

Diese Kräfte dürfen wegen ihrer geringen Größe vernachlässigt werden.

Zu berechnen wäre demnach nur der Horizontalträger für die gleichmäßig verteilte Windkraft W und den Wind gegen die fahrenden Krane.

8. Die seitlichen Längsträger.

Nach Querschnitt Fig. 63 b bilden die Trägergurte zugleich die Gurte der Windträger, wodurch jene bei Wind quer zur Längsrichtung des Hellgen Zusatzspannung erhalten. Diese wird nach Ermittelung der Windträgerspannungen den Stabkräften der Längsträger zugeschlagen.

Schließlich muß das Trägerwerk noch für die Belastung

Fall 3. Eigengewicht und belastete Krane, σ nicht über 1300 kg/cm² durchgerechnet werden. Natürlich benutzt man wieder die vorhandenen Einflußlinien.

9. Der große Querrahmen.

Indem die Fußpunkte der Stützen infolge der festen Verlagerung eine horizontale Bewegung nicht ausfuhren können, tritt daselbst ein wagerechter Schub auf, der als statisch Unbestimmte X einzuführen ist. Eine weitere nicht unmittelbar bestimmbare Auflägergröße ist vermieden, und zwar durch die gelenkige Einrichtung der Verlagerung.

Zum Zweck, eine vorläufige, gut angenäherte Dimensionierung vornehmen zu können, leite man die Stabspannungen zunächst auf Grund der unter Beispiel 47 (Portal) entwickelten Formel für den Horizontalschub X ab (Fig. 63 p).

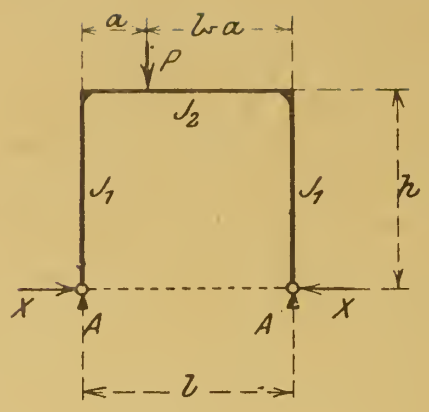


Fig. 63 p.

Es war, unter Voraussetzung eines konstanten Trägheitsmomentes J_1 des Pfostens und J_2 des Querbalkens

$$X = \frac{P\,a\,(l-a)}{2\,N}$$

wo

$$2N = 2h\left\{\frac{2}{3}\frac{J_2}{J_1}\cdot h + l\right\}. \quad \text{(Fig. 63 p.)}$$

Eine überschlägliche Rechnung möge ergeben

$$J_1 = \frac{2}{3}\,J_2.$$

Dann wird

$$2N = 2h\{h + l\}$$

mithin

$$X = \frac{P\,a\,(l-a)}{2\,h\,(h+l)}$$

Der Zähler $a\ (l-a)$ kann als Biegungslinie des Balkens, der Nenner $2\,h\ (h+l)$ als Verschiebung des Punktes a aufgefaßt werden, wenn an letzterem die Kraft $X = -1$ t angreift.

Die Biegungslinie ist eine Parabel mit der Höhe

$$f = \frac{l^2}{4} = \frac{\overline{30}^2}{4} = 225.$$

Die Verschiebung bei a beträgt

$$\delta = 2 \cdot 32\,(32 + 30) = 3968.$$

Da es nur auf Verhältniswerte ankommt, so können vorstehende Zahlen beliebig verkleinert werden. Z. B.

$$f = 2{,}25 \text{ cm}$$

und

$$\delta = 39{,}68 \text{ cm}.$$

Jedenfalls erzeugt eine Last P am Binder angreifend, wenn c die zugehörige Ordinate der Biegungslinie (Parabel) ist, den Horizontalschub

$$X = P\,\frac{c}{\delta}$$

S t a b O_5. Einflußlinie.

Wir stellen $P = 1$ t in Knoten 5 des Untergurtes. Dann ergibt sich

$$-O_5 = \frac{1}{r}\{A \cdot x - X \cdot y\} = \frac{1}{r}\left\{\frac{x^1 \cdot x}{l} - \frac{c}{\delta} \cdot y\right\}$$

$$= \frac{y}{r \cdot \delta}\left\{\frac{x^1 \cdot x \cdot \delta}{l \cdot y} - c\right\}.$$

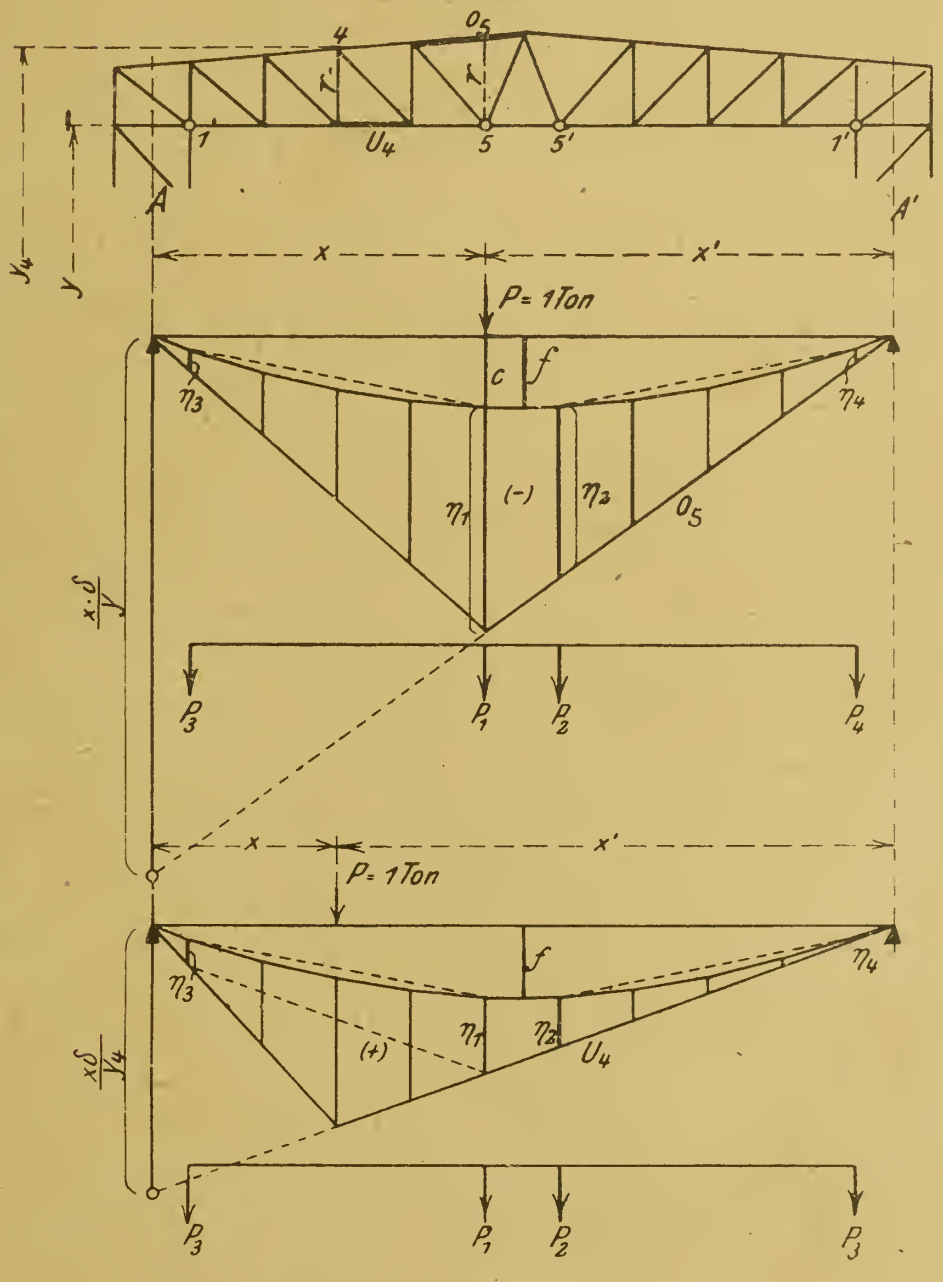


Fig. 63q

Fig. 63r.

Fig. 63s.

Wie Fig. 63 r zeigt, läßt sich das erste Glied der Klammer in der gewöhnlichen Weise durch Auftragung des Wertes

$$\frac{x \cdot \delta}{y}$$

unter A graphisch darstellen. Das zweite Glied c ist gegeben durch die Ordinaten der Biegungslinie.

Die schraffierte Fläche liefert somit die Einflußlinie der Stabspannung O_5.

Es ist

$$O_5 = \frac{y}{r\delta} \cdot P \cdot \eta.$$

Die Angriffsstellen der Kranlasten sind die Knoten 1, 5, 5^1 und 1^1. Um $O_{5\,max}$ zu erhalten, müssen mithin möglichst schwere Lasten in die Knoten 5 und 5^1 gebracht werden. Man bestimme daher diejenigen Kran- und Katzenstellungen, bei denen die Auflagerdrucke der mittleren Längsträger am größten werden. Zugleich sind wirksam die Minimalauflagerdrucke der seitlichen Längsträger. Natürlich hängen in den bezeichneten Knoten auch die Eigengewichte der Längsträger.

Bedeutet man mit P_1 bis P_4 die gefundenen Lasten, dann ergibt sich

$$-O_5 = \frac{y}{r\delta} \{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + P_4 \eta_4\}.$$

Schließlich liefert das Eigengewicht des Binders noch Spannung in fraglichem Stabe

$$-O_5^g = \frac{y}{r \cdot \delta} \cdot F_0 \cdot g.$$

S t a b U_4. Einflußlinie.

Die Last $P = 1$ t in Knotenaxe 4 erzeugt

$$+U_4 = \frac{1}{r} \{A \cdot x - X \cdot y_4\} = \frac{1}{r} \left\{\frac{x^1 x}{l} - \frac{c}{\delta} \cdot y_4\right\}$$

$$= \frac{y_4}{r\delta} \left\{\frac{x^1 x \delta}{l y_4} - c\right\}.$$

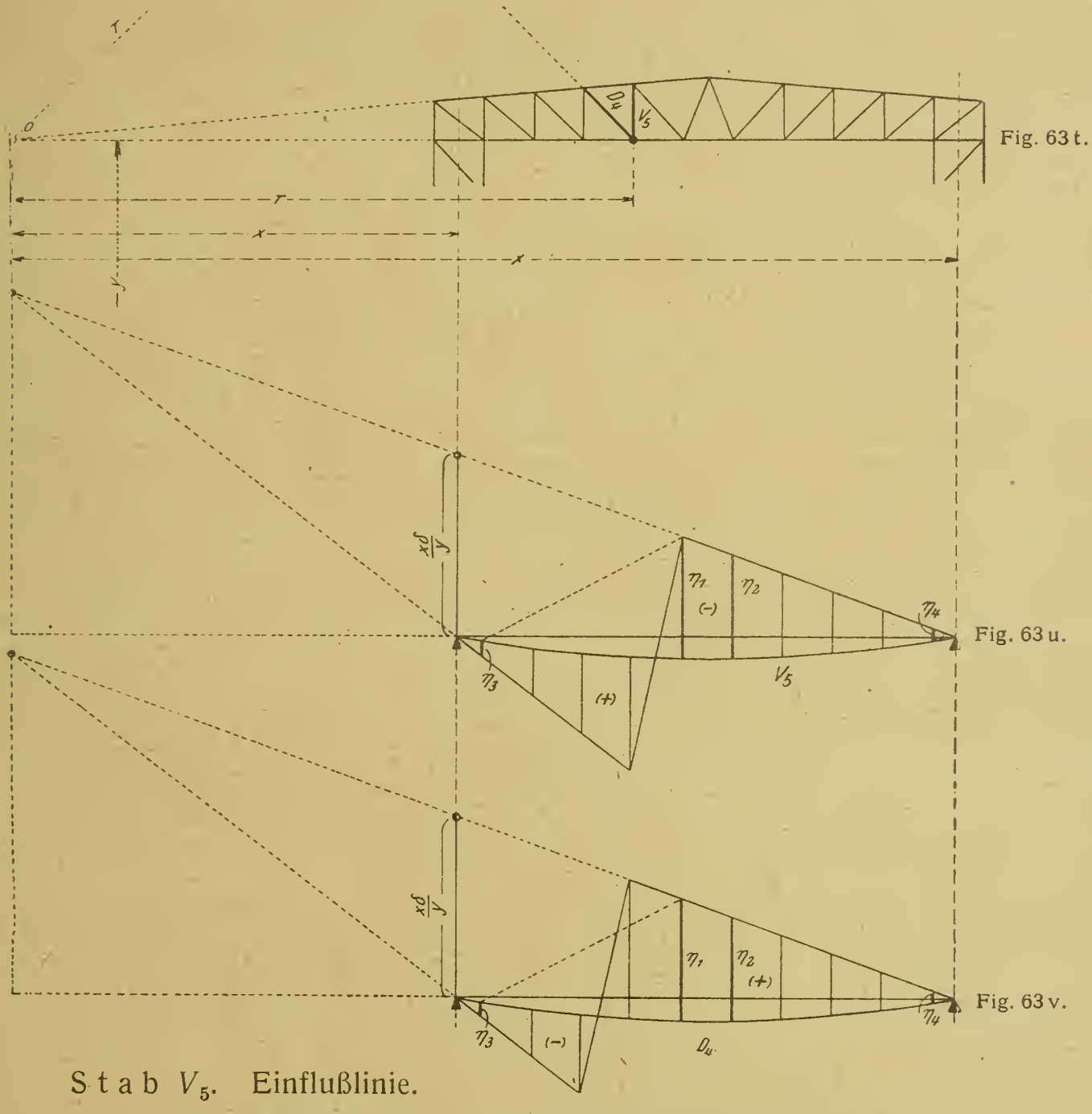
Die Konstruktion der Einflußlinie geschieht wie die des vorhergehenden Stabes (Fig. 63 s).

S t a b D_4. Einflußlinie.

Stellt man die Last $P = 1$ t in den Schnittpunkt o der beiden Gurtstäbe, dann ergibt sich (Fig. 63 t)

$$+D_4 = \frac{1}{r} \{A \cdot x - X \cdot y\} = \left\{\frac{x^1 x}{l} - \frac{c}{\delta} \cdot y\right\} = \frac{y}{r\delta} \left\{\frac{x^1 x \delta}{l y} - c\right\}.$$

Bezüglich des ersten Gliedes der Klammer wiederholt sich die schon öfters geübte Konstruktion der Einflußlinie eines gewöhnlichen Trägers auf zwei Stützen. Das zweite Glied ist gegeben durch die Ordinaten der Biegungslinie (Fig. 63u).



Stab V_5. Einflußlinie.

Man geht wiederum zweckmäßig von der besonderen Laststellung $P = 1$ t im Schnittpunkt o der beiden Gurtstäbe aus. Dann ist

$$-V_5 = \frac{1}{r}\left\{A \cdot x - X \cdot y\right\} = \frac{1}{r}\left\{\frac{x^1 \cdot x}{l} - \frac{c}{\delta} \cdot y\right\}$$

$$= \frac{y}{r \cdot \delta}\left\{\frac{x^1 \cdot x \cdot \delta}{l \cdot y} - c\right\}.$$

Die Einflußlinie entwickelt sich in derselben Weise wie für Stab D_4 (Fig. 63 u).

S t a b S_8. Pfostenstab. Einflußlinie.

Infolge einer Last $P = 1$ t im Abstande x von der linken Stützenmitte entsteht

$$-S_8 = \frac{A}{2} + \frac{X \cdot y}{v} = \frac{x^1}{2l} + \frac{c}{\delta} \quad \frac{y}{v}$$

$$= \frac{y}{v\delta} \left\{ \frac{x^1 v \delta}{2 l y} + c \right\}.$$

Die Einflußlinie setzt sich zusammen aus dem Dreieck mit der Höhe

$$\frac{v\delta}{2y}$$

über A und den Ordinaten der Biegungslinie (Fig. 63 x).

S t a b S_9^1. Pfostenstab. Einflußlinie.

Der Spannungswert für die Last $P = 1$ t ist derselbe wie bei S_8, nur subtrahieren sich die Klammerglieder als Folge der entgegengesetzten Wirkung des Schubes X und der Senkrechten A.

$$-S_9^1 = \frac{A}{2} - \frac{X \cdot y}{v} = \frac{y}{v\delta} \left\{ \frac{x^1 v \delta}{2 l y} - c \right\}.$$

Fig. 63 y liefert die Einflußlinie.

Die Diagonalen der Stützen erhalten nur Spannung aus dem Schube X. Wegen der parallelen Führung der Außenrippen ist

$$+D = \frac{X}{\cos \alpha} = \frac{1}{\delta \cdot \cos \alpha} \cdot c.$$

Mithin gilt die Biegungslinie ohne weiteres als Einflußlinie der Diagonalspannungen (Fig. 63 z).

Sind auf diesem Wege sämtliche Maximalspannkräfte des Rahmenfachwerks festgelegt, dann kann eine Dimensionierung mit etwas reichlicher Querschnittsgebung erfolgen. Hierauf schreite man zur genauen Berechnung.

Man belaste den Rahmen in den Fußpunkten bei a mit den gleichen und entgegengesetzten Kräften $X = -1$ t. Die hieraus entstehenden Stabspannungen ermittle man mit Hilfe eines Cremonaplanes. Sodann berechne man die Längenänderungen der Glieder nach

$$\Delta = \frac{S_1 \cdot s}{EF},$$

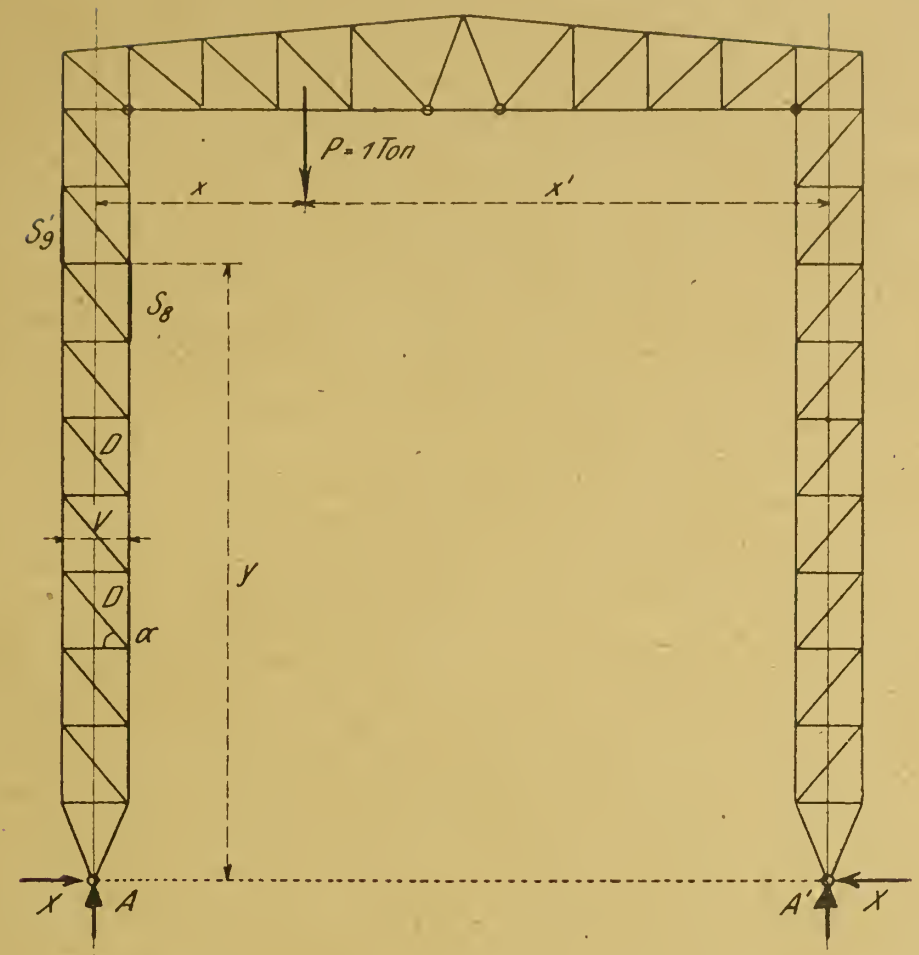


Fig. 63 w.

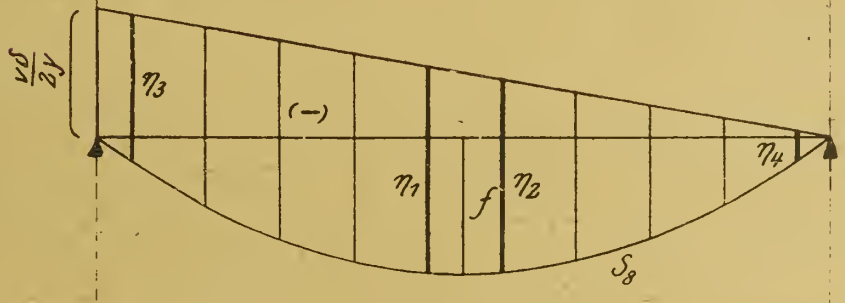


Fig. 63 x.

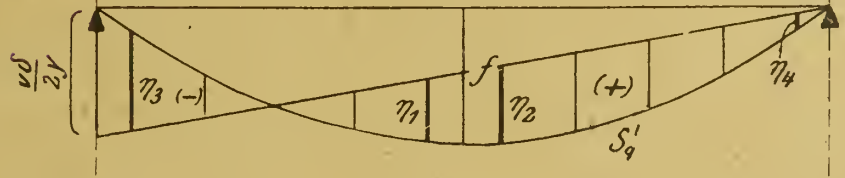


Fig. 63 y.

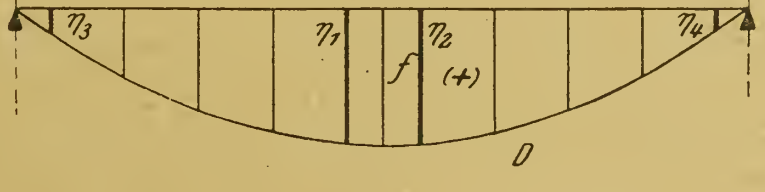


Fig. 63 z.

wo S_1 die Spannung, s die Länge, F den Querschnitt der Stäbe und E den Elastizitätsmodul bedeuten.

$$\triangle = \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{kg/cm}^2 \cdot \text{cm}^2} = \text{mm}.$$

Hierauf bestimme man mit einem Williotschen Verschiebungsplan die Formveränderung des Stabgebildes, wobei man vorteilhaft den Firstpunkt b als Ausgangspunkt der Verrückungen wählt und den gegenüberliegenden Untergurtstab in seiner wagerechten Lage festhält.

Die Arbeit führt zu einer genauen Biegungslinie des Binderuntergurts und gibt den Wert δ_{aa}, um den sich der Fußpunkt a bezüglich des gegenüberliegenden verschiebt. Der Bedingung

$$X = P \cdot \frac{c}{\delta_{aa}}$$

haften nunmehr keine Ungenauigkeiten mehr an, so daß die auf dieser Basis zum zweitenmal durchgeführte Rechnung endgültige Spannungswerte des Rahmenfachwerks liefert.

Es mögen die dem ersten und dritten Belastungsfall genügenden Spannungen ermittelt sein. Dann bedarf es noch der Feststellung der Stabkräfte, wenn der Wind mit 200 kg/m² quer zur Längsrichtung des Hellgen stößt. Hierbei ist zu beachten, daß nicht allein das Gerüst vom Winde angegriffen wird, daß vielmehr diesem auch die Katzen und Krane ausgesetzt sind; um daher deren Beitrag zu den übrigen Windkräften zu erhalten, fahre man sie möglichst dicht unter dem Binder auf. Natürlich ist es eine zeitraubende Arbeit, alle den Rahmen in seinen Einzelheiten erfassenden Windkräfte aufzustellen, allein sie sollte im Interesse einer befriedigenden Rechnung nicht umgangen werden. Fig. 63_1 zeigt den Belastungszustand bei Wind.

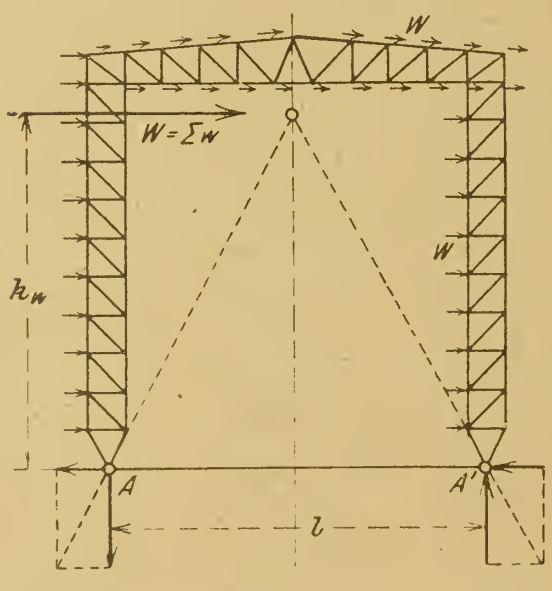


Fig. 63_1.

Man ermittle mit Hilfe eines Seilpolygons die Lage der Resultierenden

$$W = \sum w.$$

Es darf angenommen werden, daß die Kraft sich zu gleichen Teilen

$$\frac{W}{2}$$

wagerecht auf beide Auflager verteilt. Außerdem werden die Fußpunkte noch von den senkrechten Kräften

$$A_v = A_v^1 = \frac{W \cdot h_w}{l}$$

angegriffen. Auf Grund dieser Gleichgewichtsbedingung lassen sich die Stabkräfte graphisch leicht nachweisen, Sämtliche Werte wechseln ihre Vorzeichen bei entgegengesetzt gerichtetem Winde. Sodann vereinige man die Spannungen mit den Spannungen aus Eigengewicht und leeren Kranen und sehe, ob dem zweiten Belastungsfall Genüge geleistet wird.

Schließlich bewirkt eine Temperaturveränderung noch Rahmenspannungen infolge des dabei einsetzenden Horizontalschubes. Unter dem Angriff von $X = 1$ t verschob sich der Fußpunkt um die Strecke δ_{aa}. Bei einer Temperaturveränderung um t Grad verändert sich die Entfernung l um den Weg

$$\delta^t_{aa} = \alpha \cdot t \cdot l.$$

Somit berechnet sich die dabei zustande kommende Kraft X^t aus

$$X^t = 1 \cdot \frac{\delta^t_{aa}}{\delta_{aa}} = 1 \cdot \frac{\alpha \cdot t \cdot l}{\delta_{aa}}.$$

Es sei in Aussicht genommen, die Montage des Rahmens bei einer Temperatur von $+10^0$ vorzunehmen. Dann führe man eine Erhöhung und eine Erniedrigung um 20^0 ein, ermittle die Schübe $+X^t$ und $-X^t$ und daraus die Stabspannungen. Die Ergebnisse sind mit den sonstigen Spannungen zu den ungünstigsten Werten zusammenzusetzen. (Bei Berechnung der Spannungen aus X^t benütze man die Stabspannungen S_1 aus $X = 1$ t: $S^t = X^t \cdot S_1$).

Das Hellgengerüst unterliegt noch erheblichen Beanspruchungen bei Wind in Längsrichtung. Die eingehende Verfolgung dieser Wirkungen dürfte, da dabei nichts neues zu bemerken ist, den Raum des Buches unnötig in Anspruch nehmen. Wir beschränken uns auf einige kurze Bemerkungen.

Die Binderober- und -Untergurte müssen wagerecht als Träger wirken, d. h. breit gebaut sein. Dies läßt sich leicht erreichen, indem man die Binder teilt und soweit auseinander rückt, daß zwischendurch die Querlaufbühnen geführt werden können. Dann ist die Untergurtebene gut versteift und bedarf es nur noch einer entsprechenden Vergitterung der Obergurtrippen. Auch ist es zweckmäßig, die Binder zwischen den Firsten durch längsrichtig laufende Versteifungsträger zu verbinden. Der Wind wird schließlich in die eingangs beschriebenen Dreieckstreben gebracht und von diesen nach den Fundamenten geleitet. Ist H die am Kopf der Strebe angreifende Schubkraft und bezeichnet α den Neigungswinkel des Strebenbeines, dann beträgt

die von letzterem aufzunehmende Längskraft

$$S = \frac{H}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

Beispiel 51. Eine Hellgenquerschnittsanordnung nach Fig. 64. Eingespanntes Portal.

Die Parallelführung der Stiele und der Bindegurte liegt sehr im Nutzen der Werkstattausführung, dazu tritt der Vorteil einer verhältnismäßig leichten statischen Lösbarkeit.

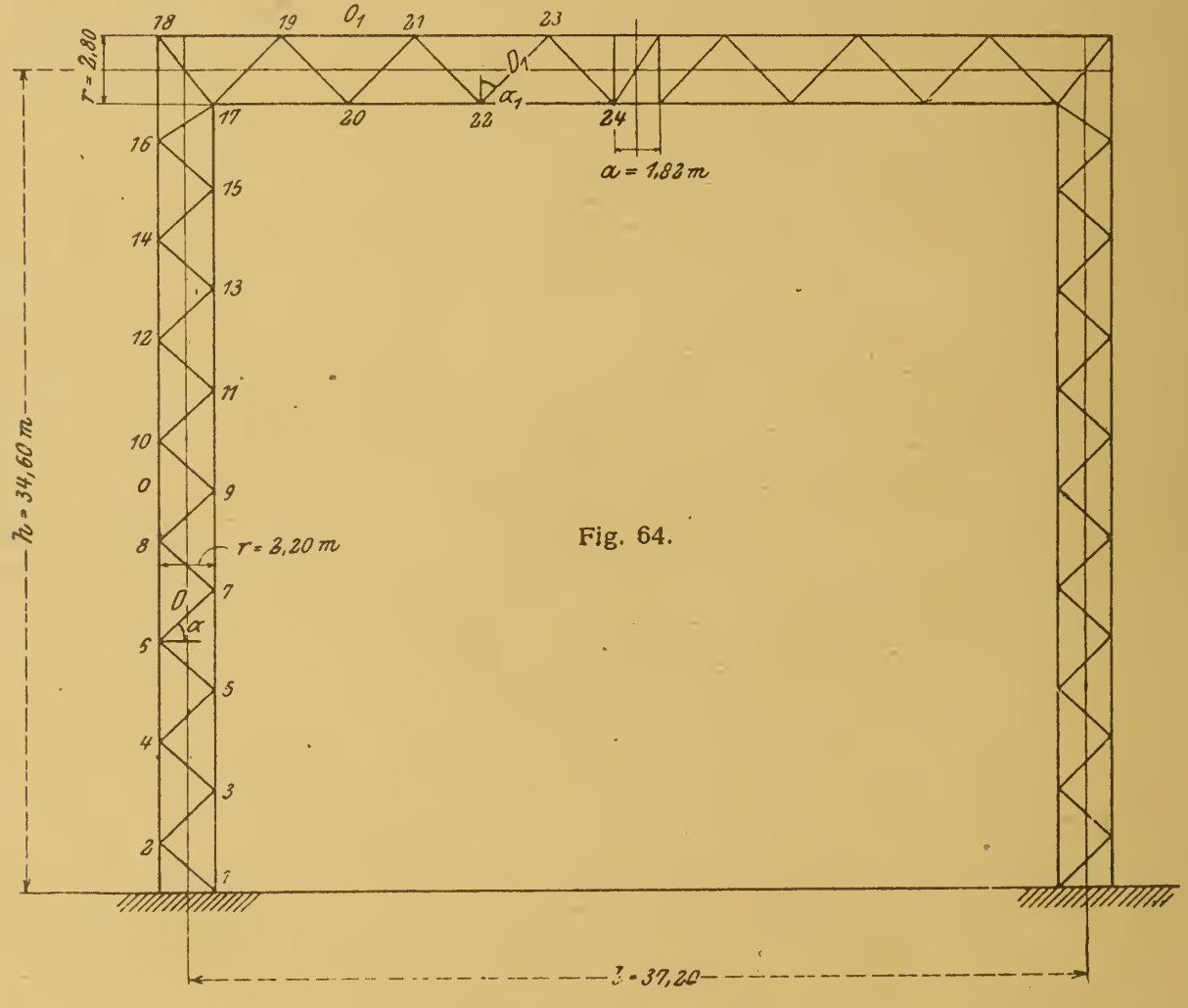


Fig. 64.

Die Krananlage unterscheidet sich von der vorhergehenden dadurch, daß an Stelle der Krane mit Auslegerkatzen gewöhnliche Laufkrane treten. Die Raddrucke betragen

$$R_{max} \text{ und } R_{min}.$$

R_{max} auf Seite der ganz angefahrenen Katze = 7,43 t.
R_{min} auf der gegenüberliegenden Seite = 3,15 t.

Die Raddrucke der Katze in der Mittelbahn sind

$$R_m = 3{,}00 \text{ t}.$$

Die Berechnung des Portals kann genügend genau auf Grund konstanter Trägheitsmomente, und zwar J_1 der Stützen und J_2 des Querbalkens durchgeführt werden.

Bei einer Belastung des Portals entstehen außer den gewöhnlichen Auflagerdrücken die wagerechten Schübe X und die Einspannmomente M_1 und M_2 an den Füßen. Diese drei Größen lassen sich leicht nach den Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = 0,$$

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M_1} \cdot dx = 0,$$

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M_2} \cdot dx = 0.$$

ermitteln.

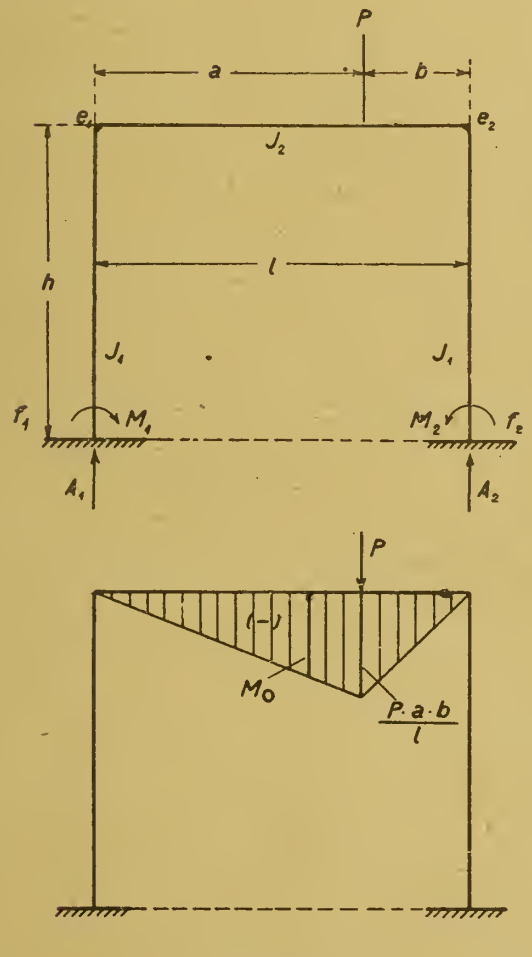


Fig. 64 a — b.

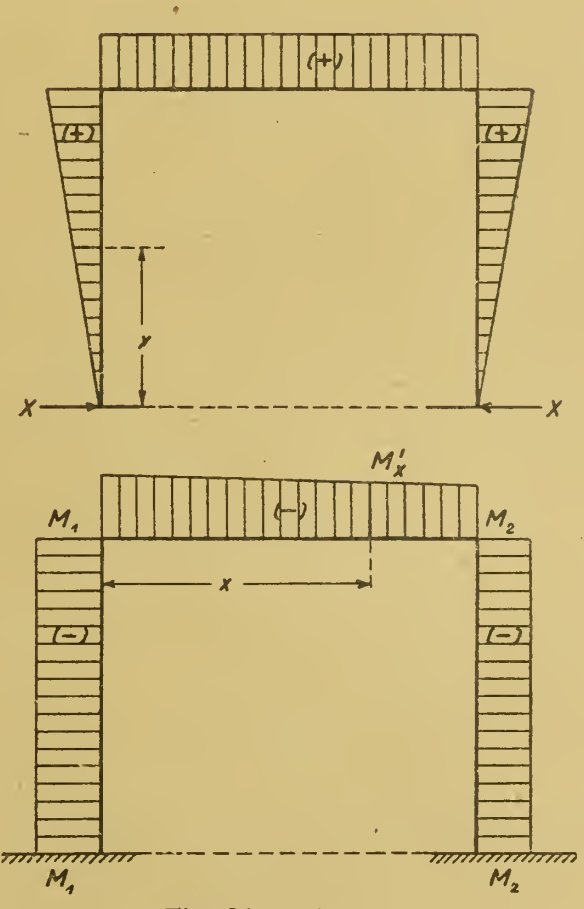


Fig. 64 c — d.

In den Fig. 64 a, 64 b, 64 c und 64 d sind die Wirkungen der einzelnen Belastungen angedeutet. Fig. 64 b zeigt den Zustand aus der Belastung des Portals durch P, wenn der Schub X und die Ein-

spannmomente M_1 und M_2 gleich Null gesetzt werden. Fig. 64 c stellt den Belastungszustand aus den Schüben X dar. Schließlich liefert die Fig. 64 d die Wirkung der Einspannmomente M_1 und M_2.

Der Pfosten links.

$$M_x = X \cdot x - M_1, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = + x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_1} = - 1.$$

Nach X)

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^h \{X \cdot x^2 - M_1 \cdot x\} d x = \frac{X \cdot h^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} - \frac{M_1 \cdot h^2}{2 \cdot J_1 \cdot E} \quad . \quad (I)$$

Nach M_1)

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^h \{- X \cdot x + M_1\} d x = - \frac{X \cdot h^2}{2 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{M_1 \cdot h}{J_1 \cdot E} \quad . \quad (II)$$

Der Pfosten rechts.

Nach X)

$$\text{wie vorher} = \frac{X \cdot h^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} - \frac{M_2 \cdot h^2}{2 \cdot J_1 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Nach M_2)

$$\text{wie vorher} = - \frac{X \cdot h^2}{2 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{M_2 \cdot h}{J_1 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Der Querbalken.

$$M_x = X \cdot h - M_x' - M_0$$

$$= X \cdot h - \left(M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} \cdot x \right) - M_0$$

$$= X \cdot h - M_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) - M_2 \cdot \frac{x}{l} - M_0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = h, \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_1} = - \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_2} = - \frac{x}{l}.$$

Nach X)

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^l \left\{ X \cdot h^2 - M_1 \cdot h \left(1 - \frac{x}{l} \right) - M_2 \cdot h \cdot \frac{x}{l} - M_0 \cdot h \right\} d x$$

$$= \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{J_2 \cdot E} - \frac{M_1 \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2 \cdot E} - \frac{M_2 \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2 \cdot E} - \frac{h}{J_2 \cdot E} \int_0^l M_0 \cdot d x \quad (V)$$

Nach M_1)

$$\frac{1}{J_2 \cdot E}\int_0^l \left\{ -X \cdot h\left(1-\frac{x}{l}\right) + M_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + M_2 \cdot \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) + M_0\left(1-\frac{x}{l}\right)\right\} dx$$

$$= -\frac{X \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{M_1 \cdot l}{3 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{M_2 \cdot l}{6 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{1}{J_2 \cdot E}\int_0^l M_0\left(1-\frac{x}{l}\right) dx \quad \text{(VI)}$$

Nach M_2)

$$\frac{1}{J_2 \cdot E}\int_0^l \left\{ -\frac{X \cdot h \cdot x}{l} + M_1\left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\frac{x}{l} + M_2 \cdot \frac{x^2}{l^2} + M_0 \cdot \frac{x}{l}\right\} dx$$

$$= -\frac{X \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{M_1 \cdot l}{6 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{M_2 \cdot l}{3 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{1}{J_2 \cdot E}\int_0^l M_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx \quad \text{(VII)}$$

Zusammenfassung:

Nach X)

$$\frac{2 \cdot X \cdot h^3}{8 \cdot J_1} + \frac{X \cdot h^2 \cdot l}{J_2} - \frac{M_1 \cdot h^2}{2 \cdot J_1} - \frac{M_1 \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2} - \frac{M_2 \cdot h^2}{2 \cdot J_1} - \frac{M_2 \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_1} - \frac{h}{J_2}\int_0^l M_0 \cdot dx = 0 \quad \text{(I)}$$

Nach M_1)

$$\frac{X \cdot h^2}{2 \cdot J_1} + \frac{X \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2} - \frac{M_1 \cdot h}{J_1} - \frac{M_1 \cdot l}{3 \cdot J_2} - \frac{M_2 \cdot l}{6 \cdot J_2} - \frac{1}{J_2}\int_0^l M_0\left(1-\frac{x}{l}\right) dx = 0 \quad \text{(II)}$$

Nach M_2)

$$\frac{X \cdot h^2}{2 \cdot J_1} + \frac{X \cdot h \cdot l}{2 \cdot J_2} - \frac{M_1 \cdot l}{6 \cdot J_2} - \frac{M_2 \cdot h}{J_1} - \frac{M_2 \cdot l}{3 \cdot J_2} - \frac{1}{J_2}\int_0^l M_0 \cdot \frac{x}{l}\, dx = 0 \quad \text{(III)}$$

Setzt man

$$n = \frac{J_2}{J_1},$$

dann wird

$$2 \cdot X \cdot h \left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l \right) - M_1 (h \cdot n + l) - M_2 (h \cdot \mathrm{n} + l)$$

$$= 2 \int_0^l M_0 \cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{X \cdot h}{2} (h \cdot n + l) - M_1 \left(h \cdot n + \frac{l}{3} \right) - M_2 \cdot \frac{l}{6}$$

$$= \int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\frac{X \cdot h}{2} (h \cdot n + l) - M_1 \cdot \frac{l}{6} - M_2 \left(h \cdot n + \frac{l}{3} \right)$$

$$= \int_0^l M_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Nun ist nach Fig. 64 b

$$2 \int_0^l M_0 \cdot dx = 2 \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{l}{2} = P \cdot a \cdot b$$

$$\int_0^l M_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \int_0^l M_0 \cdot dx - \frac{1}{l} \int_0^l M_0 \cdot x \cdot dx$$

$$= \frac{P \cdot a \cdot b}{2} - \frac{1}{l} \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \cdot a}{3}$$

$$- \frac{1}{l} \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{3} \right)$$

$$= \frac{P \cdot a \cdot b}{3 \cdot l} \left(\frac{a}{2} + b \right),$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l M_0 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{l} \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \cdot a}{3}$$

$$- \frac{1}{l} \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{3} \right)$$

$$= \frac{P \cdot a \cdot b}{3 \, l} \left(a + \frac{b}{2} \right).$$

Hiernach ergibt sich schließlich

$$2 \cdot X \cdot h\left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l\right) - M_1 (h \cdot n + l) - M_2 (h \cdot n + l) = P \cdot a \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

$$\frac{X \cdot h}{2} (h \cdot n + l) - M_1\left(h \cdot n + \frac{l}{3}\right) - M_2 \cdot \frac{l}{6} = \frac{P \cdot a \cdot b}{3 \cdot l}\left(\frac{a}{2} + b\right) \quad (103a)$$

$$\frac{X \cdot h}{2} (h \cdot n + l) - M_1 \cdot \frac{l}{6} - M_2\left(h \cdot n + \frac{l}{3}\right) = \frac{P \cdot a \cdot b}{3 \cdot l}\left(a + \frac{b}{2}\right) \quad (103b)$$

Bei Einführung der Zahlenwerte lassen sich die drei Gleichungen leicht nach X, M_1 und M_2 auflösen.

Befindet sich die Last P in der Mitte des Balkens, dann wird $M_1 = M_2 = M$ und die obigen Gleichungen liefern

$$2 \cdot X \cdot h\left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l\right) - 2 \cdot M (h \cdot n + l) = \frac{P \cdot l^2}{4} \quad . \quad (I)$$

$$\frac{X \cdot h}{2} (h \cdot n + l) - M\left(h \cdot n + \frac{l}{2}\right) = \frac{P \cdot l^2}{16} \quad . \quad (II)$$

oder

$$2 \cdot X \cdot h \cdot \left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l\right) - 2\, M\, (h \cdot n + l) = \frac{P \cdot l^2}{4} \quad . \quad (I)$$

$$2\, X \cdot h\, (h \cdot n + l) - 4\, M\left(h \cdot n + \frac{l}{2}\right) = \frac{P \cdot l^2}{4} \quad . \quad (II)$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt

$$M = \frac{X \cdot h}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Nach Einführung dieses Wertes in eine der Gleichungen ergibt sich

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot l^2}{8 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Wenn der Balken statt durch die Einzellast P durch eine gleichmäßig verteilte Belastung $Q = p \cdot l$ angegriffen wird, dann ist wieder $M_1 = M_2 = M$ und die Gleichung I schreibt sich

$$2 \cdot X \cdot h\left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l\right) - 2 \cdot M (h \cdot n + l) = \int_0^l p \cdot a\,(l - a)\, da.$$

Auch bei dieser Belastung besteht die Beziehung

$$M = \frac{X \cdot h}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Setzt man diesen Wert oben ein, dann folgt

$$X = -\frac{Q \cdot l^2}{8\,h\left(\frac{h \cdot n}{2} + l\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Schließlich möge noch folgende Belastung untersucht werden: Die gleichmäßig verteilte Belastung sei nur teilweise und erstrecke sich von A ausgehend bis zur Entfernung c von A. Dann ergeben die drei Gleichungen 103, 103 a und 103 b

$$2X \cdot h\left(\frac{2 \cdot h}{3} \cdot n + l\right) - M_1 (h \cdot n + l) - M_2 (h \cdot n + l)$$

$$= \int_0^c p \cdot a\,(l - a)\,da = p \cdot c^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

$$\frac{X \cdot h}{2}(h \cdot n + l) - M_1\left(h \cdot n + \frac{l}{3}\right) - M_2 \cdot \frac{l}{6}$$

$$= \int_0^c \frac{p \cdot a}{3 \cdot l}(l - a)\left(l - \frac{a}{2}\right)da = \frac{p \cdot c^2}{6 \cdot l}\left(l^2 - c \cdot l + \frac{c^2}{4}\right) \quad (108\,a)$$

$$\frac{X \cdot h}{2}(h \cdot n + l) - M_1 \cdot \frac{l}{6} - M_2\left(h \cdot n + \frac{l}{3}\right)$$

$$= \int_0^c \frac{p \cdot a}{3 \cdot l}(l - a)\left(\frac{l}{2} + \frac{a}{2}\right)da = \frac{p \cdot c^2}{6 \cdot l}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \quad (108\,b)$$

Bei dem vorliegenden Rahmen kommt noch die Belastung aus dem Winddruck in Frage. (Fig. 64e). Wegen der Symmetrie der Konstruktion ist die Aufgabe einfach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größe wird die Querkraft V in der Mitte des Balkens eingeführt. Diese Größe kann nach der Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx$$

ermittelt werden.

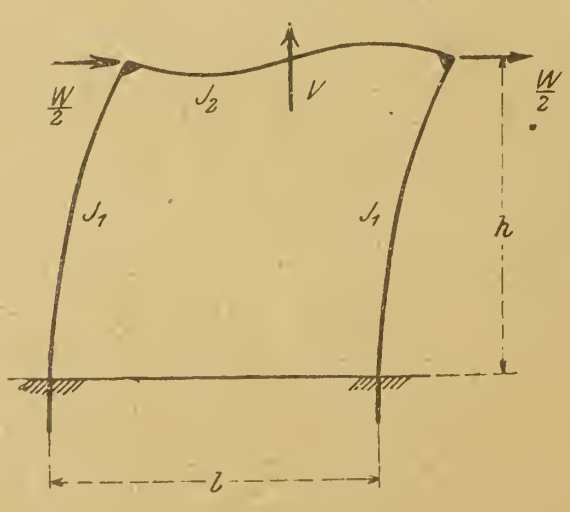


Fig. 64 e.

Der Balken.

$$M_x = V \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = x,$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^{\frac{l}{2}} V \cdot x^2 \cdot dx = \frac{V \cdot l^3}{24 \cdot J_2 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Der Pfosten.

$$M_x = V \cdot \frac{l}{2} - \frac{W}{2} \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = \frac{l}{2},$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^h \left\{ V \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{W \cdot l \cdot x}{4} \right\} dx = \frac{V \cdot l^2 \cdot h}{4 \cdot J_1 \cdot E} - \frac{W \cdot l \cdot h^2}{8 \cdot J_1 \cdot E} \quad (II)$$

$$I + II = 0.$$

$$\frac{V \cdot l^3}{24 \cdot J_2 \cdot E} + \frac{V \cdot l^2 \cdot h}{4 \cdot J_1 \cdot E} - \frac{W \cdot l \cdot h^2}{8 \cdot J_1 \cdot E} = 0,$$

oder weil

$$n = \frac{J_2}{J_1}, \quad V = \frac{W \cdot h}{l \cdot \left(\frac{l}{3 \cdot n \cdot h} + 2 \right)} \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Man kann nun mit Hilfe der an dem Rahmen wirkenden ungünstigsten Momente in schneller und übersichtlicher Weise die Spannkräfte der Fachwerkstäbe ermitteln.

Die Spannkräfte der Gurtstäbe des Balkens wie auch die der Säulenpfosten betragen

$$S = \frac{M_m}{r} \pm N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

wo M_m das Knotenmoment und r die Systemhöhe bedeuten. N ist die Zug- oder Druckspannung aus der Normal- oder Axialkraft; beispielsweise bei der Säule aus dem senkrechten Auflagerdruck des Balkens.

Die Spannungen der Schrägstäbe berechnen sich nach

$$S = \frac{1}{r \cdot \sin \alpha} (M_m - M_{m-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

In der Fig. 64 sind die Maßverhältnisse des Rahmens eingeschrieben. Das Eigengewicht des Querbalkens beträgt $Q = 20$ t

$$n = \sim 3{,}3.$$

Nach den Formeln 106 und 107 ergibt sich

$$X = \frac{Q \cdot l^2}{8 \cdot h\left(\frac{h \cdot n}{2} + l\right)} = \frac{20 \cdot 37{,}2 \cdot 37{,}2}{8 \cdot 34{,}6\left(\frac{34{,}6 \cdot 3{,}3}{2} + 37{,}2\right)} = \underline{1{,}057 \text{ t},}$$

$$M = \frac{X \cdot h}{3} = \frac{1{,}057 \cdot 34{,}6}{3} = \underline{12{,}15 \text{ mt.}}$$

Es darf mit genügender Genauigkeit angenommen werden, daß die beiden Laufbahnen in der Mitte in einer Last P zusammenfallen. $P = 2 \cdot 15 = 30$ t. Hierfür liefern die Formeln 104 und 105 folgende Werte

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot l^2}{8 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 37{,}2 \cdot 37{,}2}{8 \cdot 34{,}6\,(34{,}6 \cdot 3{,}3 + 2 \cdot 37{,}2)} = \underline{2{,}394 \text{ t.}}$$

$$M = \frac{X \cdot h}{3} = \frac{2{,}394 \cdot 34{,}6}{3} = \underline{27{,}75 \text{ mt.}}$$

Belastung 1.

Da Q und P zusammenwirken, ergibt sich

$$X = 1{,}057 + 2{,}394 = \underline{3{,}451 \text{ t},}$$

$$M = 12{,}15 + 27{,}75 = \underline{39{,}90 \text{ mt.}}$$

M ist konstant für die Pfosten und den Querbalken. Das Maximalmoment aus dem Schube X beträgt

$$M^X = X \cdot h = 3{,}451 \cdot 34{,}6 = \underline{119{,}30 \text{ mt.}}$$

(unveränderl. für den Querbalken)

Die gewöhnlichen Balkenmomente des Binders verlaufen nach einer Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe

$$M_0^Q = \frac{Q\,l}{8} = \frac{20 \cdot 37{,}2}{8} = \underline{93 \text{ mt.}}$$

Das Maximalmoment aus dem Gewicht der Längsträger berechnet sich zu

$$M_0^P = \frac{P}{2}\left(\frac{2}{l} - \frac{a}{2}\right) = 15 \cdot 17{,}69 = \underline{265{,}5 \text{ mt.}}$$

Fig. 64 f zeigt die Auftragung der an dem Rahmen wirksamen Momente.

Belastung 2.

Katze in der Mitte. Laufkrane, Lasten ebenfalls nach der Mitte gefahren. Die in der Mitte konzentriert gedachten Kranlasten betragen.

$$P = 40{,}50 \text{ t.}$$

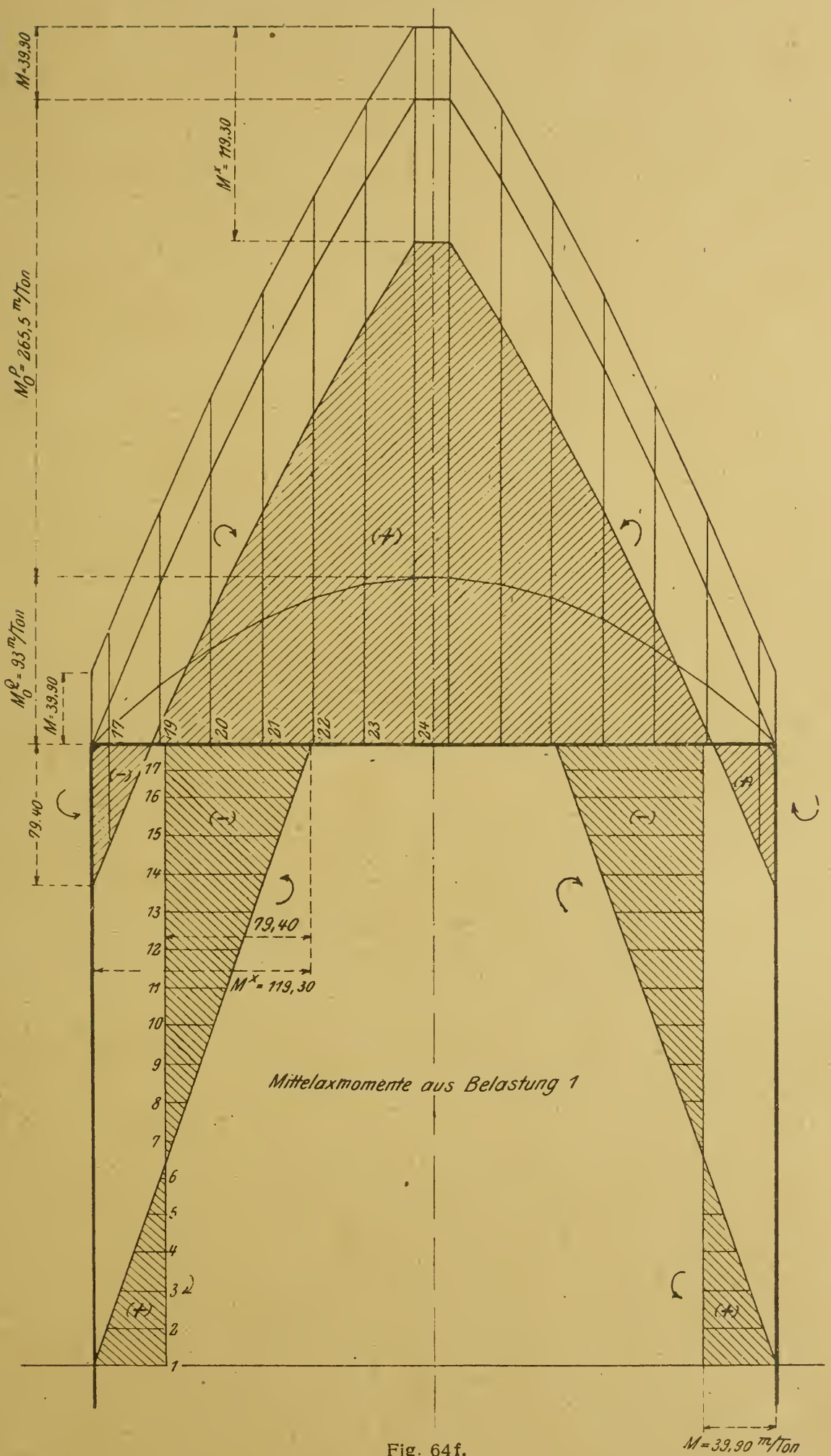

M=39,90
M^x=119,30
M_0^p=265,5 m/Ton
M_0^q=93 m/Ton
M=39,90
79,40
(+)
(−)
(−)
(−)
(+)
(+)
(+)
17
19
20
21
22
23
24
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
79,40
M^x=119,30
Mittelaxmomente aus Belastung 1
M=39,90 m/Ton

Fig. 64f.

Es ergeben sich nach den Formeln 104 und 105

$$X = \underline{3{,}23 \text{ t.}}$$

$$M = \underline{37{,}50 \text{ mt.}}$$

M ist wieder konstant für die Pfosten und den Querbalken.

$$M^X = X \cdot h = 3{,}23 \cdot 34{,}6 = \underline{112{,}00 \text{ mt}}$$

(konstant für den Querbalken).

Das gewöhnliche Balkenmoment berechnet sich zu

$$M_0{}^P = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{40{,}50}{2} \cdot 17{,}69 = 358 \text{ mt.}$$

Fig. 64 g zeigt die Auftragung der Momente.

Belastung 3.

Katze in der Mitte. Laufkrane, Lasten seitlich gefahren. Die in der Mitte des Balkens konzentriert gedachten Kranlasten betragen

$$P = 24{,}20 \text{ t.}$$

Es ergeben sich nach den Formeln 104 und 105

$$X = \underline{1{,}93 \text{ t.}}$$

$$M = \underline{22{,}40 \text{ mt.}}$$

M ist konstant für die Pfosten und den Querbalken.

$$M^X = X \cdot h = 1{,}93 \cdot 34{,}6 = \underline{67 \text{ mt}}$$

(konstant für den Querbalken).

Das gewöhnliche Balkenmoment ist

$$M_0{}^P = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{24{,}20}{2} \cdot 17{,}69 = \underline{214 \text{ mt.}}$$

Fig. 64 h zeigt die Auftragung der Momente.

Belastung 4. Die Windkraft W bei 200 kg pro m² senkrecht getroffene Fläche

$$W = 34{,}40 \text{ t.}$$

Es ergibt sich

$$V = \frac{W \cdot h}{l} \cdot \frac{1}{\frac{l}{3\,n\,h} + 2} =$$

$$= \frac{34{,}40 \cdot 34{,}6}{37{,}2} \cdot \frac{1}{\frac{37{,}2}{3 \cdot 3{,}3 \cdot 34{,}6} + 2} = \underline{15{,}20 \text{ t.}}$$

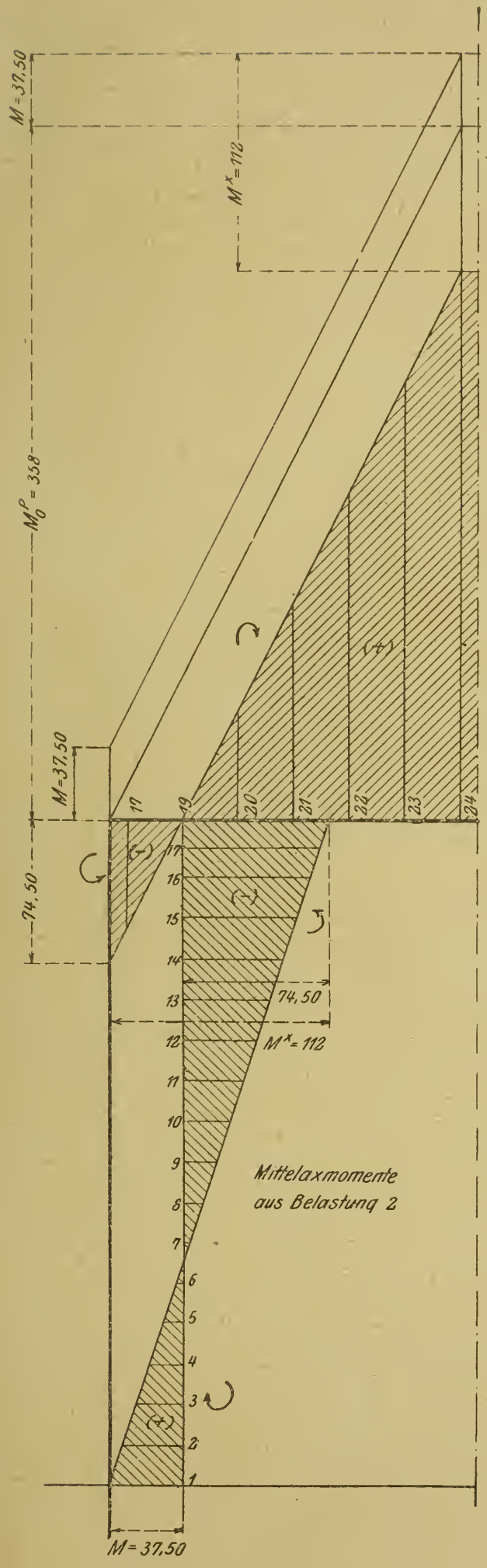


Fig. 64 g.

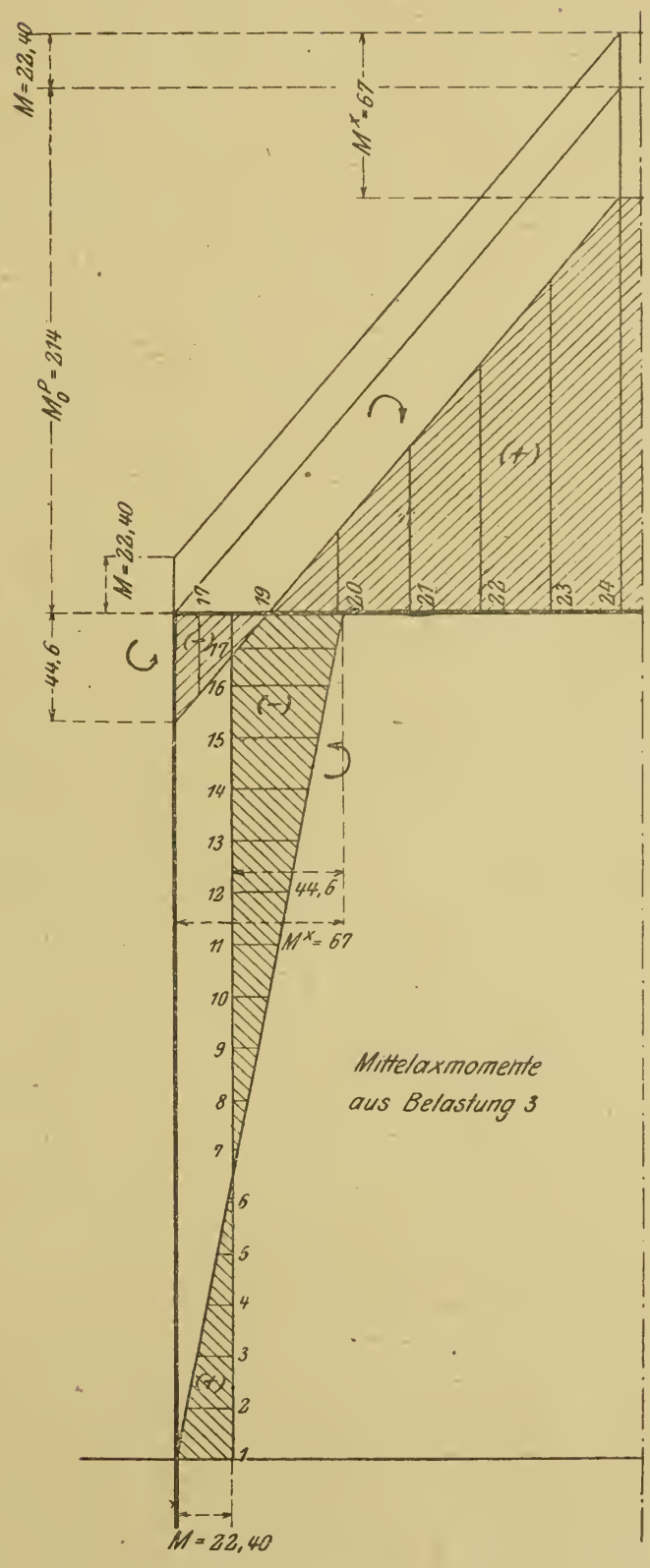


Fig. 64 h.

Hieraus folgen:

Das Eckmoment oben

$$M_e = V \cdot \frac{l}{2} = 15{,}20 \cdot 18{,}60 = \underline{282{,}72 \text{ mt.}}$$

Das Moment am Fuße

$$M_f = \frac{W}{2} \cdot h - V \cdot \frac{l}{2} = 17{,}20 \cdot 34{,}6 - 282{,}72 = \underline{312{,}40 \text{ mt.}}$$

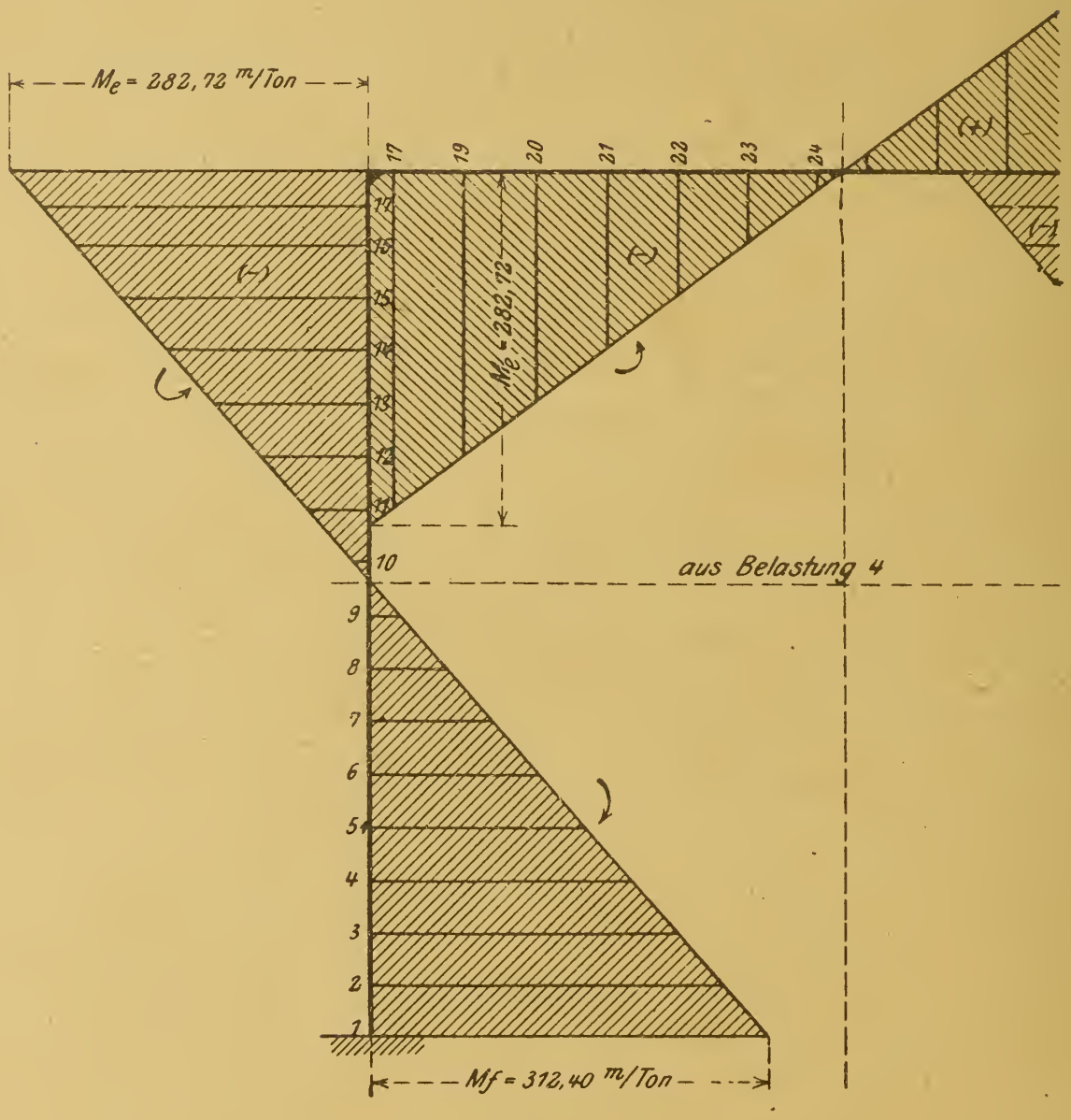


Fig. 64 i.

Fig. 64 i zeigt die Auftragung der Werte.

Wie eingangs angegeben lassen sich sämtliche Stabkräfte mit Hilfe von

$$S \text{ der Gurtstäbe} = \frac{M_m}{r}$$

und

$$\mathcal{S} \text{ der Diagonalen} = \frac{1}{r \sin \alpha} \left(M_m - M_{m-1} \right)$$

berechnen. Zum Beispiel ermitteln sich folgende Spannungen:

Rippe des Pfostens (Fig. 64 und 64 g)

$$O = \frac{M_9}{r}$$

Diagonale des Pfostens

$$D = \frac{1}{r \sin \alpha} \left(M_7 - M_6 \right)$$

Gurtstab des Querbalkens

$$O_1 = \frac{M_{20}}{r_1}.$$

Da die Momente Mittelaxmomente sind, so ist zu beachten, daß zu den Gurtspannungen des Querbalkens noch der Schub

$$- \frac{X}{2}$$

addiert werden muß. Die tatsächliche Spannkraft des Stabes O_1 beträgt daher

$$O_1' = - \frac{M_{20}}{r_1} - \frac{X}{2}.$$

Die Spannung der Diagonale D_1 des Querbalkens berechnet sich zu

$$D_1 = \frac{1}{r_1 \cdot \sin \alpha_1} (M_{22} - M_{23}).$$

Sodann vergesse man nicht, die gewöhnlichen Vertikaldrucke des Querbalkens den Rippenspannungen der Pfosten zuzuschlagen. Dabei darf angenommen werden, daß jene zur Hälfte auf jede Rippe kommen und daß die Drucke der Längsträger ganz in die Innenrippe gehen.

Sollten gegen die gewonnenen Resultate hinsichtlich der Schärfe Einwendungen gemacht werden, dann gebrauche man folgendes genauere Verfahren.

Man löse durch Beseitigung der beiden äußeren in die Fundamente gehenden Pfostenstäbe, ferner durch Beweglichmachung des einen der beiden Fußpunkte den Rahmen in das statisch bestimmte Hauptnetz Fig. 64 k auf. Dieses unterwerfe man der Reihe nach den in Frage stehenden Belastungsfällen aus Eigengewicht, Kranen und

Wind (event. auch der Einwirkung durch Temperatur). Es mögen sich für einen dieser Belastungsfälle die Stabspannungen S_0 ergeben haben.

Die statisch unbestimmten Größen sind

der Schub $X_{,}$ an den Fußpunkten a,

ferner

die Spannungen $X_{,,}$
und $X_{,,,}$

der soeben beseitigten Pfostenstäbe.

Hierauf belaste man das Hauptsystem hintereinander einmal

mit der Kraft $X_{,} = -1$
dann mit $X_{,,} = -1$
und schließlich mit $X_{,,,} = -1$

und lege den entsprechenden Stabkräften die Bezeichnung

$S_{,}$
$S_{,,}$
und $S_{,,,}$ zu.

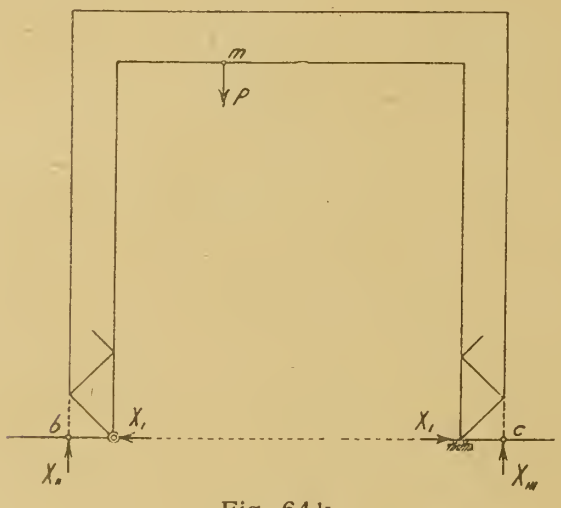


Fig. 64 k.

Mit allen diesen Belastungen treten Verschiebungen der in der Figur gekennzeichneten Punkte a, b und c ein. Die Kenntlichmachung derselben geschieht in der Weise, daß man dem Buchstaben

δ

zwei Ziffern anhängt, von denen die erste den Ort, die zweite die Kraftursache der Verschiebung angibt. Zum Beispiel infolge einer Last P im Punkte m verschiebt sich der Punkt a wagerecht um die Strecke

$$\delta_{am},$$

oder infolge der Kraft $X_{,}$ in a der Punkt b um den Betrag

$$\delta_{ba},$$

Nach Zurückbringen des losen Fußpunktes a in seine ursprüngliche Lage und nach Wiedereinführung der beseitigten Stäbe lassen sich auf Grund der Formänderungsarbeiten folgende Beziehungen aufstellen:

$$P \cdot \delta_{am} - X_{,} \cdot \delta_{aa} - X_{,,} \cdot \delta_{ab} - X_{,,,} \cdot \delta_{ac} = 0$$
$$P \cdot \delta_{bm} - X_{,} \cdot \delta_{ba} - X_{,,} \cdot \delta_{bb} - X_{,,,} \cdot \delta_{bc} = 0$$
$$P \cdot \delta_{cm} - X_{,} \cdot \delta_{ca} - X_{,,} \cdot \delta_{cb} - X_{,,,} \cdot \delta_{cc} = 0.$$

Setzen wir für P eine beliebige Belastung ein, berücksichtigen ferner eine Temperaturveränderung, und geben den Verschiebungen δ ihre tatsächlichen Werte, dann folgt

$$\alpha \cdot t \sum S_{,} \cdot s + \sum \frac{S_0 \cdot S_{,} \cdot s}{EF} - X_{,} \sum \frac{S_{,}^2 \cdot s}{EF} - X_{,,} \sum \frac{S_{,,} \cdot S_1 \cdot s}{EF}$$
$$- X_{,,,} \sum \frac{S_{,,,} \cdot S_{,} \cdot s}{EF} = 0$$

$$\alpha \cdot t \sum S_{,,} \cdot s + \sum \frac{S_0 \cdot S_{,,} \cdot s}{EF} - X_{,} \sum \frac{S_{,,} \cdot S_{,} \cdot s}{EF} - X_{,,} \sum \frac{S_{,,}^2 \cdot s}{EF}$$
$$- X_{,,,} \sum \frac{S_{,,,} \cdot S_{,,} \cdot s}{EF} = 0$$

$$\alpha \cdot t \sum S_{,,,} \cdot s + \sum \frac{S_0 \cdot S_{,,,} \cdot s}{EF} - X_{,} \sum \frac{S_{,,,} \cdot S_{,} \cdot s}{EF} - X_{,,} \sum \frac{S_{,,,} \cdot S_{,,} \cdot s}{EF}$$
$$- X_{,,,} \sum \frac{S_{,,,}^2 \cdot s}{EF} = 0.$$

Nach Berechnung der Zahlenwerte lassen sich die drei Gleichungen ohne Schwierigkeit nach $X_{,}$, $X_{,,}$ und $X_{,,,}$ auflösen.

Für einen beliebigen Belastungsfall beträgt die Spannung irgend eines Stabes dann allgemein

$$S = S_0 - X_{,} \cdot S_{,} - X_{,,} \cdot S_{,,} - X_{,,,} \cdot S_{,,,}.$$

Fig. 64 m.

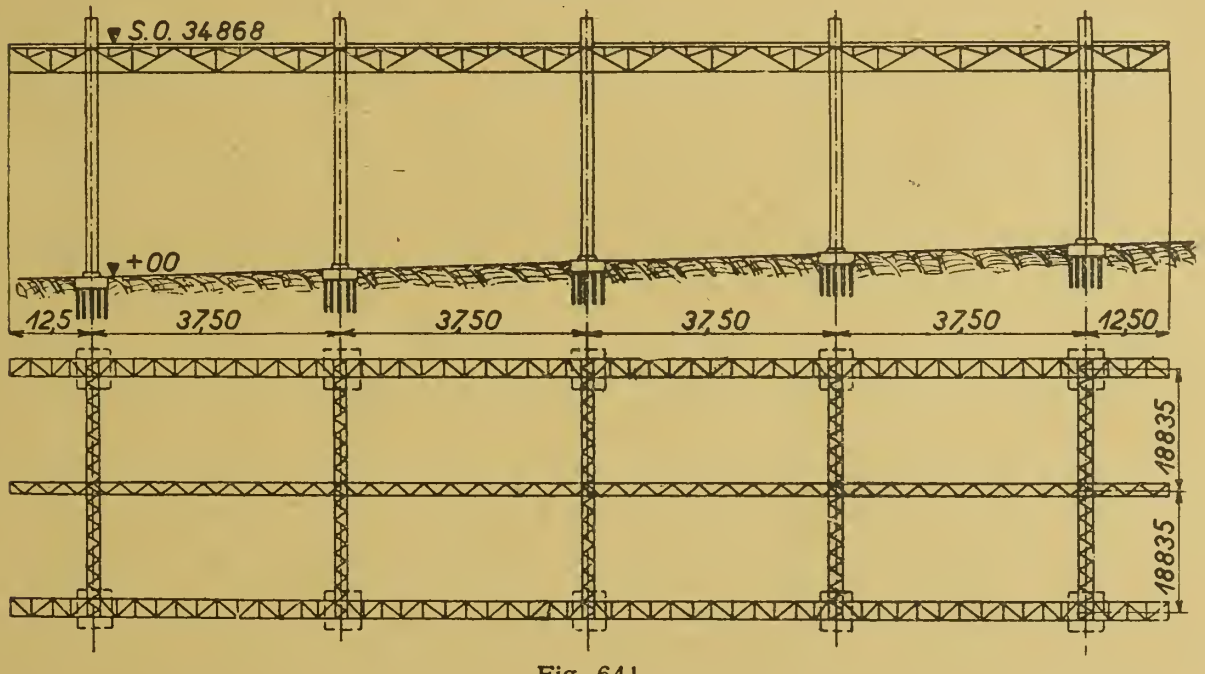


Fig. 64 l.

In Fig. 64 l ist der Grundriß des Gerüstes wiedergegeben.

Fig. 64 m zeigt die Längsansicht. Auch dieses Bild wird in der einfachsten parallelen Linienführung gehalten. Die fünf Säulen

bilden mit den Längsträgern eine Gruppe von Portalen, die den Wind in der Längsrichtung der Helling aufzunehmen haben. Streng genommen ist die Aufgabe, da sie eine Reihe statischer Unbestimmtheiten enthält, recht weitläufig. Man schlägt jedoch den viel näheren Weg einer genügend genauen Annäherungsrechnung ein, der sich bietet, wenn das Trägheitsmoment der Längsträger als unendlich groß gegenüber den verhältnismäßig schwachen Säulen angenommen wird.

Unter der Einwirkung der Windkraft tritt eine Verschiebung des Systems ein (Fig. 64 n). Aber es verbiegen sich nur die Säulen, und zwar so, daß der Wendepunkt der Verbiegung genau in der Mitte liegt. Hier wird also das Moment Null und es erscheint eine wagerechte Querkraft von der Größe $\frac{W}{5}$, weil sich die gesamte Windkraft zu gleichen Teilen auf jede Säule überträgt. Außerdem versucht der

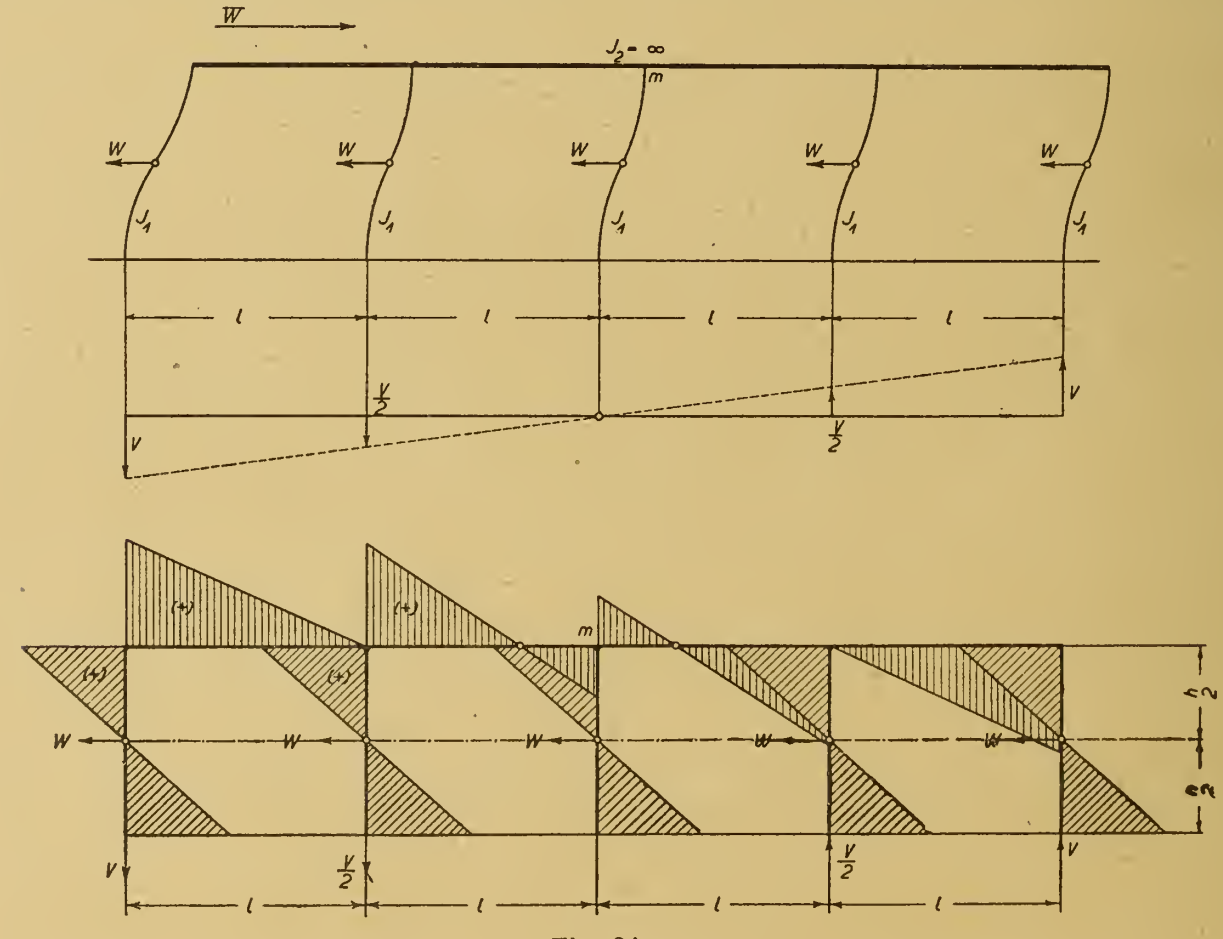


Fig. 64 n—o.

Wind das System umzukippen, wogegen bestimmte in den Wendepunkten wirksame Vertikalkräfte reagieren.

Diese in der Fig. 64 n angedeuteten Vertikalkräfte werden am größten in den Wendepunkten der beiden äußeren Säulen. Die beiden

nächsten Säulen liefern nur $\frac{V}{2}$, während in der Mittelsäule überhaupt keine Reaktion stattfindet, weil um diesen Punkt das System kippt.

Die Kraft V ermittelt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$W \cdot \frac{h}{2} = V \cdot 2l \cdot 2 + \frac{V}{2} \cdot l \cdot 2$$

zu

$$V = \frac{W \cdot h}{10 \cdot l}.$$

Nunmehr ist man in der Lage, alle an dem Portalsystem wirkenden Momente aufzustellen. Fig. 64 o zeigt die Auftragung der Werte.

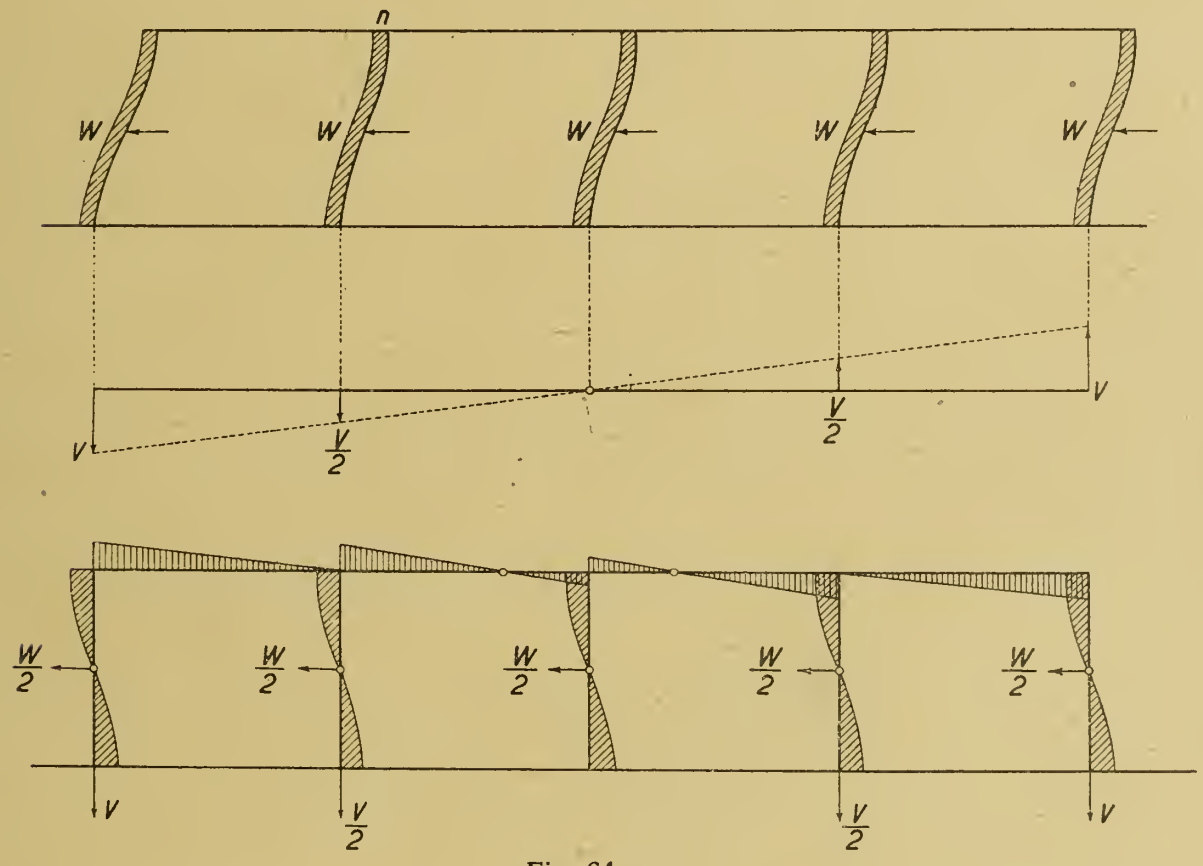


Fig. 64 p—q.

Beispiel. Punkt m für den wagerechten Balken.

$$M_m = 2 \cdot w \cdot \frac{h}{2} - V \cdot 2l - \frac{V}{2} \cdot l$$

$$= \frac{W}{5} \cdot h - \frac{5\,V \cdot l}{2} = \frac{W \cdot h}{5} - \frac{W \cdot h}{4} = -\frac{W \cdot h}{20}.$$

Beispiel. Punkt m für die Säule.

$$M_m = +\,w \cdot \frac{h}{2} = +\,\frac{W \cdot h}{10}.$$

Aus derselben Überlegung heraus werden die Momente aus der gleichmäßig verteilten Windkraft w gegen die Säulen entwickelt (Fig. 64 p). Der Wendepunkt der Verbiegung liegt wiederum in der Mitte der Säule. Hier erscheinen deshalb die wagerechten Widerstände $\frac{w}{2}$, das ist jedesmal die halbe Säulenbelastung. Die vertikalen Reaktionen gegen das Kippmoment verlaufen wie bei der vorigen Aufgabe stufenweise. Der Wert V im Wendepunkt der äußeren Säulen berechnet sich aus

$$\frac{5w}{2} \cdot \frac{h}{4} = V \cdot 2 \cdot l \cdot 2 + \frac{V}{2} \cdot l \cdot 2$$

zu

$$V = \frac{w \cdot h}{8 \cdot l}.$$

Das Moment für die Stelle n des wagerechten Balkens beispielsweise beträgt

$$M_n = \frac{w}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{w}{2} \cdot \frac{h}{4} - V \cdot l = \frac{w \cdot h}{4} - \frac{w \cdot h}{8} - \frac{w \cdot h}{8} = 0.$$

Das Moment der Säule im Punkte n ist

$$M_n = + \frac{w}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{w}{2} \cdot \frac{h}{4} = + \frac{w \cdot h}{8}.$$

In der Fig. 64 q sind die an dem ganzen System wirksamen Momente aufgezeichnet.

Endlich werden die Momente der Pläne Fig. 64 o und 64 q zusammengeworfen, so daß man die Momente aus den gesamten Windkräften erhält. Hiernach können dann wieder die Stabkräfte bestimmt werden, und zwar die der Gurte und der Säulenpfosten nach

$$S = \frac{M_m}{r} \pm N$$

und die der Diagonalstäbe nach

$$S = \frac{1}{r \cdot \sin \alpha} (M_m - M_{m-1}).$$

Wie an dem vorhergehenden Beispiel gezeigt, lassen sich rahmenartige Gerüste, wenn man die Gurtungen parallel führt, mit Hilfe der Castiglianoschen Bedingungsgleichungen mit ziemlicher Annäherung berechnen. Nachstehend mögen die statisch unbestimmten Größen für einige öfter vorkommende Rahmenarten angegeben werden.

Der Rahmen Fig. 64. Es werde angenommen, daß der Querbalken beiderseitig um das Maß a überkragt und daß an jedem Ende eine Last P hängt. Dann ergibt sich

$$M = -\frac{X \cdot h}{3}$$

und

$$X = -\frac{3 \cdot P \cdot a \cdot}{h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Ruht auf den beiden Kragarmen eine gleichmäßig verteilte Belastung p pro Längeneinheit, dann beträgt

$$M = -\frac{X \cdot h}{3}$$

und

$$X = -\frac{3 \cdot p \cdot a^2 \cdot l}{2 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Erstreckt sich die gleichmäßig verteilte Belastung über den ganzen Balken einschließlich der Kragarme, dann erhält man

$$M = \frac{X \cdot h}{3}$$

und

$$X = \frac{p \cdot l^3}{4 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} - \frac{3 \cdot p \cdot a^2 \cdot l}{2 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)}$$

$$= \frac{p \cdot l}{2 \cdot h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - 3 \cdot a^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

X und M werden Null, wenn

$$\frac{l^2}{2} - 3 \cdot a^2 = 0$$

oder bei

$$a = \frac{l}{6} \cdot \sqrt{6} = 0{,}4083 \cdot l.$$

Befinden sich zwei Lasten P auf dem Balken in gleichen Abständen a_1 von dem Pfosten, dann ergibt sich

$$M = \frac{X \cdot h}{3}$$

und

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot a_1\,(l - a_1)}{h\,(h \cdot n + 2 \cdot l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Ein Rahmen nach Fig. 65.

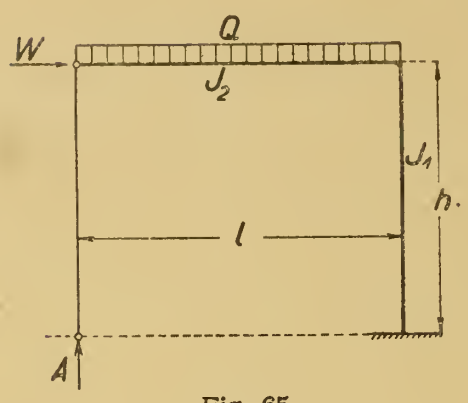


Fig. 65.

Eine gleichmäßig verteilte Belastung Q auf dem Balken liefert

$$A = \frac{Q}{4} \cdot \frac{\frac{l}{2} \cdot \frac{J_1}{J_2} + 2 \cdot h}{\frac{l}{3} \cdot \frac{J_1}{J_2} + h} \quad . \quad (116)$$

Wird der Rahmen von einer wagerechten Kraft W in der Balkenachse angegriffen, dann ergibt sich

$$A = - \frac{W \cdot h}{2\,l \left(\frac{l}{3 \cdot h} \cdot \frac{J_1}{J_2} + 1 \right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Sechster Abschnitt.

Schwebefähren und Kabelbahnen.

Beispiel 52. Eine Schwebefähre nach Fig. 66.

Die Brücke besteht aus zwei Trägerwänden und wird von festen, nahe der Uferkante stehenden Stützen getragen. Diese müssen, um den Fahrwagen durchzulassen, portalartig ausgebildet sein. Die quer zur Brücke gerichteten Windkräfte werden von zwei in der Ober- und Untergurtebene liegenden Horizontalträgern aufgenommen und in die Stützen geleitet.

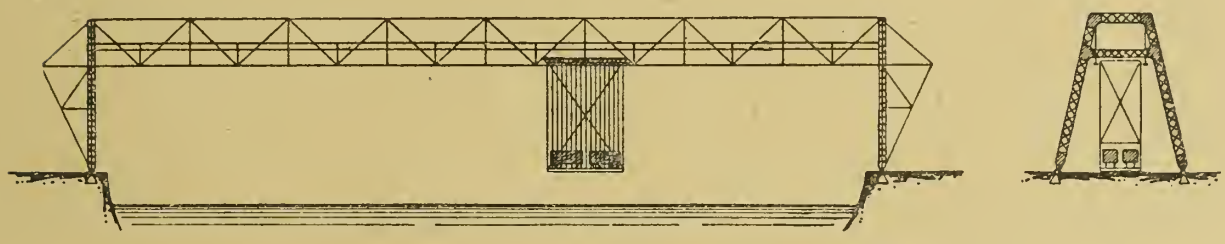


Fig. 66.

Um die Raddrucke des Fahrwagens niedrig zu halten (außerdem aus anderen technischen Gründen) ist die Anzahl der Laufrollen möglichst groß gewählt, etwa zehn auf jeder Seite. Es berechtigt dies zu der Annahme, daß das fahrende Organ einer partiellen, gleichmäßig verteilten wandernden Belastung Q gleichkommt (Fig. 66a).

Wir führen die Berechnung der größten Gurtspannungen auf Grund der Maximalknotenmomente durch. Das Moment für einen beliebigen im Abstande x vom Auflager liegenden Punkt beträgt

$$M_x = \frac{Q}{l}\left\{l - \frac{a}{2} - x + y\right\} \cdot x - \frac{Q}{a} \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Hält man den Punkt fest, dann ermittelt sich für ihn das größte Moment aus der Bedingung

$$\frac{dM_x}{dy} = \frac{Q}{l}x - \frac{Q}{a}y = 0$$

und hieraus

$$y = \frac{a \cdot x}{l}$$

das heißt für

$$y = \frac{a \cdot x}{l}$$

wird M_x ein Maximum.

Mithin ergibt sich

$$M_x^{\max} = \frac{Q}{l}\left\{l - \frac{a}{2} - x + \frac{a \cdot x}{l}\right\} x - \frac{Q}{2} \cdot \frac{a \cdot x^2}{l^2} \cdot$$

$$= \frac{Q}{2\,l^2}(2\,l - a)(l - x)\,x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

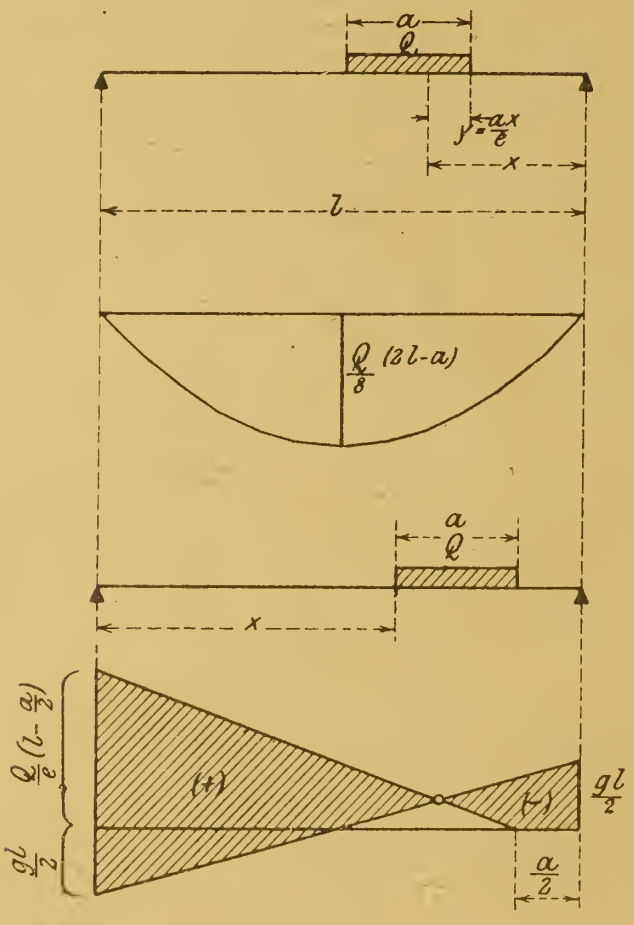


Fig. 66 a.

Fig. 66 b.

Fig. 66 c.

Fig. 66 d.

Die Funktion beschreibt eine Parabel von der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{Q}{8}(2\,l - a)$$

(Fig. 66 b).

Hinzu kommen die Momente aus dem Eigengewicht der Brücke; man konstruiere, daher eine Parabel mit der Länge l und der Bogenhöhe

$$\frac{Q}{8}(2\,l - a) + \frac{g\,l^2}{8}.$$

Die größten Diagonalspannungen werden mit Hilfe der Querkräfte entwickelt. Für eine beliebige Stellung des Fahrwagens beträgt (Fig. 66 c)

$$T_x = \frac{Q}{l}\left\{l - \frac{a}{2} - x\right\}.$$

Fig. 66 d zeigt die Auftragung des Wertes in Verbindung mit den Querkräften aus dem Eigengewicht.

Die Brückenstütze ist ein geschlossener Steifrahmen mit verlängerten Pfosten. Es leuchtet ein, daß die senkrechten Lasten P, weil sie in den Ecken oben angreifen und einander gleich sind, keine Verschiebung des Rahmens hervorrufen, mithin ohne weiteres in die Stabrichtungen (oberer Riegel und Pfosten) zerlegt werden können.

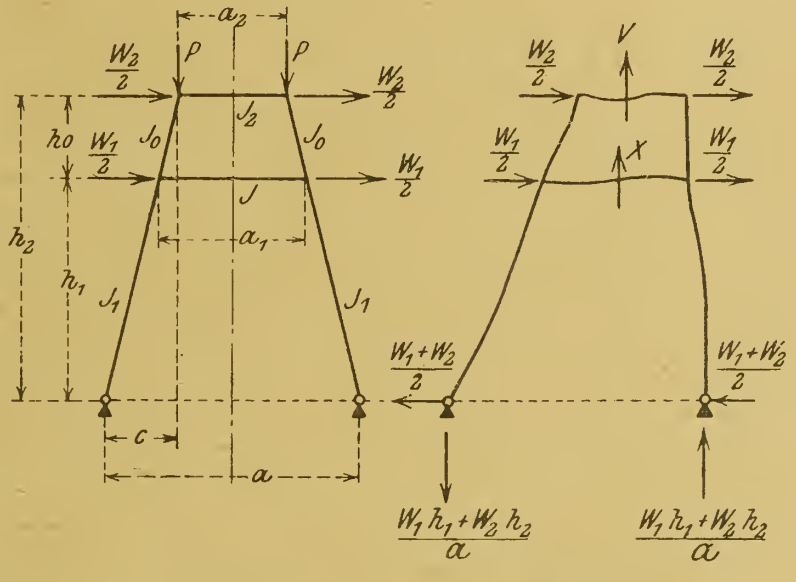


Fig. 66 e.

Fig. 66 f.

Anders verhält es sich mit den wagerechten, durch die Windträger vermittelten Windkräfte W_1 und W_2. Diese bewirken eine Formveränderung, als deren Folge statisch unbestimmbare innere Kräfte auftreten. Man vernachlässige alle praktisch belanglosen Nebenerscheinungen und führe als statisch Unbestimmte die Querkräfte V inmitte des oberen Riegels und X inmitte des unteren Riegels ein (Fig. 66 f).

Die der Entwicklung zugrunde gelegte Bedingung lautet wie immer

$$\frac{1}{JE}\int M_x \frac{\partial M}{\partial X}\, dx = 0.$$

Oberer Riegel.

$$M_x = V \cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = x$$

$$\frac{1}{J_2 E} \int_0^{\frac{a_2}{2}} V x^2 \, dx = \frac{V \cdot a_2^3}{24 J_2 E}.$$

Unterer Riegel.

$$M_x = X \cdot x = \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{a} \cdot x - V \cdot x;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial V} = - x$$

$$\frac{1}{J_1 E} \int_0^{\frac{a_1}{2}} \left\{ V \cdot x^2 - \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{a} \cdot x^2 \right\} dx =$$

$$= \frac{V a_1^3}{24 J_1 E} - \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{24 J_1 E} \cdot \frac{a_1^3}{a}.$$

Oberer Pfostenteil.

$$M_x = V \left(\frac{a_2}{2} + \frac{c x}{h_2} \right) - \frac{W_2 x}{2}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial V} = \frac{a_2}{2} + \frac{c x}{h_2}$$

$$\frac{1}{J_0 E} \int_0^{h_0} \left\{ V \left(\frac{a_2}{2} + \frac{c x}{h_2} \right)^2 - \frac{W_2}{2} \cdot x \left(\frac{a_2}{2} + \frac{c x}{h_2} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{V}{J_0 E} \left(\frac{a_2^2 h_0}{4} + \frac{a_2 c h_0}{2 h^2} + \frac{c^2 h_0^3}{3 h_2^2} \right) - \frac{W_2}{2 J_0} \left(\frac{a_2 h_0^2}{4} + \frac{c h_0^3}{3 h_2} \right).$$

Zusammenfassung:

$$\frac{V a_2^3}{24 J_2} + \frac{V a_1^3}{24 J_1} + \frac{V}{J_0} \left(\frac{a_2^2 h_0}{4} + \frac{a_2 c h_0^2}{2 h_2} + \frac{c^2 h_0^3}{3 h_2^2} \right)$$

$$- \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{24 J_1 a} \cdot a_1^3 - \frac{W_2}{2 J_0} \left(\frac{a_2 h_0^2}{4} + \frac{c h_0^3}{3 h_2} \right) = 0$$

$$V = \frac{\frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{24 J_1 a} \cdot a_1^3 + \frac{W_2}{2 J_0} \left(\frac{a_2 h_0^2}{4} + \frac{c h_0^3}{3 h_2} \right)}{\frac{a_2^3}{24 J_2} + \frac{a_1^3}{24 J_1} + \frac{1}{J_0} \left(\frac{a_2^2 h_0}{4} + \frac{a_2 c h_0^2}{2 h_2} + \frac{c^2 h_0^3}{3 h_2^2} \right)} \qquad (119)$$

$$X = \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{a} - V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (120)$$

Beispiel 53. Eine Schwebefähre nach Fig. 67.

Das eigentliche Tragorgan (Brücke) ist eine im Boden verankerte, über die Stützenköpfe gespannte Kette; sie trägt die Laufbahn des Fahrwagens. Weil die Kette gegenüber der veränderlichen Last nicht stabil ist, wird sie durch den Fachwerkbalken versteift.

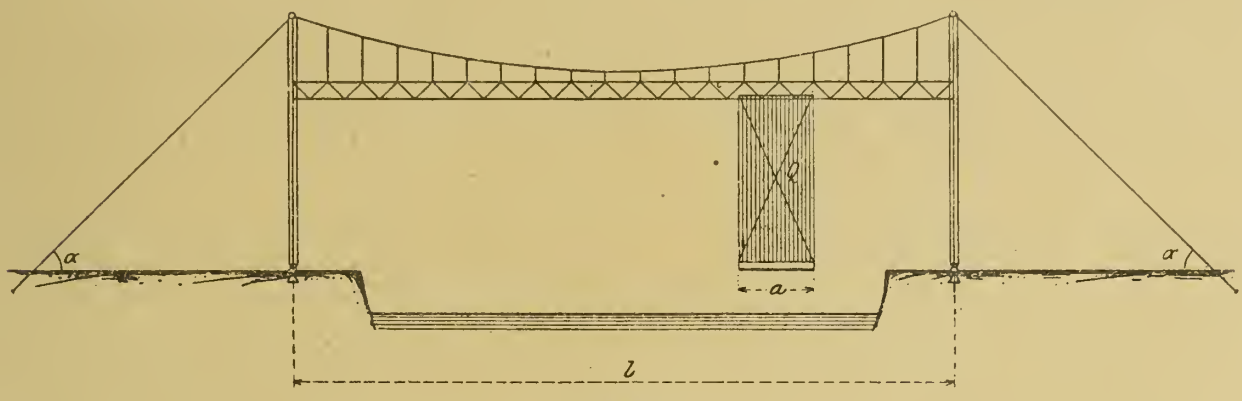


Fig. 67.

Die statisch Unbestimmte ist die wagerechte Seitenkraft X des Kettenzuges. Bedingung für die einfache statische Unbestimmtheit ist, daß die Stützenfüße gelenkig lagern, d. h., daß ihre Köpfe den Verschiebungen der Kette folgen können. Ferner muß der Versteifungsbalken auf einer Seite wagerecht bewegliches Auflager haben.

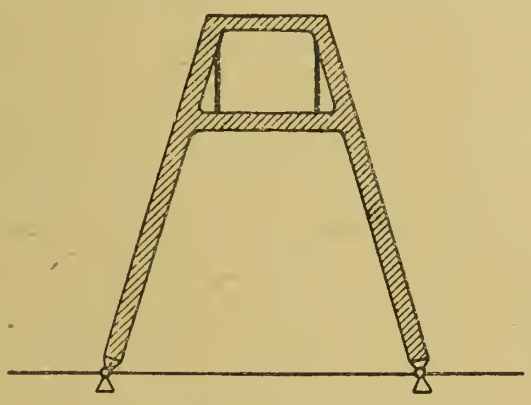


Fig. 67a.

Zunächst wird eine vorläufige Berechnung angestellt, und zwar auf Grund der Bedingung, daß der Versteifungsbalken ein konstantes Trägheitsmoment besitzt.

Es bezeichnen:

J das veranschlagte Trägheitsmoment des Balkens,
F seinen Querschnitt,
F_1 den Querschnitt der Kette,
F_2 den überall gleichgroßen Querschnitt der Hängestangen.

Ferner bedeuten:

l die Spannweite der Brücke,
n die Anzahl der Felder,
h die Höhe des Kettenbogens (Parabel).

Die Spannungen der Hängestangen waren nach Beispiel 19

$$V_1 = \frac{8\,h}{l\,n} \cdot X.$$

Wegen der großen Zahl der Hängestangen kann wie früher eine stetige Krümmung der Kette angenommen werden. Der Gleichung des Bogens ist

$$y = \frac{4\,h}{l^2}\, x\,(l - x).$$

Wir teilen die Kette in der Mitte bei a und bringen daselbst die Kräfte $X = 1$ t entgegengesetzt an. Dann erweitert sich die Schnittstelle um den unter Beispiel 15 nachgewiesenen Wert

$$\delta_{aa}' = \frac{8\,h^2\,l}{15\,JE}\,X.$$

Es tritt hinzu die Erweiterung aus der Längenänderung der Kette und der Hängestangen. Zunächst genügt es, den Einfluß der letzteren zu vernachlässigen und den Einfluß der Kette mit dem Betrag

$$\delta_{aa}'' = \frac{X\,s_0}{EF_1}$$

einzuführen, wo s_0 die wahre Länge der Kette ist.

Die Gesamterweiterung der Schnittstelle ergibt sich daher zu

$$\delta_{aa} = \delta_{aa}' + \delta_{aa}'' = \frac{8\,h^2\,l}{15\,JE} + \frac{s_0}{EF_1}.$$

Hierauf ist die unter der Wirkung von $X = 1$ t entstehende Biegungslinie des Versteifungsbalkens zu ermitteln. Es darf (Beispiel 19) dabei an Stelle der vertikalen Kräfte V_1 die gleichmäßig verteilte Belastung

$$p = \frac{8\,h}{l^2}$$

gesetzt werden.

Die Ordinaten der Durchsenkung können nach dem früher, insbesondere unter Beispiel 19 und 20 angegebenen Verfahren, oder nach der Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{p\,l^4}{24\,JE}\left(\frac{x}{l} - \frac{2\,x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

bestimmt werden (Fig. 67 c).

Dann bewirkt, wie bekannt, eine am Versteifungsbalken hängende Last P

$$X = P \frac{\eta}{\delta_{aa}}.$$

In der Folge sollen mit Hilfe der Einflußlinie für X einige unbestimmte Größen und Spannungswerte ermittelt werden.

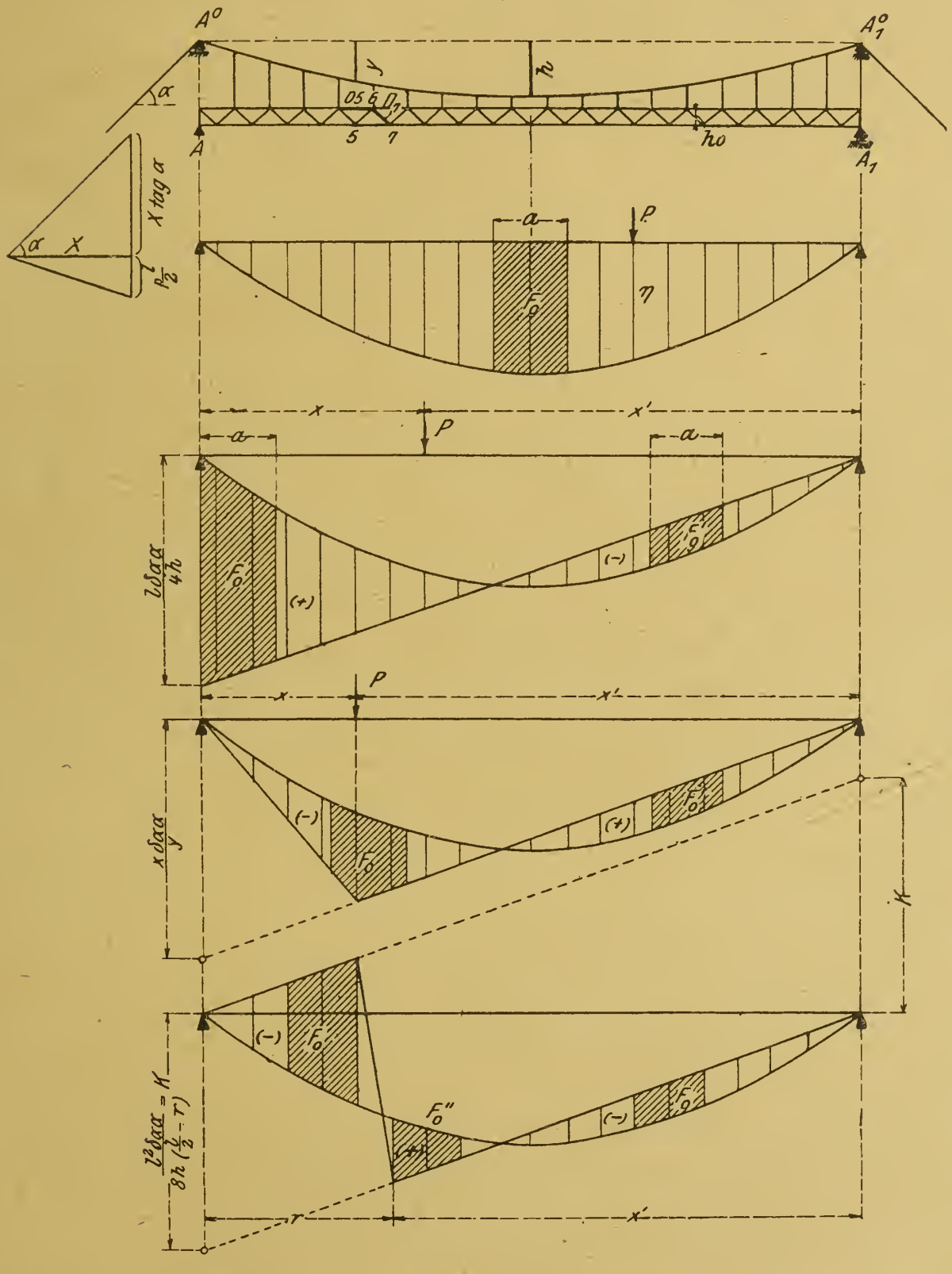


Fig. 67 b.

Fig. 67 c.

Fig. 67 d.

Fig. 67 e.

Fig. 67 f.

Der Balkenauflagerdruck A.

$$A = \frac{Px^1}{l} - \frac{p}{2} l \quad p = P \frac{8h}{l^2} \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}$$

$$A = \frac{Px^1}{l} - \frac{4Ph}{l} \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}} = \frac{x^1}{l} - \frac{4h}{l} \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}$$

$$= \frac{4h}{l\,\delta_{aa}} \left\{ \frac{x^1 l\,\delta_{aa}}{4hl} - \eta \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer ist der gewöhnliche Balkenauflagerdruck, er läßt sich in die Form kleiden

$$A_0 : x^1 = \frac{l\,\delta_{aa}}{4h} : l$$

und nach Fig. 67 d darstellen.

Das zweite Glied ist durch die Ordinaten der Biegungslinie gegeben. Die schraffierte Fläche liefert die Einflußlinie des Auflagerdruckes.

A wird am größten, wenn der Fahrwagen am nächsten der Stütze steht. Wie beim ersten Beispiel hängt der Fahrwagen in vielen Rollen, so daß an Stelle der Einzellasten gesetzt werden darf

$$Q \text{ oder } q = \frac{Q}{a}.$$

Bezeichnet F_0 die von der Fahrwagenlänge abgeschnittene Fläche der Einflußlinie, dann ergibt sich

$$A = \frac{4h}{l\,\delta_{aa}} \cdot F_0 \cdot q.$$

Die Vertikalkomponente A_0 der überspannten Kette ist

$$A_0 = X \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{pl}{2} \qquad p = \frac{8h}{l^2} X$$

$$A_0 = X \cdot \operatorname{tg} \alpha + X \cdot \frac{4h}{l} = X \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{4h}{l} \right)$$

$$= P \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{4h}{l} \right) = \frac{1}{\delta_{aa}} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{4h}{l} \right) \cdot \eta.$$

A_0 erreicht den größten Wert, wenn der Wagen in Brückenmitte steht (Fig. 67 c).

$$A_0^{\max} = \frac{1}{\delta_{aa}} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{4h}{l} \right) \cdot F_0 q.$$

Stab O_5.

Die Last $P = 1$ t im Knoten 5 erzeugt

$$S = \frac{1}{h_0}\left\{\frac{x^1 x}{l} - X \cdot y\right\} = \frac{1}{h_0}\left\{\frac{x^1 x}{l} - \frac{\eta}{\delta_{aa}} \cdot y\right\}$$

$$= \frac{y}{h_0 \delta_{aa}}\left\{\frac{x^1 x \delta_{aa}}{l y} - \eta\right\}.$$

Erstes Glied der Klammer

$$S_0 : x^1 = \frac{x \delta_{aa}}{y} : l.$$

Zweites Glied gegeben durch die Ordinaten der Biegungslinie. Die schraffierte Fläche der Fig. 67 e gibt die Einflußlinie der Stabkraft O_5.

Um die größte Druckspannung zu erhalten, bringe man den Fahrwagen in die Spitze der negativen Beitragsstrecke und ermittle $F_0^{\max}$. Dann ist

$$-O_5^{\max} = \frac{y}{h_0 \delta_{aa}} \cdot F_0^{\max} \cdot q.$$

Für die größte Zugspannung ist die ungünstigste Stellung des Wagens in der positiven Beitragsstrecke maßgebend

$$+O_5^{\max} = \frac{y}{h_0 \delta_{aa}} \cdot F_0^{\max} \cdot q.$$

Stab D_7.

Die Querkraft im Knoten 6 aus $P = 1$ t im Knoten 7 beträgt genügend genau

$$T_x = A_0 - \frac{p l}{2} + p \cdot r$$

$$= \frac{x^1}{l} - p\left(\frac{l}{2} - r\right) \qquad p = \frac{8 h}{l^2} \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}$$

$$T_x = \frac{x^1}{l} - \frac{8 h}{l^2} \cdot \frac{\eta}{\delta_{aa}}\left(\frac{l}{2} - r\right)$$

$$= \frac{8 h\left(\frac{l}{2} - r\right)}{l^2 \delta_{aa}}\left\{\frac{x^1 l^2 \delta_{aa}}{8 h l\left(\frac{l}{2} - r\right)} - \eta\right\}.$$

Ist α der Neigungswinkel der Diagonale, dann ergibt sich die Spannkraft zu

$$D_7 = \frac{8\,h\left(\frac{l}{2} - r\right)}{\sin\alpha\, l^2\,\delta_{aa}} \left\{ \frac{x^1\, l^2\,\delta_{aa}}{8\,h\,l\left(\frac{l}{2} - r\right)} - \eta \right\}.$$

Die zur Konstruktion der Einflußlinie aufzustellende Verhältnisgleichung des ersten Klammergliedes ist

$$D_7^0 : x^1 = \frac{l^2\,\delta_{aa}}{8\,h\left(\frac{l}{2} - r\right)} : l \text{ (Fig. 67f).}$$

Die maximalspannungserzeugenden Stellungen des Fahrwagens lassen sich mit einigen Umständen ermitteln; es ist wie immer

$$D_7 = \frac{8\,h\left(\frac{l}{2} - r\right)}{\sin\alpha\, l^2\,\delta_{aa}} \cdot F_0 \cdot q.$$

Schließlich können sämtliche Einflußlinien zur Berechnung der Spannungen aus dem Eigengewicht benutzt werden.

Auf Grund der Überschlagsrechnung kann eine ziemlich zutreffende Dimensionierung erfolgen. Dann gehe man an die genaue Berechnung.

Wie eingangs belaste man die Kette an der Schnittstelle a mit den Kräften $X = -1$ t und ermittle mit Hilfe eines Cremonaplanes sämtliche Spannungen sowohl der Kette als auch der Hängestäbe und der Stäbe des Versteifungsträgers.

Hiernach stelle man für jedes Glied den Wert

$$\frac{S_1^2 \cdot s}{EF}$$

auf, wo S_1 die ermittelte Spannkraft, s die Stablänge und F den Querschnitt bedeuten. Die Summe aller dieser Werte liefert dann die Erweiterung der Schnittstelle bei a. Also

$$\delta_{aa} = \sum \frac{S_1^2\, s}{EF}.$$

Sodann ist die zugleich entstehende Biegungslinie des Versteifungsbalkens zu konstruieren. Man kann sich dazu des Verfahrens der W-Gewichte bedienen, allein in diesem Falle, wo die

Längenänderungen der Stäbe

$$\frac{S_1 s}{EF}$$

bereits bei Berechnung der Werte

$$\frac{S_1^2 s}{EF}$$

bekannt wurden $\left(S_1 \cdot \frac{S_1 \cdot s}{EF}\right)$ erscheint ein Williotscher Verschiebungsplan am zweckmäßigsten.

Nunmehr können aus der alten Bedingung

$$X = P \frac{\eta}{\delta_{aa}}$$

die endgültigen Spannungszahlen aller Glieder ermittelt werden.

Schließlich bleibt noch die Untersuchung des Einflusses einer Temperaturänderung auf die Spannungen des Bauwerks. Nimmt man an, daß die Brücke bei einer Temperatur von $+10^0$ errichtet wird, dann kann eine Erhöhung oder Erniedrigung von vielleicht 30^0 eintreten. Erstere bewirkt ein Nachlassen, letztere eine Vergrößerung des Horizontalzuges X.

Der Horizontalzug der Kette aus einer Temperaturveränderung um t-Grad beträgt

$$X^t = 1 \cdot \frac{\delta_t}{\delta_{aa}}.$$

Die Längenänderung δ_t berechnet sich aus

$$\delta_t = \alpha t \cdot \Sigma S_1 \cdot s.$$

Diese Summe erstreckt sich nur über die Kette und die Hängestangen; der Einfluß des Versteifungsbalkens ist verschwindend gering.

Das Brückenportal ist dasselbe wie beim vorhergehenden Beispiel, nur unterscheidet es sich von jenem bezüglich der Art und des Angriffs der Kräfte. Zwar werden auch die Köpfe durch senkrechte Kräfte, die Vertikalkomponenten des Kettenzuges, die sich direkt in die Stabrichtungen zerlegen, belastet, doch muß der Rahmen außerdem die Auflagerdrucke A des Versteifungsbalkens tragen. Die Drucke wirken an dem unteren Querriegel. Sodann fallen bei diesem Portal die oberen Windkräfte $\frac{W_2}{2}$ fort, es bleiben nur $\frac{W_1}{2}$, weil der Wind quer gegen die Brücke von dem horizontal als Träger ausgebildeten Ver-

steifungsbalken aufgenommen wird. Der beim Beispiel 50 gefundene Wert für V liefert aber ohne weiteres die hier zu suchende Querkraft, wenn daselbst $\frac{W_2}{2} = 0$ gesetzt wird. Es ergibt sich (Fig. 67 g)

$$V = \frac{\frac{W_1 h_1}{24 J_1 a} \cdot a_1^3}{\frac{a_2^3}{24 J_2} + \frac{a_1^3}{24 J_1} + \frac{1}{J_0}\left(\frac{a_2^2 h_0}{4} + \frac{a_2 c h_0^2}{2 h_2} + \frac{c^2 h_0^3}{3 h_2^2}\right)} \quad (121)$$

$$X = \frac{W_1 h_1}{a} - V.$$

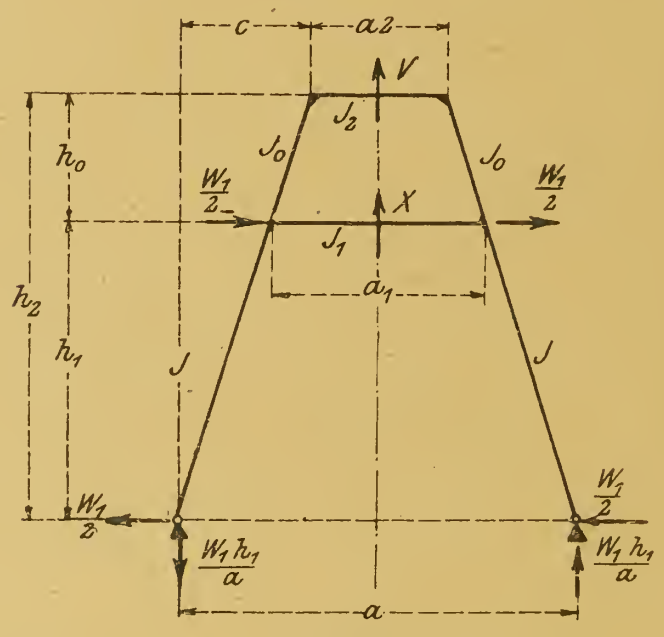


Fig. 67 g.

Die Belastung $P = P$ am unteren Querriegel bedingt die in Fig. 67 h vermerkten unbestimmten Größen

$$X,\ D \text{ und } M.$$

Die Bedingungsgleichung, auf Grund der die Größen entwickelt werden, lautet wie immer

$$\frac{1}{JE}\int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X}\, dx = 0.$$

Oberer Riegel.

$$M_x = M; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = 1.$$

$$\frac{1}{J_2 E}\int_0^{\frac{a_2}{2}} M \cdot dx = \frac{M a_2}{2 J_2 E} \quad \ldots \quad \text{(nach } M\text{)}$$

Oberer Pfosten.

$$M_x = M - Dx; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = 1; \quad \frac{\partial M_x}{\partial D} = -x$$

$$\frac{1}{J_0 E}\int_0^{h_0} \{M - D \cdot x\}\, dx = \frac{M h_0}{J_0 E} - \frac{D h_0^2}{2 J_0 E} \quad \text{(nach } M\text{)}$$

$$\frac{1}{J_0 E}\int_0^{h_0} \{-Mx + Dx^2\}\, dx = -\frac{M h_0^2}{2 J_0 E} + \frac{D h_0^3}{3 J_0 E} \quad \text{(nach } D\text{)}.$$

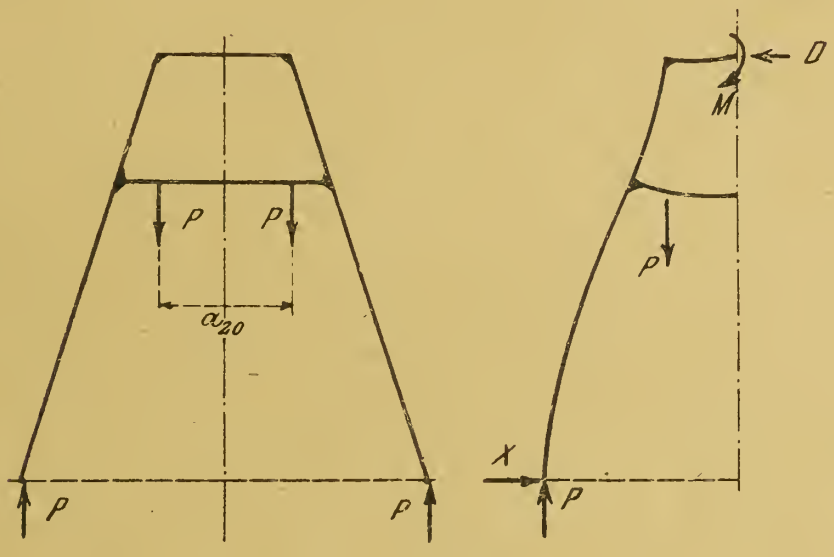


Fig. 67h.

Unterer Riegel.

$$M_x = M - D \cdot h_0 - X h_1 + M_0 \; (M_0 = \text{Balkenmoment})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M} = 1; \quad \frac{\partial M_x}{\partial D} = -h_0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -h_1$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}} \{M - D h_0 - X h_1 + M_0\}\, dx$$

$$= \frac{M a_1}{2 J_1 E} - \frac{D h_0 a_1}{2 J_1 E} - \frac{X h_1 a_1}{2 J_1 E} + \frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, dx \quad \text{(nach } M\text{)}$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}} \{-M h_0 + D h_0^2 + X h_1 h_0 - M_0 h_0\}\, dx$$

$$= -\frac{M h_0 a_1}{2 J_1 E} + \frac{D h_0^2 a_1}{2 J_1 E} + \frac{X h_1 h_0 a_1}{2 J_1 E} - \frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0 h_0\, dx \quad \text{(nach } D\text{)}$$

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}}\{-M h_1 + D h_1 h_0 + X h_1^2 - M_0 h_1\}\, d x$$

$$= -\frac{M h_1 a_1}{2 J_1 E} + \frac{D h_1 h_0 a_1}{2 J_1 E} + \frac{X h_1^2 a_1}{2 J_1 E} - \frac{1}{J_1 E}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0 h_1\, d x \quad (\text{nach } X).$$

Mit Bezug auf Fig. 67 i ist

$$\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, d x = \frac{P}{8}(2 a a_1 - a_1^2 - a_{20}^2)$$

$$\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0 h_0\, d x = \frac{P}{8} h_0 (2 a a_1 - a_1^2 - a_{20}^2)$$

$$\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0 h_1\, d x = \frac{P}{8} h_1 (2 a a_1 - a_1^2 - a_{20}^2).$$

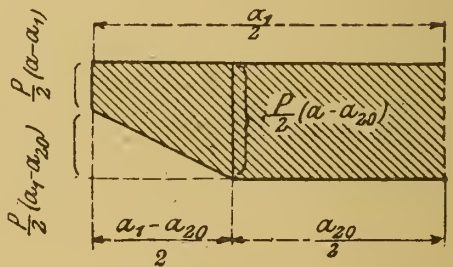


Fig. 67 i.

Unterer Pfosten.

$$M_x = \frac{P(a-a_2)}{2 h_2}\cdot x - X\cdot x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -x$$

$$\frac{1}{J E}\int_0^{h_1}\left\{X\cdot x^2 - \frac{P(a-a_2)}{2 h_2}\, x^2\right\} d x = \frac{X h_1^3}{3 J E} - \frac{P(a-a_2) h_1^3}{6 J E h_2}$$

(nach X)

Zusammenfassung.

$$(\text{I}) \quad -\frac{M a_2}{2 J_2} - \frac{M h_0}{J_0} + \frac{D h_0^2}{2 J_0} - \frac{M a_1}{2 J_1} + \frac{D h_0 a_1}{2 J_1} + \frac{X h_1 a_1}{2 J_1}$$

$$-\frac{1}{J_1}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, d x = 0 \ (\text{nach } M) \quad . \ . \ . \ . \quad (122)$$

$$(\text{II}) \quad -\frac{M h_0}{2 J_0} + \frac{D h_0^2}{3 J_0} - \frac{M a_1}{2 J_1} + \frac{D h_0 a_1}{2 J_1} + \frac{X h_1 a_1}{2 J_1}$$

$$-\frac{1}{J_1}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, d x = 0 \ (\text{nach } D) \quad . \ . \ . \ . \quad (122\,\text{a})$$

$$\text{(III)}\quad \frac{X h_1^2}{3J} - \frac{P(a-a_2)h_1^2}{6Jh_2} - \frac{M a_1}{2J_1} + \frac{D h_0 a_1}{2J_1} + \frac{X h_1 a_1}{2J_1}$$

$$- \frac{1}{J_1}\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, dx = 0 \text{ (nach } X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122\,b)$$

Die allgemeine Auflösung der drei Bedingungsgleichungen nach M, D und X führt zu unbeholfenen Ausdrücken, weshalb man besser die Zahlenwerte eines zu berechnenden Rahmens einführt. Die Unbekannten lassen sich dann mit weniger Arbeitsaufwand finden.

Beispiel hierzu.

$J = J_1 = J_2 = J_0$ $\quad a = 10$ m
$P = 10$ t $\quad a_1 = 5{,}8$ »
$a_2 = 4{,}0$ »
$a_{20} = 4{,}0$ »
$h_1 = 7{,}0$ »
$h_0 = 3{,}0$ »
$h_2 = 10{,}0$ »

$$\int_0^{\frac{a_1}{2}} M_0\, dx = \frac{P}{8}(2aa_1 - a_1^2 - a_{20}^2)$$

$$= \frac{P}{8}(2 \cdot 10 \cdot 5{,}8 - \overline{5{,}8}^2 - \overline{4}^2) = P \cdot 8{,}29.$$

$$\text{(I)}\quad -M\cdot 2 - M\cdot 3 + D\cdot 4{,}5 - M\cdot 2{,}9 + D\cdot 8{,}7 + X\cdot 20{,}3 - P\cdot 8{,}29 = 0$$

$$\text{(II)}\quad -M\cdot 1{,}5 + D\cdot 3 - M\cdot 2{,}9 + D\cdot 8{,}7 + X\cdot 20{,}3 - P\cdot 8{,}29 = 0$$

$$\text{(III)}\quad X\cdot 16{,}333 - P\cdot 4{,}9 - M\cdot 2{,}9 + D\cdot 8{,}7 + X\cdot 20{,}3 - P\cdot 8{,}29 = 0$$

$$\text{(I)}\quad -M\cdot 7{,}9 + D\cdot 13{,}2 + X\cdot 20{,}3 - P\cdot 8{,}29 = 0$$
$$\text{(II)}\quad -M\cdot 4{,}4 + D\cdot 11{,}7 + X\cdot 20{,}3 - P\cdot 8{,}29 = 0$$
$$\text{(III)}\quad -M\cdot 2{,}9 + D\cdot 8{,}7 + X\cdot 36{,}633 - P\cdot 13{,}19 = 0$$

Aus I und II

$$-M\cdot 7{,}9 + D\cdot 13{,}2 = -M\cdot 4{,}4 + D\cdot 11{,}7$$
$$D = M\cdot 2{,}333.$$

Aus II und III

$$-M \cdot 4{,}4 + M \cdot 27{,}2999 + X \cdot 20{,}3 - P \cdot 8{,}29 = 0$$
$$-M \cdot 2{,}9 + M \cdot 20{,}2999 + X \cdot 36{,}633 - P \cdot 13{,}19 = 0$$

$$M \cdot 22{,}8999 + X \cdot 20{,}3 = P \cdot 8{,}29$$
$$M \cdot 17{,}3999 + X \cdot 36{,}633 = P \cdot 13{,}19$$

$$M \cdot 41{,}3247 + X \cdot 36{,}633 = P \cdot 14{,}95997$$
$$M \cdot 17{,}3999 + X \cdot 36{,}633 = P \cdot 13{,}19000$$

$$M \cdot 23{,}9248 = P \cdot 1{,}76997$$
$$M = P \cdot 0{,}07398$$

$$D = M \cdot 2{,}333 = P \cdot 0{,}07398 \cdot 2{,}333 = P \cdot 0{,}17259$$

Aus II

$$-P \cdot 0{,}07398 \cdot 4{,}4 + P \cdot 0{,}17259 \cdot 11{,}7 + X \cdot 20{,}3 = P \cdot 8{,}29$$
$$X = P \cdot 0{,}32494.$$

Und weil $P = 10$ t:

$$M = 10 \cdot 0{,}07398 = 0{,}7398 \text{ mt}$$
$$D = 10 \cdot 0{,}17259 = 1{,}7259 \text{ t}$$
$$X = 10 \cdot 0{,}32494 = 3{,}2494 \text{ t.}$$

Momente:

Oberer Riegel.

$$M = M = 0{,}7398 \text{ mt.}$$

Oberer Pfosten.

$$M = M = 0{,}7398 \text{ mt}$$
(Ecke oben)

$$M = M - D \cdot h_0 = 0{,}7398 - 1{,}7259 \cdot 3 = -4{,}4379 \text{ mt.}$$
(Ecke unten)

Unterer Riegel.

$$M = M - D \cdot h_0 - X \cdot h_1 + M_0$$
(Ecke)
$$= M - D \cdot h_0 - X \cdot h_1 + P \cdot 2{,}1$$
$$= 0{,}7398 - 1{,}7259 \cdot 3 - 3{,}2494 \cdot 7 + 10 \cdot 2{,}1$$
$$= -6{,}1837 \text{ mt.}$$

Im Angriffspunkt der Last P

$$M = M - D \cdot h_0 - X \cdot h_1 + P \cdot 3$$
$$= 0{,}7398 - 5{,}1777 - 22{,}7458 + 10 \cdot 3$$
$$= +2{,}8163 \text{ mt.}$$

in der Mitte dasselbe Moment.

Unterer Pfosten.

$$M = -X \cdot h_1 + P \cdot 2{,}1$$
$$= -3{,}2494 \cdot 7 + 10 \cdot 2{,}1 = -1{,}7458 \text{ mt.}$$

Beispiel 54. Untersuchung an einem Seil zu einer Kabelbahn. (Fig. 68). Das Kabel hängt links an einem Festpunkt a_1, während es rechts bei a_2 über eine Rolle führt und am Ende mit dem Ausgleichgewicht S belastet ist. An dem Kabel läuft eine Katze mit dem Gewicht P. Der Antrieb der Katze ist so, daß sie sich an dem Kabel entlang windet, somit statisch in Festlage zu diesem steht.

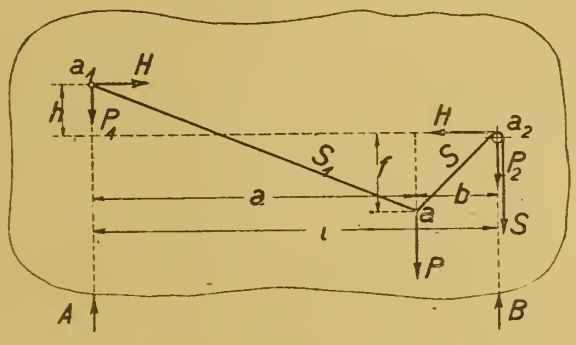


Fig. 68.

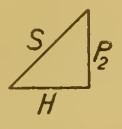


Fig. 68a.

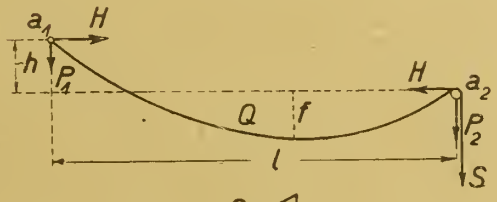


Fig. 68b.

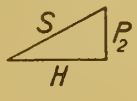


Fig. 68c.

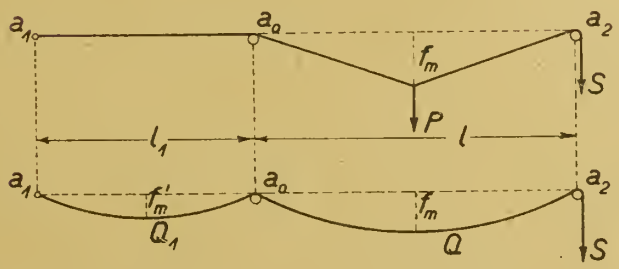


Fig. 68d.

Fig. 68e.

In dem Seilstück zwischen dem Angriffspunkt a der Last und der Rolle ist die Spannung gleich dem Ausgleichgewicht S. Dieser Zustand besteht natürlich bei jeder beliebigen Stellung von P. Infolge dieses Umstandes ist die Aufgabe eine statisch bestimmbare. Wäre auch das rechte Seilende fest aufgehängt, dann hinge die Lösung der Aufgabe von elastischen Einflüssen ab.

Zur besseren Vorstellung der folgenden Darlegungen denke man sich die Kabelanlage auf einer starren gewichtslosen Scheibe mit den Stützpunkten A und B angeordnet. Die Auflagerdrucke der Scheibe sind

$$A = P \cdot \frac{b}{l} \text{ und } B = P \cdot \frac{a}{l} + S.$$

Es bezeichnen: H die wagerechte überall gleiche Seitenkraft des Zuges in dem Kabel, P_1 die senkrechte Seitenkraft des Zuges S_1 im linken Kabelstück und P_2 die senkrechte Seitenkraft des Zuges S im rechten Stück.

Das Gleichgewicht bedingt, wenn man a_1 als Drehpunkt wählt

$$P \cdot a - P_2 \cdot l - H \cdot h = 0$$

oder

$$P_2 = \frac{P \cdot a}{l} - \frac{H \cdot h}{l}$$

und weiter

$$P_1 = \frac{P \cdot b}{l} + \frac{H \cdot h}{l}.$$

Nach dem Dreieck Fig. 68 a ergibt sich

$$H = \sqrt{S^2 - \left(\frac{P \cdot a}{l} - \frac{H \cdot h}{l}\right)^2}.$$

Diese Beziehung liefert

$$H = \frac{P \cdot a \cdot h}{l^2 + h^2} \pm \frac{l}{l^2 + h^2} \sqrt{S^2 (l^2 + h^2) - P^2 \cdot a^2} \quad . \quad . \quad (123)$$

$+$ Zeichen ist maßgebend.

Wird $h = o$, d. h. liegen der Aufhängepunkt und die Rolle in gleicher Höhe, dann ergibt die Gleichung 123

$$H = \frac{1}{l} \sqrt{S^2 \cdot l^2 - P^2 \cdot a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Wird $P = o$, dann folgt nach Gleichung 123

$$H = \frac{S \cdot l}{\sqrt{l^2 + h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Wird hierbei außerdem $h = o$, dann erhält man

$$H = S.$$

Mit Bezug auf die Fig. 68 kann man schreiben

$$H \cdot f = P_2 \cdot b = \left(P \cdot \frac{a}{l} - H \cdot \frac{h}{l}\right) \cdot b$$

Hieraus die Senkung des Kabels unter der Last P

$$f = \frac{b}{l}\left(\frac{P \cdot a}{H} - h\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Bei $h = o$ ergibt sich, wenn man für H den Wert der Formel 124 einsetzt

$$f = \frac{P \cdot a \cdot b}{\sqrt{S^2 \cdot l^2 - P^2 \cdot a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

Hängt die Last in der Mitte des Kabels, dann gewinnt man

$$f_m = \frac{P \cdot l}{4} \cdot \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - P^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \underline{(128)}$$

Wirkung des Eigengewichtes des Kabels (Fig. 68 b).

Wegen der geringen Senkung kann statt der wahren Länge des Seiles die Projektion gesetzt werden, so daß man hat

$$Q = q \cdot l.$$

Wählt man wieder a_1 als Drehpunkt, dann verlangt das Gleichgewicht

$$\frac{Q \cdot l}{2} - P_2 \cdot l - H \cdot h = 0$$

oder

$$P_2 = \frac{Q}{2} - \frac{H \cdot h}{l}$$

und weiter

$$P_1 = \frac{Q}{2} + \frac{H \cdot h}{l}.$$

Nach Abbildung 68 c ist

$$H = \sqrt{S^2 - \left(\frac{Q}{2} - \frac{H \cdot h}{l}\right)^2}$$

hieraus

$$H = \frac{Q \cdot h \cdot l}{2\,(l^2 + h^2)} \pm \frac{l}{2\,(l^2 + h^2)} \cdot \sqrt{4 \cdot S^2\,(l^2 + h^2) - Q^2 \cdot l^2} \quad (129)$$

$+$ Zeichen ist maßgebend.

Läßt man h wieder gleich Null werden, wenn also die Punkte a_1 und a_2 in gleicher Höhe liegen, dann ergibt die Gleichung

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot S^2 - Q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

Wird $Q = o$, dann wird wieder nach Gleichung 129

$$H = \frac{S \cdot l}{\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

Setzt man außerdem $h = o$, dann ergibt sich

$$H = S.$$

Wir nehmen wieder Bezug auf die Fig. 68 c. Bei der Annahme, daß die Punkte a_1 und a_2 in gleicher Höhe liegen, kann man schreiben

$$H \cdot f_m = \frac{Q \cdot l}{8}$$

oder

$$f_m = \frac{Q \cdot l}{8 \cdot H}.$$

Setzt man für H den Wert der Gleichung 130 ein, dann folgt

$$f_m = \frac{Q \cdot l}{8} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - Q^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Wegen der geringen Durchsenkung des Kabels kann man, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, die Senkung aus der Einzellast P und aus dem Eigengewicht Q ohne weiteres addieren. Bei wagerecht gespanntem Kabel, wenn die Last P in der Bahnmitte hängt, erhält man dann als größte Senkung (nach Gleichung 128 und 131)

$$f_{max} = \frac{P \cdot l}{4} \cdot \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - P^2}} + \frac{Q \cdot l}{8} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - Q^2}} \qquad (132)$$

Zahlenbeispiel. Länge des wagerecht ausgespannten Kabels $l = 300$ m. Gewicht desselben $Q = 9$ t. Die Einzellast beträgt $P = 8$ t. Das Ausgleichgewicht sei $S = 70$ t.

Es ergibt sich eine Durchsenkung des Kabels in der Mitte nach Gleichung 132 von

$$f_{max} = \frac{8 \cdot 300}{4} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot \overline{70}^2 - \overline{8}^2}} + \frac{9 \cdot 300}{8} \cdot \sqrt{\frac{4}{4 \cdot \overline{70}^2 - \overline{9}^2}}$$

$$f_{max} = 600 \sqrt{\frac{4}{19536}} + 338 \sqrt{\frac{4}{19519}}$$

$$f_{mxx} = 8{,}58 + 4{,}84 = \underline{13{,}42 \text{ m.}}$$

Die Zahlen zeigen, daß in praktischen Fällen zur Berechnung von f_{max} folgende Beziehung ausreicht (nach Gleichung 132, wenn man P^2 und Q^2 unter der Wurzel gleich Null setzt)

$$f_{max} = \frac{P \cdot l}{4 \cdot S} + \frac{Q \cdot l}{8 \cdot S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

In den Fig. 68 d und 68 e ist eine Kabelbahn über zwei Felder dargestellt. Bei der mittleren Stütze liegt das Kabel ebenfalls auf einer Rolle. Bei dieser Aufgabe gelten ohne weiteres die oben aufgestellten Formeln.

Eine Last P in der Mitte des rechten Feldes z. B. liefert nach Gleichung 128

$$f_m = \frac{P \cdot l}{4} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - P^2}}.$$

Hängt die Last in der Mitte des linken Feldes, dann ergibt sich

$$f_m' = \frac{P \cdot l_1}{4} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - P^2}}.$$

Ebenso können wir aus dem Eigengewicht schreiben
für das rechte Feld

$$f_m = \frac{Q \cdot l}{8} \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - Q^2}}$$

und für das linke Feld

$$f_m' = \frac{Q_1 \cdot l}{8} \cdot \sqrt{\frac{4}{4 \cdot S^2 - Q_1^2}}.$$

Die Formel für die genaue Senkung f_{max} in der Kabelmitte aus der Einzellast P und dem Eigengewicht Q (vergleiche Gleichung 132) lautet

$$f_{max} = l \cdot \frac{2 \cdot P + Q}{4 \sqrt{4 \cdot S^2 - (P+Q)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Sie ergibt sich wie folgt:

$$P_2 = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}$$

$$H \cdot f - P_2 \cdot \frac{l}{2} + \frac{Q \cdot l}{8} = 0$$

oder

$$H \cdot f - \frac{P \cdot l}{4} - \frac{Q \cdot l}{8} = 0$$

hieraus

$$f = \frac{l}{4 \cdot H} \left(P + \frac{Q}{2} \right).$$

Sodann ist

$$S^2 = H^2 + \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right)^2$$

oder

$$H = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot S^2 - (P+Q)^2}$$

eingesetzt

$$f_{max} = l \cdot \frac{2P + Q}{4 \sqrt{4 \cdot S^2 - (P+Q)^2}}.$$

Beispiel 55. Untersuchungen an einem an beiden Enden fest aufgehängten wagerechten Kabel.

Man denke sich das Kabel zunächst gewichtslos. Dann ist der statische Vorgang infolge einer Belastung abhängig von der Überlänge des Kabels, das heißt von der durch die Überlänge gegebenen Senkung. Sodann haben die Dehnung des Kabels sowie die Nachgiebigkeit der Festpunkte einen Einfluß auf die Sachlage. Aber dieser Einfluß ist schwer zu fassen, besonders die Nachgiebigkeit der Aufhängepunkte. Aber auch die Berücksichtigung der Längenänderung des Kabels ist schlecht durchführbar, weil die Gesetze, nach denen die Änderung sich vollzieht, nicht genau festliegen. Man wird daher zur Ermittelung der statischen Werte so vorgehen, indem man die unter der Belastung des Kabels eintretende Durchhängung mißt und hieraus die Folgerungen zieht.

Mit der Gleichung 131 war die Durchsenkung eines durch sein eigenes Gewicht Q belasteten Kabels gegeben. Diese Gleichung liefert, wenn die Senkung f durch Messung gegeben ist, den Zug im Kabel zu

$$S = \frac{Q\sqrt{l^2 + 16 \cdot f^2}}{8 \cdot f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Mißt man die unter der Last P in der Mitte bestehende Durchsenkung, wenn das Kabel gewichtslos gedacht wird, dann erhält man aus Gleichung 128

$$S = \frac{P\sqrt{l^2 + 4 \cdot f^2}}{4 \cdot f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

Wirken das Eigengewicht und die Last P zusammen, dann ergibt sich nach Gleichung 134

$$S = \frac{\sqrt{l^2\,(2 \cdot P + Q)^2 + 16 \cdot f^2\,(P + Q)^2}}{8 \cdot f} \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

Eine genügend genaue Annäherung folgt aus der Gleichung 133 mit

$$S = \frac{P \cdot l}{4 \cdot f} + \frac{Q \cdot l}{8 \cdot f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Ähnliche Beziehungen lassen sich aufstellen bei einem über mehrere feste Punkte geführten Kabel.

Siebenter Abschnitt.

Schwimm- und Werftkrane.

Beispiel 56. Ein Schwimmkran nach Fig. 69.

Das Bauwerk erfordert nur einfache statische Mittel; die Untersuchung ist aber weitläufig wegen der verschiedenen Belastungsarten und Belastungsstadien. Der Einfachheit halber sollen hier nur sechs Fälle bezüglich Nutzlast und Eigengewicht herangezogen werden.

Fall 1. a) Die leichte Last P_2
b) Die schwere Last P_1
c) Das Eigengewicht
} bei Auslegerstellung I (Fig. 69).

Fall 2. a) Die leichte Last P_2
b) Die schwere Last P_1
c) Das Eigengewicht
} bei Auslegerstellung II (Fig. 69)

Die beiden Auslegerwände laufen von unten herauf schräg zusammen, es ist jedoch zulässig, sie als in der Ebene liegend, d. h. parallel zueinander, anzusehen. Im Interesse der Übersichtlichkeit behandelt man die Wirkung der Lasten P und der Seilzüge getrennt. Es ist dabei kein nennenswerter Fehler, die Kräfte sämtlich in den Mittelpunkten der Rollen angreifen zu lassen.

Näheres hierüber siehe Beispiel 46.

Man unterlege der Berechnung die Annahme, daß bei Auslegerstellung I unter Angriff von P_1 und P_2 das Bauwerk sich um 6^0 gegen den Wasserspiegel neigt; entsprechend sind die Kraftrichtungen der Fig. 69 gedreht.

Maßgebend für die statische Lösung des Systems sind der Spindelzug Sp und die Auflagergrößen K. Zu erkennen ist, daß K durch den Schnittpunkt der verlängerten Spindelachse mit der Richtungslinie

der angreifenden Kraft gehen muß. Dieser Punkt liegt meistens außerhalb des Zeichentisches, weshalb man Sp rechnerisch festlegt.

Es ist

$$Sp = \frac{P \cdot r}{h}.$$

Nach Beispiel der Fig. 69 a läßt sich K dann durch Bildung des Kräftezuges finden.

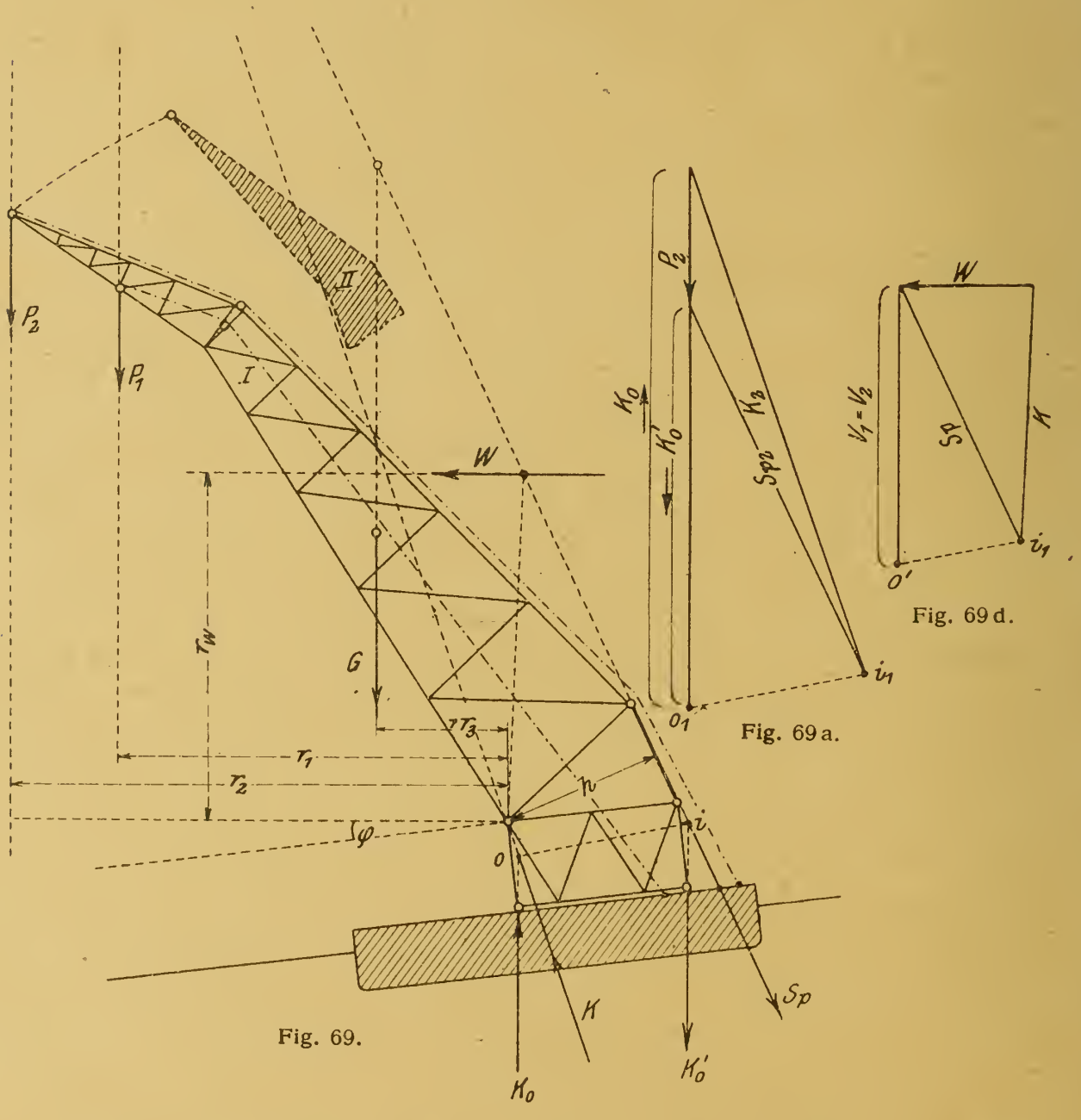


Fig. 69.

Fig. 69a.

Fig. 69d.

Ferner bestimmen sich die parallel zu P gerichteten (in Wirklichkeit senkrechten) Auflagerdrucke K_0 und K_0' wie folgt: Man ermittle in Fig. 69 die Schnittpunkte der Richtungen K_0 mit K und K_0' mit Sp und ziehe die Gerade 0—i. Diese schneidet, parallel verschoben, in Plan 69 a die gesuchten Größen K_0 und K_0' ab.

Fall 1.

a) Belastung durch P_2 ohne Seilzug. Neigung des Gerüstes $\varphi = 6^0$ gegen den Wasserspiegel.

$$Sp = \frac{P_2 \cdot r_2}{h}.$$

Ermittelung von K, ferner von K_0 und K_0' nach Fig. 69 a.

Ein einfacher Cremonaplan liefert die Stabspannungen des Auslegers und des Untergestells.

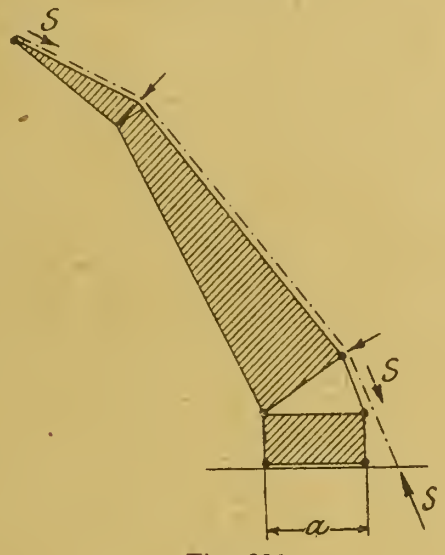


Fig. 69 b.

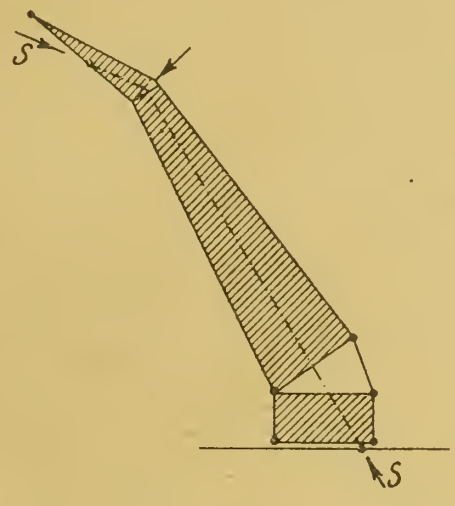


Fig. 69 c.

Belastung aus dem zugehörigen Seilzug S. Dieser beansprucht das Gerüst zwischen Kopf und Fuß auf Zusammendrücken (Fig. 69 b). Eine weitere Verfolgung des Falles erübrigt sich, da seine Lösung von der Anordnung des Windwerks abhängig ist. Jedenfalls entlastet der Seilzug den Ausleger und vermindert die Zugkraft Sp der Spindel.

b) Belastung durch P_1 ohne Seilzug. $\varphi = 6^0$.

$$Sp = \frac{P_1 \cdot r_1}{h}.$$

Ermittelung von K, ferner von K_0 und K_0' wie vorher. Dasselbe gilt für die Stabspannungen des Auslegers und des Untergestells.

Belastung durch den zugehörigen Seilzug. Wie oben beansprucht dieser das Gerüst zusammendrückend (Fig. 69 c), wirkt somit entlastend, obgleich nicht ausgeschlossen ist, daß einzelne Partien des Systems zusätzliche Spannung erleiden. Jedenfalls aber vermindert S den Spindelzug Sp.

c) Belastung durch das Eigengewicht. $\varphi = 6^0$. Man verteile das Eigengewicht richtig auf die einzelnen Knoten und ermittle mit Hilfe

eines Seilpolygons die Mittelkraft. Dann ist

$$Sp = \frac{G \cdot r_3}{h}.$$

Weiter ergeben sich wie oben die übrigen Auflagergrößen, wonach sodann ein Cremonaplan die Stabkräfte liefert.

d) Hier ist die Wirkung einer Windkraft gegen den Rücken des Auslegers einzuschalten. Man beachte, daß infolge der eingetretenen Neigung des Kranes der Wind gleichfalls um 6° gedreht angreift (Fig. 69).

Wie beim Eigengewicht lege man zunächst die Knotenkräfte w fest und suche darauf die Lage der Mittelkraft W. Liegt diese im Abstande r_w vom Drehpunkt des Auslegers, dann ist wiederum

$$Sp = \frac{W \cdot r_w}{h}.$$

Der entsprechende Auflagerdruck K findet sich durch Zeichnung des Kräftedreiecks (Fig. 69 d).

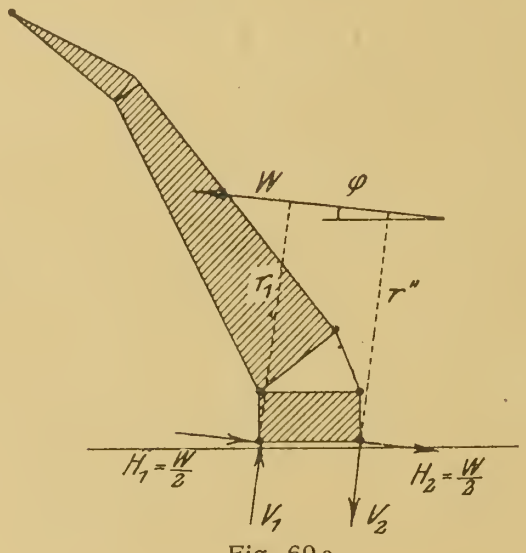


Fig. 69 e.

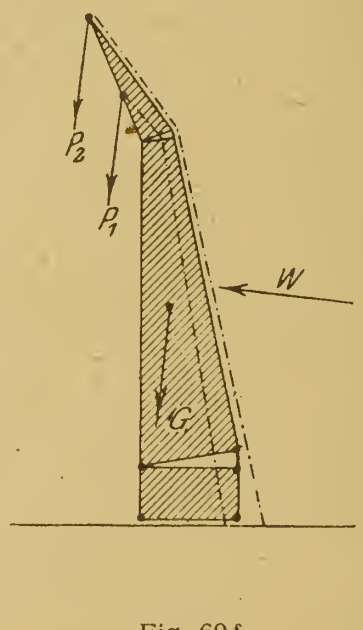


Fig. 69 f.

Hierauf ermittle man die Auflagergröße des Untergestells, wobei angenommen werden darf, daß die Horizontalkraft W zur Hälfte auf jeden Fußpunkt verteilt wird. Nach Fig. 69 e ist

$$H_1 = H_2 = \frac{W}{2}.$$

Ferner ergeben sich die Vertikaldrucke daselbst zu

$$V_1 = V_2 = \frac{W}{2a}(r' + r'') \cos \varphi.$$

Letztere Werte lassen sich auch nach Beispiel der Fig. 69 d konstruktiv durch Benutzung der Linie $0 - i$ ermitteln.

Die Stabkräfte, die durchweg zusätzlich gegenüber den Spannungen aus der Last erscheinen, bestimmen sich mit Hilfe eines Cremonaplanes.

Fall 2.

Die Rechnung ist wie die des ersten Falles, nur mit dem Unterschied, daß die Neigung des Gerüstes gegen den Wasserspiegel mit $\varphi = 3^0$ einzusetzen ist (Fig. 69 f).

a) Belastung durch P_2 ohne Seilzug.
   Belastung durch den zugehörigen Seilzug.
b) Belastung durch P_1 ohne Seilzug.
   Belastung durch den zugehörigen Seilzug.
c) Belastung durch das Eigengewicht.
d) Belastung durch Wind gegen den Rücken des Auslegers.

Sodann versäume man nicht. das Gerüst bei vollständig eingezogenem Ausleger und leeren Haken auf Sturm gegen die Bauchseite zu untersuchen. Die rücklings eintretende Neigung sei $\varphi = 3^0$ (Fig. 69 g).

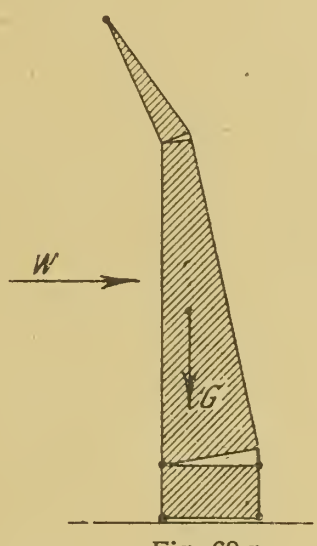


Fig. 69 g.

Schließlich lasse man den Wind quer gegen den Ausleger stoßen (Fig. 69 h). Der hierbei in Wirkung tretende Verband liegt nur bauchseitig; die Rückenfläche ist offen. Fig. 69 i zeigt die Querschnittsanordnung. Die Berechnung des Querrahmens (geschlossener Steifrahmen) für Angriff der Windkräfte W wurde im dritten Abschnitt, Beispiel 26, durchgeführt.

Ist W_1 die Totalwindkraft und r ihr nächster Abstand vom Drehpunkt des Auslegers, dann ergeben sich wie immer (Fig. 69 k)

$$H = \frac{W_1}{2}$$

und

$$V = \frac{W_1 \cdot r}{b}.$$

Man ermittle die entsprechenden Stabspannungen des Gerüstes und vereinige sie zu den Spannungen aus Eigengewicht und Last und zwar so, daß die ungünstigsten Werte erzielt werden. Man beachte die Darlegungen Beispiel 46, Fig. 58 c.

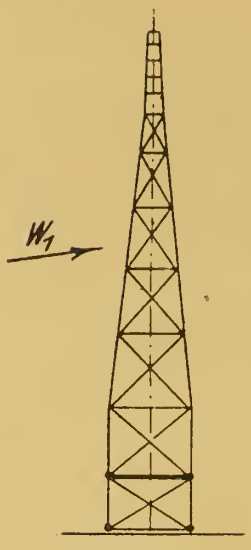


Fig. 69h.

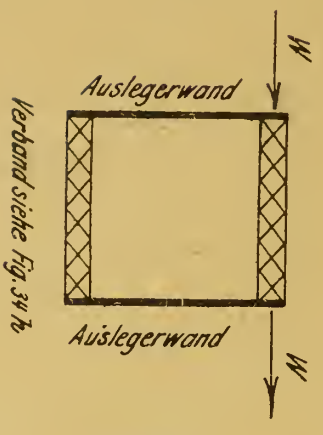


Fig. 69i.

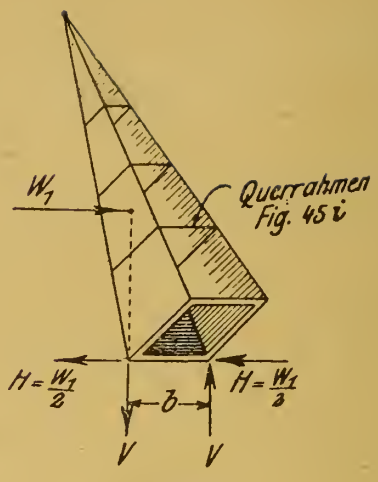


Fig. 69k.

Natürlich ist vorstehende Erörterung nur eine grundzügliche; sie kennzeichnet die Hauptdaten, wonach im allgemeinen die Rechnung durchzuführen ist. Im übrigen stellt die Aufgabe keine Anforderung an statische Disziplinen, bedarf vielmehr nur Geschicklichkeit in Handhabung der elementaren Mittel.

Beispiel 57. Ermittelung der Schwimmlagen eines Schwimmkranpontons. Der Boden und die Seitenwände des Pontons seien rechteckig (Fig. 70). Die Mittelkraft R aller senkrechten Lasten (Eigengewichte und Nutzlast des Kranes) liege im Abstande m von der Unterkante und im Abstande n von der senkrechten Mittelachse des Pontons.

Infolge der einseitigen Lage von R tritt eine Schiefstellung des Pontons unter dem Winkel α ein. Es liegt jedoch der Schwerpunkt S des Auftriebes A des im Wasser befindlichen Pontonteiles senkrecht unter der senkrechten Mittelkraft R. Aus dieser Gleichgewichtsbedingung läßt sich die Schiefstellung α des Pontons herleiten.

Es bezeichnen l die Länge des Pontons, b seine Breite und γ das Einheitsgewicht des Wassers.

Fall 1. Die Neigung des Pontons sei nicht so groß, daß die rechte untere Kante aus dem Wasser tritt.

Nach Maßgabe der Fig. 70 muß sein

$$R = b \cdot l \cdot t \cdot \gamma$$

oder

$$t = \frac{R}{b \cdot l \cdot \gamma}.$$

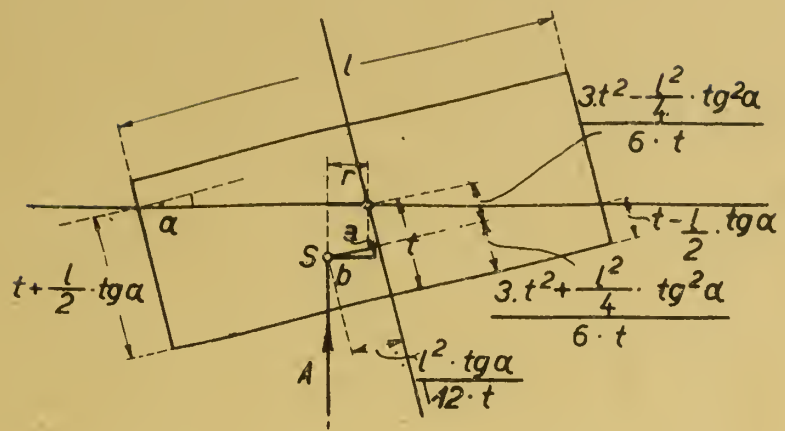


Fig. 70.

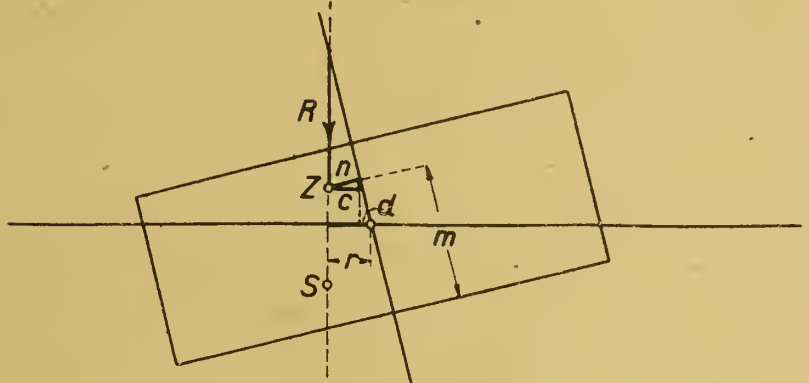


Fig. 70a.

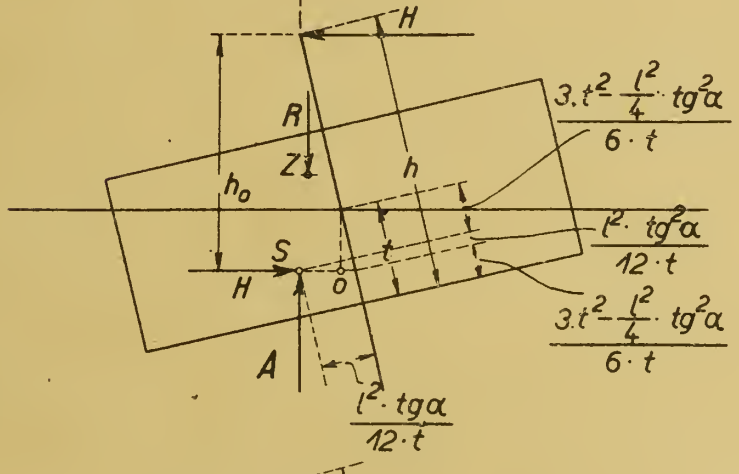


Fig. 70b.

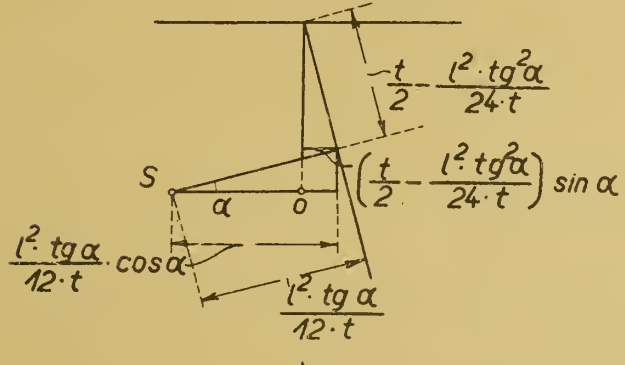


Fig. 70c.

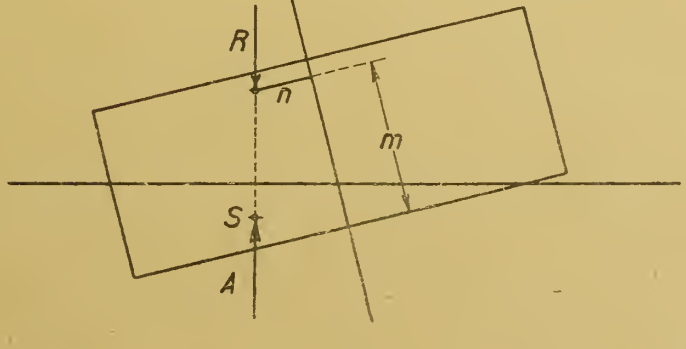


Fig. 70d.

In der Abbildung sind einige leicht zu ermittelnde Beziehungen des Schwerpunktes S zum Neigungswinkel α angegeben. Man findet außerdem

$$b = \frac{l^2 \cdot \sin \alpha}{12\, t}$$

und

$$a = \frac{3 \cdot t^2 - \frac{l^2}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{6 \cdot t} \cdot \sin \alpha.$$

Es ergibt sich schließlich

$$r = b - a = \frac{l^2}{24 \cdot t} (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha - \frac{t}{2} \cdot \sin \alpha \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

Unter Zugrundelegung der Fig. 70 a lassen sich dann für den Angriffspunkt Z der Mittelkraft R ebenfalls entsprechende Beziehungen aufstellen.

Man findet

$$d = (m - t) \sin \alpha$$

und

$$c = n \cdot \cos \alpha$$

oder

$$r = c + d = n \cdot \cos \alpha + (m - t) \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Nun müssen die Werte der Gleichungen I und II einander gleich sein, mithin

$$n \cdot \cos \alpha + (m - t) \sin \alpha = \frac{l^2}{24 \cdot t} (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha - \frac{t}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Diese Beziehung liefert

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l^2} (2 \cdot l^2 + 12 \cdot t^2 - 24 \cdot t \cdot m) - \frac{24 \cdot t \cdot n}{l^2} = 0 \quad (139)$$

wonach die Schiefstellung α berechnet werden kann.

Wegen des stets sehr kleinen Winkels kann man das erste Glied gleich Null setzen und man erhält als genügend genaue Annäherung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24 \cdot t \cdot n}{2 \cdot l^2 + 12 \cdot t^2 - 24 \cdot t \cdot m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Dividiert man die Gleichung durch $24 \cdot t$, dann ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{\frac{J}{R} + \frac{t}{2} - m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140\,\mathrm{a})$$

J ist das Trägheitsmoment des wagerechten Pontonquerschnittes in der Wasserlinie. In diesem Falle $J = \frac{b \cdot l^3}{12}$. Der Quotient $\frac{J}{R} = \overline{MF}$ bedeutet die Höhe des Metazentrums gemessen vom Schwerpunkt S des Auftriebes.

Zahlenbeispiel.

$l = 10$ m, $b = 5$ m, $n = 0{,}5$ m, $m = 3$ m, $R = 100$ t.

Man wird sehen, daß selbst bei diesem sehr ungünstigen Beispiel, wo die Schiefstellung erheblich ist, die Gleichung 140 noch ein genügend genaues Ergebnis liefert

$$i = \frac{R}{b \cdot l \cdot \gamma} = \frac{100}{5 \cdot 10 \cdot 1} = 2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24 \cdot 2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot \overline{10}^2 + 12 \cdot \overline{2}^2 - 24 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{24}{200 + 48 - 144}$$

$$= \frac{24}{104} = 0{,}231.$$

Die Gleichung 139 ergibt genau

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}221.$$

Dieser genaue Wert läßt sich durch versuchsweises Einsetzen eines etwas kleineren Wertes als 0,231 in die Gleichung 139 leicht finden.

Die Gleichung 139 gestattet festzustellen, bei welchem Maß n die rechte untere Kante des Pontons gerade über Wasser treten will. Dieses tritt ein, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{\frac{l}{2}} = \frac{2\,t}{l}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung ein, dann ergibt sich

$$n = \frac{l}{6} - \frac{2\,t}{l}\left(m - \frac{2\,t}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Es soll jetzt der Einfluß einer mit der senkrechten Last R zusammenwirkenden im Abstande h von der Unterkante des Pontons liegenden wagerechten Kraft H aus Wind ermittelt werden (Fig. 70 b).

Der Kraft wird ein Momentan-Widerstand H des Wassers, der im Schwerpunkt S des Auftrittes liegt, entgegengesetzt.

In der Figur sind wieder einige geometrische Beziehungen angegeben.

Hiernach findet man

$$h_0 = \left(h - \frac{3 \cdot t^2 - \frac{l^2}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{6 \cdot t} \right) \cos \alpha$$

oder

$$h_0 = \left(h + \frac{l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{24 \cdot t} - \frac{t}{2} \right) \cos \alpha.$$

Wählt man den Punkt o als Drehpunkt der Momente, dann kann man schreiben

$$R \cdot r + H \cdot h_0 = \underbrace{R \cdot r}_{\text{Auftrieb}}$$

oder

$$R \left\{ n \cdot \cos \alpha + (m - t) \sin \alpha \right\} + H \left\{ h + \frac{l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{24 \cdot t} - \frac{t}{2} \right\} \cos \alpha$$

$$= R \left\{ \frac{l^2}{24 \cdot t} (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha - \frac{t}{2} \cdot \sin \alpha \right\}.$$

Hieraus

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l^2} \left(2 \cdot l^2 + 12 \cdot t^2 - 24 \cdot t \cdot m \right) - \frac{24 \cdot t \cdot n}{l^2}$$

$$- \frac{24 \cdot t}{l^2} \cdot \frac{H}{R} \left(h + \frac{l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{24 \cdot t} - \frac{t}{2} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Setzt man auch in dieser Gleichung wegen des geringen Winkels $tg^3 \alpha = 0$ und $tg^2 \alpha = 0$, dann folgt als genügend genaue Annäherung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24 \cdot t \cdot n + 24\, t \cdot \frac{H}{R} \left(h - \frac{t}{2} \right)}{2 \cdot l^2 + 12 \cdot t^2 - 24 \cdot t \cdot m} \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n + \frac{H}{R} \left(h - \frac{t}{2} \right)}{\frac{J}{R} + \frac{t}{2} - m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143\,a)$$

Wie bei der Gleichung 139 läßt sich auch aus der Gleichung 142 ermitteln, bei welchem Maß n die rechte untere Kante des Pontons gerade aus dem Wasser treten will. Es muß dann wieder sein

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot t}{l}.$$

Nach Einführung dieses Wertes in die Gleichung ergibt sich

$$n = \frac{l}{6} - \frac{2 \cdot t}{l} \left(m - \frac{2 \cdot t}{3} \right) - \frac{H}{R} \left(h - \frac{t}{3} \right) \quad . \quad . \quad (144)$$

Zahlenbeispiel.

$$l = 10\text{ m},\quad b = 5\text{ m},\quad n = 0{,}5\text{ m},\quad m = 3\text{ m},\quad R = 50\text{ t},$$
$$H = 4\ t,\quad h = 5{,}0\text{ m}.$$

Die Gleichung 144 gibt den Grenzwert n an, bei dem die untere rechte Kante des Pontons aus dem Wasser tritt; wird dieser Wert n überschritten, dann sind die Gleichungen 142 und 143 nicht mehr gültig.

(Diese Bemerkung gilt auch sinngemäß für die Gleichungen 139, 140 und 141.)

Die Zahlen liefern

$$t = \frac{R}{b \cdot l \cdot \gamma} = \frac{50}{5 \cdot 10 \cdot 1} = 1$$

und

$$n = \frac{10}{6} - \frac{2 \cdot 1}{10}\left(3 - \frac{2 \cdot 1}{3}\right) - \frac{4}{50}\left(5 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 1{,}667 - 0{,}467 - 0{,}373 = 0{,}827\text{ m}.$$

Da n kleiner ist als dieser Wert, sind die Formeln 142 und 143 anwendbar. Es berechnet sich nach der Annäherungsgleichung 143

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{24 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 24 \cdot 1 \cdot \frac{4}{50}\left(5 - \frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \overline{10}^{2} + 12 \cdot 1 - 24 \cdot 1 \cdot 3}$$
$$= \frac{12 + 8{,}64}{200 + 12 - 72} = \frac{20{,}64}{140} = 0{,}147.$$

Fall 2. Die Neigung des Pontons sei so groß, daß die rechte untere Kante aus dem Wasser tritt (vgl. Fig. 70 d).

Dann ergibt sich für die Belastung durch die senkrechte Kraft R auf ähnlichem Wege wie früher die Beziehung

$$\sqrt{2 \cdot l \cdot t \cdot \operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{l}{2} - n - m \cdot \operatorname{tg}\alpha\right) - \frac{2 \cdot l \cdot t}{3}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 0 \quad (145)$$

Diese Gleichung läßt sich schlecht auf eine brauchbare Form bringen. Man ermittle den Neigungswinkel so, indem man probeweise Werte für $\operatorname{tg}\alpha$ einsetzt.

Nimmt man an, daß die rechte untere Kante des Pontons wieder gerade in das Wasser taucht, dann muß sich für n derselbe Wert ergeben, wie der in Gleichung 141 gefundene. Dieser Zustand tritt ein bei

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \cdot t}{l}.$$

Führt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, dann ergibt sich ebenfalls

$$n = \frac{l}{6} - \frac{2 \cdot t}{l}\left(m - \frac{2 \cdot t}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Schließlich ergibt sich noch für den zweiten Belastungsfall, wo außer der vertikalen Last R noch eine wagerechte Kraft H wirksam ist, die Gleichung

$$\sqrt{2 \cdot t \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha}\left\{\frac{l}{2} - n - m \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{H}{R}\left(h + \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot t \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}\sqrt{\frac{2 \cdot t \cdot l}{\operatorname{tg} \alpha}}\right)\right\} - \frac{2 \cdot t \cdot l}{3}(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \quad (146)$$

Der vorstehende Fall 2 kommt praktisch kaum in Betracht.

Beispiel 58. Ein Hammerkran nach Fig. 71.

Wie bei den Turmkranen wird auch hier jenseitig des Lastenauslegers ein Gegengewicht G zwecks Ausgleich der Momente angeordnet. Zunächst lasse man das Stützgerüst außer acht und betrachte nur den drehbaren Teil, d. h. die Drehsäule und den Ausleger. Hierfür führe man, unter der einfachen Annahme, daß das größte linksdrehende Moment bei ausgefahrener durch P belasteter Katze gleich ist dem größten rechtsdrehenden Moment bei eingezogener leerer Katze, den Stabilitätsnachweis.

Es bezeichnen b_{rechts} und b_{links} die Schwerabstände der wirksamen Eigengewichte, Lasten und Kräfte von der Mittelaxe der Drehsäule.

a) Kippmomente der Drehsäule ohne Last.

Gegenstand	Eigengewicht t	b_r m	b_l m	M_r mt	M_l mt	Bemerkungen
Drehsäule mit Ausleger	G_1	—	b_1	—	M_l^1	
Gegengewicht . .	G_2	b_2	—	M_r^2	—	
Winde	G_3	b_3	—	M_r^3	—	
Katze mit Flasche	G_4	—	b_4	—	M_l^4	Katze ausgefahren
Katze mit Flasche	G_5	—	b_5	—	M_l^5	Katze eingezogen
Führerhaus . . .	G_6	—	b_6	—	M_l^6	
Gesamtdruck A_1 .	$\sum$ Lasten			$\sum M_r$	$\sum M_l^a$	Katze ausgefahren
					$\sum M_l^i$	Katze eingezogen

Hieraus

$$M_r^{\max} = \sum M_r - \sum M_l^i.$$

b) Kippmomente der Drehsäule mit Last P in b_4 Ausladung.

$$M_l^{\max} = P \cdot b_4 + \sum M_l^a.$$

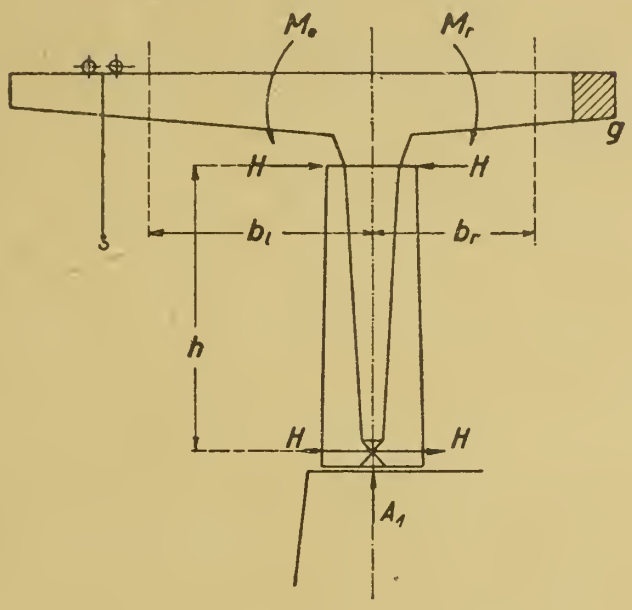


Fig. 71.

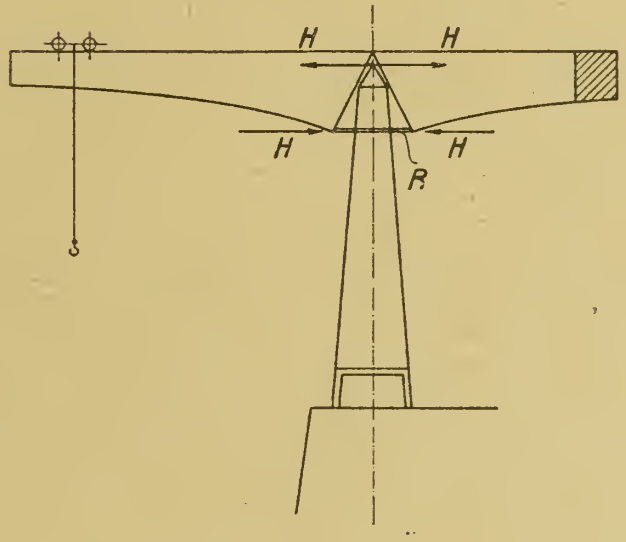


Fig. 71 a.

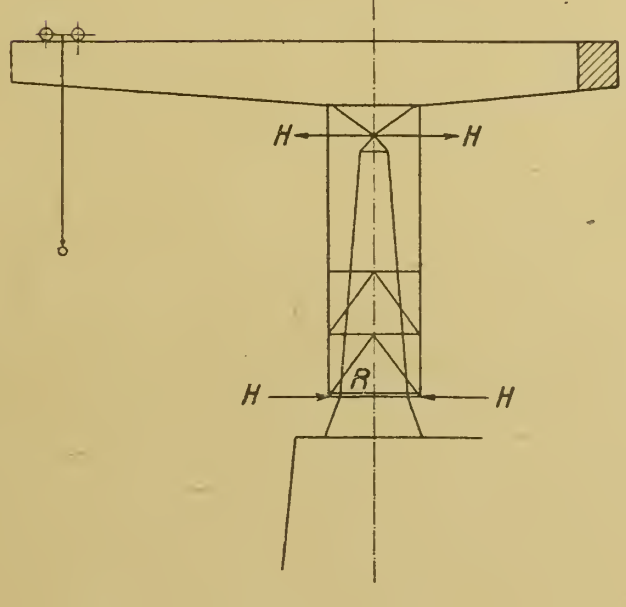


Fig. 71 b.

Es soll sein

$$M_r^{\max} = M_l^{\max},$$

woraus sich die Schwere des Gegengewichtes bestimmen läßt.

Die am Fuße der Säule bzw. am Stützring auftretenden Horizontalschübe betragen

$$H = + \frac{M_r^{\max}}{h} = - \frac{M_l^{\max}}{h}.$$

Bei angehängter Last ist der senkrechte Auflagerdruck

$$A_1^{\max} = A_1 + P.$$

Auf Grund vorentwickelter Gleichgewichtsbedingung lassen sich nun leicht die Stabspannungen des Auslegers und der Drehsäule ermitteln.

Für die Drehsäule sind dabei drei besondere Belastungsfälle ins Auge zu fassen,

erstens, wenn die Katze mit Last ganz ausgefahren ist,

zweitens, wenn die Katze mit Last diejenige Stellung hat, wo das linksdrehende Moment gleich ist dem rechtsdrehenden Moment ($H = 0$),

drittens, wenn die leere Katze ganz eingezogen ist.

Bezüglich des Auslegers sei folgendes bemerkt: Der rückseitige Arm wird dauernd durch Eigengewicht, Windwerk, Gegengewicht und Führerkorb belastet; die Maximalgurtspannungen des Lastenarmes treten bei ganz ausgefahrener belasteter Katze ein, die größten Diagonal- und Vertikalspannungen dagegen, wenn die Katze mit Last jedesmal bis zum entsprechenden Felde vorrückt (siehe Einflußlinien der Diagonalen und Vertikalen bei früheren Beispielen).

In den Fig. 71 a und 71 b sind zwei weitere Arten von Hammerkranen dargestellt. Bei beiden Kranen stützt sich der bewegliche drehbare Teil auf eine feste Säule. Das Kräftepaar (wagerechte Schübe H) wird von dem Stützzapfen und dem Fuß der Haube auf die Säule übertragen. Von besonderem Interesse ist der am Fuß der Haube angeordnete Druckring. Dieser Ring gibt den Schub H vermittelst Rollen auf die feste Drehscheibe der Säule ab. In der Fig. 71 c ist ein solcher Ring mit den angreifenden Kräften P dargestellt. An den vier Stellen 2, 2, 2′ und 2′ ist er an der rechteckigen Haube aufgehängt, während in den Punkten 3 und 3 die Druckrollen liegen. Es wird hier auf das K-System der Haube aufmerksam gemacht, wodurch der Gesamtschub H zu vier genau gleichen Teilen P auf die vier Punkte 2, 2, 2′ und 2′ des Ringes verteilt wird.

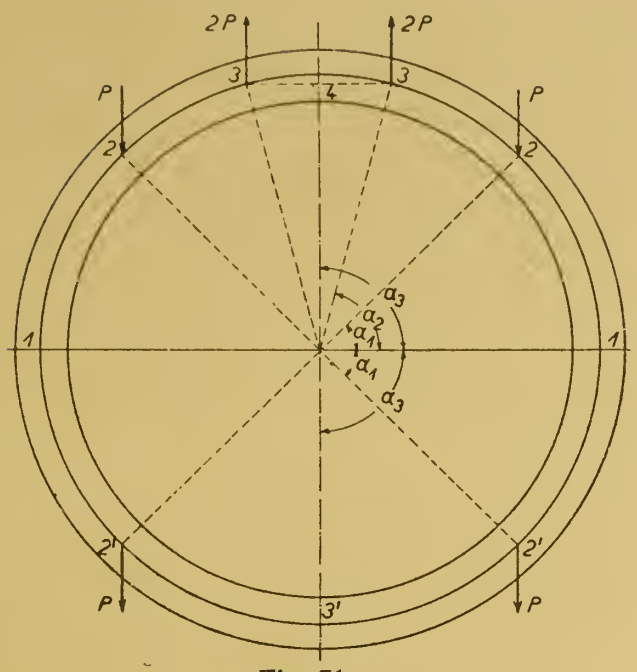


Fig. 71 c.

Der Ring ist innerlich statisch unbestimmt und zwar wegen der Symmetrie der Belastung zweifach. Durchschneidet man ihn wagerecht so, daß die Querschnitte 1 — 1 getroffen werden, dann erscheinen zwei unbekannte Größen: eine Querkraft X und ein Moment M (siehe Fig. 71 d). Die Querkraft X entsteht durch die verschieden große Ausweichung der Enden der Ringhälften. Das Moment M hat seine Ursache in der Verdrehung der Enden gegeneinander.

Vernachlässigt man den geringen Einfluß der Formänderung aus den Normalkräften, dann lassen sich die unbekannten Größen leicht mit Hilfe der Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_\varphi}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial X} \cdot ds = 0$$

und

$$\int \frac{M_\varphi}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial M} \cdot ds = 0$$

ermitteln.

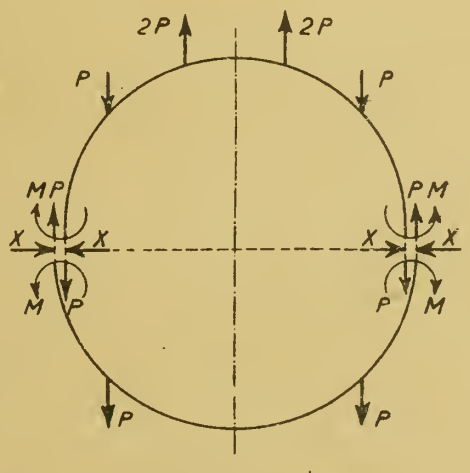


Fig. 71 d.

Die Ergebnisse der Rechnung werden nicht scharf sein, weil der Querschnitt des Ringes im Verhältnis zur Krümmung ziemlich groß ist. Man wird jedoch der mangelnden Genauigkeit durch eine nicht zu hohe Materialbeanspruchung Rechnung tragen.

Die Rechnung wird eine bequeme und kurze, wenn man die Belastung Fig. 71 in die beiden Belastungen Fig. 71 e und 71 f zerlegt. Die Belastung der Fig. 71 e erzeugt dann nur ein Moment M und die Belastung der Fig. 71 f nur eine Querkraft X. Man macht beide Größen mithin durch die Zerlegung der Belastung unabhängig voneinander.

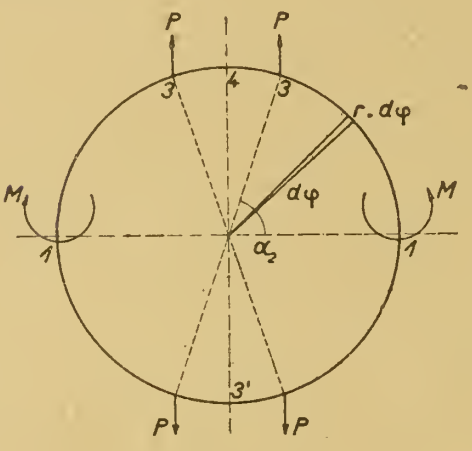


Fig. 71 e.

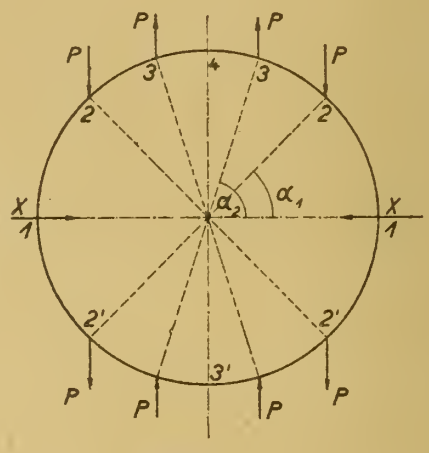


Fig. 71 f.

Ermittelung von X.

Von 1—2.

$$M_\varphi = -X \cdot r \cdot \sin\varphi \qquad \frac{\partial M_\varphi}{\partial X} = -r \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_0^{\alpha_1} X \cdot r^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot r \cdot d\varphi = \frac{X \cdot r^3}{J \cdot E} \cdot \int_0^{\alpha_1} \sin^2\varphi \cdot d\varphi \quad . \qquad \text{(I)}$$

Von 2—3.

$$M_\varphi = -X \cdot r \cdot \sin\varphi + P \cdot r\,(\cos\alpha_1 - \cos\varphi) \qquad \frac{\partial M_\varphi}{\partial X} = -r \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{1}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{X \cdot r^2 \cdot \sin^2\varphi - P \cdot r^2\,(\cos\alpha_1 \cdot \sin\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)\}\, r \cdot d\varphi$$

$$= \frac{X \cdot r^3}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2\varphi \cdot d\varphi - \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E} \cdot \cos\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\varphi \cdot d\varphi$$

$$+ \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(II)}$$

Von 3—4.

$$M_\varphi = -X \cdot r \cdot \sin\varphi + P \cdot r\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \qquad \frac{\partial M_\varphi}{\partial X} = -r \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{1}{J \cdot E}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\{X \cdot r^2 \cdot \sin^2\varphi - P \cdot r^2\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\sin\varphi\}\, r \cdot d\varphi$$

$$= \frac{X \cdot r^3}{J \cdot E}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\sin^2\varphi \cdot d\varphi - \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E}\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\sin\varphi \cdot d\varphi \qquad \text{(III)}$$

Zusammenfassung:

$$\frac{X \cdot r^3}{J \cdot E}\int_0^{\alpha_3}\sin^2\varphi \cdot d\varphi + \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E} \cdot \cos\alpha_1\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

$$+\frac{P \cdot r^3}{J \cdot E}\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2) + \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

oder da $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

$$X = \frac{2 \cdot P}{\pi}\,(\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Ermittelung von M.

Von 1—3.

$$M_\varphi = -P \cdot r\,(1 - \cos\varphi) + M \qquad \frac{\partial M_\varphi}{\partial M} = 1$$

$$\frac{1}{J \cdot E}\int_0^{\alpha_2}\{-P \cdot r\,(1 - \cos\varphi) + M\}\, r \cdot d\varphi$$

$$= -\frac{P \cdot r^2}{J \cdot E}\int_0^{\alpha_2}(1 - \cos\varphi)\, d\varphi + \frac{M \cdot r}{J \cdot E}\int_0^{\alpha_2} d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Von 3—4.

$$M_\varphi = -P \cdot r\,(1 - \cos\alpha_2) + M \qquad \frac{\partial M_\varphi}{\partial M} = 1$$

$$\frac{1}{J \cdot E}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\{-P \cdot r\,(1 - \cos\alpha_2) + M\}\, r \cdot d\varphi$$

$$= -\frac{P \cdot r^2}{J \cdot E}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}(1 - \cos\alpha_2)\, d\varphi + \frac{M \cdot r}{J \cdot E}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Zusammenfassung.

$$\frac{M \cdot r}{J \cdot E} \int_0^{\alpha_3} d\varphi = \frac{P \cdot r^2}{J \cdot E} \left\{ \int_0^{\alpha_2} d\varphi - \int_0^{\alpha_2} \cos\varphi \cdot d\varphi + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} d\varphi - \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \cos\alpha_2 \cdot d\varphi \right\}$$

oder da $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$

$$M = \frac{2 \cdot P \cdot r}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \cdot \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \right\} \quad . \quad (148)$$

Die Formeln 147 und 148 erlauben auch ohne weiteres die Lösung verschiedener besonderer Belastungsfälle des Ringes.

Fig. 71 g. Dreht man alle Kräfte der oberen Ringhälfte herauf und die der unteren Hälfte herunter, dann ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^0$.

Es folgt

$$X = 0$$

und

$$M = P \cdot r \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = P \cdot r \cdot 0{,}3634.$$

Fig. 71 h. Hier ist

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 90^0.$$

Man erhält

$$X = \frac{2 \cdot P}{\pi} = P \cdot 0{,}6397$$

und

$$M = P \cdot r \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = P \cdot r \cdot 0{,}3634.$$

Fig. 71 i. Dieser Belastungsfall bedingt $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\alpha_3 = 90^0$.

Die Formeln liefern

$$X = 0$$

und

$$M = \frac{2 \cdot P \cdot r}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 . \right\}.$$

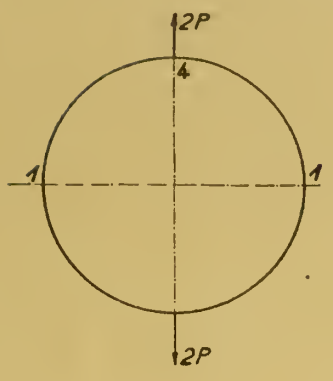
Fig. 71 k. Es wird

$$\alpha_1 = 90^0.$$

Es ergibt sich

$$X = -\frac{2 \cdot \widetilde{P}}{\pi} \cdot \cos^2\alpha_2$$

Fig. 71 g.



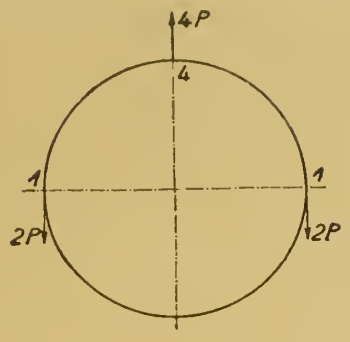
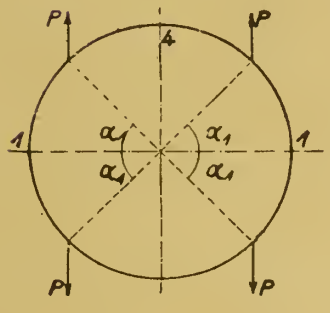


Fig. 71 h.

Fig. 71 i.



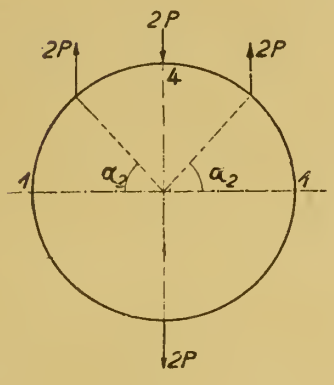
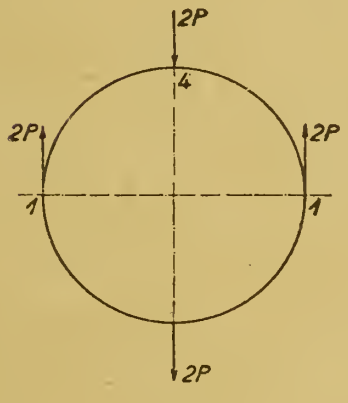


Fig. 71 k.

Fig. 71 l.



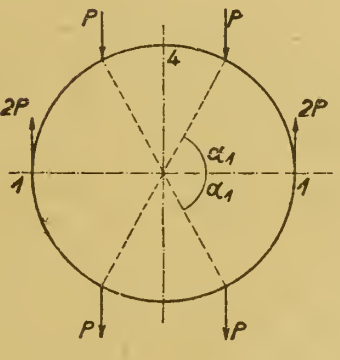
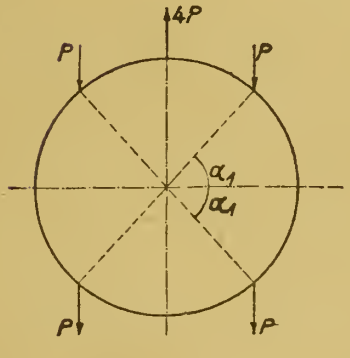


Fig. 71 m.

Fig. 71 n.



und

$$M = \frac{2 \cdot P \cdot r}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \right\}.$$

Fig. 71 l.

$$\alpha_1 = 90^0, \quad \alpha_2 = 0$$

$$X = - \frac{2 \cdot P}{\pi}$$

$$M = 0.$$

Fig. 71 m.

$$\alpha_2 = 0$$

$$X = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \sin^2 \alpha_1$$

$$M = 0.$$

Fig. 71 n.

$$\alpha_2 = 90^0$$

$$X = \frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \cos^2 \alpha_1$$

$$M = P \cdot r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = P \cdot r \cdot 0{,}3634.$$

Bei Ermittelung der Beanspruchung des Ringes Fig. 71 c muß außer dem Moment auch die auf den jeweiligen Querschnitt wirkende Normalkraft N berücksichtigt werden.

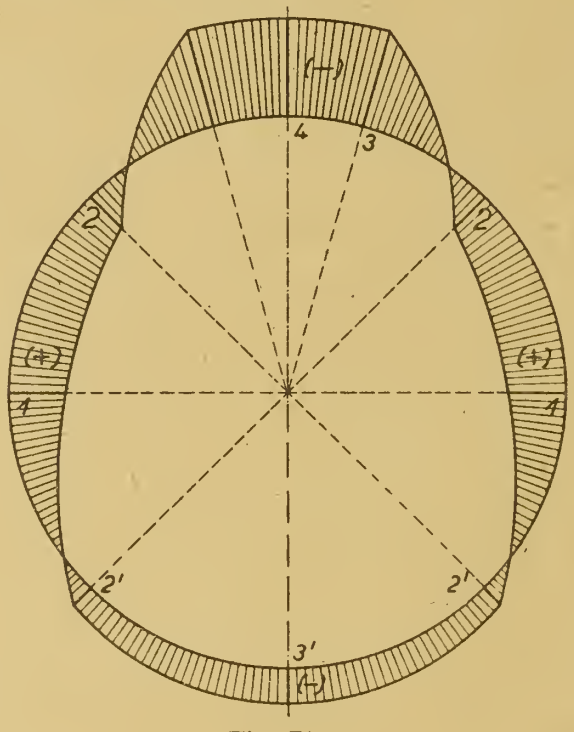


Fig. 71 o.

Punkt 1.

$$M_1 = M$$

$$N_1 = P.$$

Punkt 2.

$$M_2 = -P \cdot r\,(1 - \cos \alpha_1) + X \cdot r \cdot \sin \alpha_1 + M$$

$$N_2 = 2 \cdot P \cdot \cos \alpha_1 + X \cdot \sin \alpha_1.$$

Punkt 3.

$$M_3 = -P \cdot r\,(1 + \cos \alpha_1 - 2 \cdot \cos \alpha_2) + X \cdot r \cdot \sin \alpha_2 + M$$

$$N_3 = 2 \cdot P \cdot \cos \alpha_2 + X \cdot \sin \alpha_2.$$

Punkt 4.

$$M_4 = -P \cdot r\,(1 + \cos\alpha_1 - 2 \cdot \cos\alpha_2) + X \cdot r \cdot \sin\alpha_3 + M$$
$$N_4 = X.$$

Punkt 2′.

$$M_{2'} = -P \cdot r\,(1 - \cos\alpha_1) - X \cdot r \cdot \sin\alpha_1 + M$$
$$N_{2'} = P \cdot \cos\alpha_1 - X \cdot \sin\alpha_1.$$

Punkt 3′.

$$M_{3'} = -P \cdot r\,(1 - \cos\alpha_1) - X \cdot r \cdot \sin\alpha_3 + M$$
$$N_{3'} = -X.$$

In der Fig. 71 o sind die an dem Ring wirkenden Momente aufgetragen.

Der Ring erleidet bei dieser Inanspruchnahme eine Formänderung; er wird ungefähr, indem sich die Punkte 1 einander nähern, die Gestalt einer Ellipse annehmen.

Es wird also die Verschiebung in der Richtung der Querkraft X gesucht. Sie läßt sich, bei Betrachtung eines Ringviertels, herleiten aus

$$\delta = \int \frac{M_\varphi}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_\varphi}{\partial X} \cdot ds.$$

Bei der Rechnung wählt man zweckmäßig einen Ringteil, der die wenigsten Umstände macht. Das ist der untere Viertelbogen von 1 bis 3′.

$$\delta = \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E} \int_0^{\alpha_1} (1 - \cos\varphi) \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{X \cdot r^3}{J \cdot E} \int_0^{\alpha_1} \sin^2\varphi \cdot d\varphi$$
$$- \frac{M \cdot r^2}{J \cdot E} \int_0^{\alpha_1} \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{P \cdot r^3}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} (1 - \cos\alpha_1) \sin\varphi \cdot d\varphi$$
$$+ \frac{X \cdot r^3}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \sin^2\varphi \cdot d\varphi - \frac{M \cdot r^2}{J \cdot E} \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \sin\varphi \cdot d\varphi$$

oder

$$\delta = \frac{r^2}{4 \cdot J \cdot E} \{2 \cdot P \cdot r \cdot \sin^2\alpha_1 + X \cdot r \cdot \pi - 4 \cdot M\}$$

oder für X den früher gefundenen Wert eingesetzt (Gleichung 147)

$$\delta = \frac{r^2}{4 \cdot J \cdot E} \{2 \cdot P \cdot r \cdot \sin^2\alpha_2 - 4 \cdot M\} \quad (M \text{ nach Gleichung 148})$$

Die gesamte Verkürzung des wagerechten Ringdurchmessers ist

$$\delta_0 = 2 \cdot \delta.$$

Streng genommen erzeugen die Kräfte $2P$ in den Punkten 3 noch wagerechte in der Richtung $3 - 3$ liegende Komponenten V, weil die Kräfte $2P$ durch Rollen, die radial wirken, abgegeben werden. Dieser Umstand wurde, weil die Kräfte sehr nahe zusammen liegen, wegen seiner Bedeutungslosigkeit vernachlässigt. Man kann nun aber die radiale Richtung des Rollendruckes richtig einführen, und zwar so, indem man nachträglich den Einfluß der Komponenten V ermittelt und diesen Einfluß in die Formeln 147 und 148 einfügt.

Es ergeben sich dann folgende Werte

$$X = \frac{2P}{\pi}\left\{\cos^2 \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (147\,a)$$

und

$$M = \frac{2P \cdot r}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \sin \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2\right\} \quad . \quad . \quad (148\,a).$$

Achter Abschnitt.

Greifer und Tragorgane.

Beispiel 59. In der Fig. 72 ist ein Greifer einfachster Bauart dargestellt. Die Fig. 72 a zeigt diesen Greifer in etwas geöffnetem Zustande. Aus der Fig. 72 d ist die Rollenanordnung zu ersehen.

Es wird die in den Punkten *d* erzeugte Schließkraft *X* gesucht. Bei schwebendem Greifer hängt das gesamte Gewicht *Q* des Greifers mit Inhalt in den beiden Seilenden; in jedem Seilende also $\frac{Q}{2}$. Vernachlässigt man die geringen Seil- und Reibungswiderstände, dann wird jeder Seilstrang zwischen den Rollen mit der Kraft $\frac{Q}{2}$ angezogen. Bei der vorliegenden Rollenanordnung wirkt an dem Punkt *a* nach unten ziehend die Kraft

$$Z_1 = 6 \cdot \frac{Q}{2} = 3 \cdot Q,$$

während der Punkt *b* mit der Kraft

$$Z_2 = 8 \cdot \frac{Q}{2} = 4 \cdot Q$$

nach oben gezogen wird. Die Differenz beider Anspannungen ist natürlich *Q*.

Dieses Gesamtgewicht *Q* ist auf die drei Punkte *b*, *c* und *c* zu verteilen.

Die bei dem vorstehenden Belastungs- und Anspannungszustande entstehende Schließkraft *X* läßt sich am einfachsten auf graphischem Wege ermitteln.

Vergleiche die Kräftepläne Fig. 72 b und 72 c.

Zu Fig. 72 b. Man beginnt mit der Kräftezerlegung im Punkte *a*, wo der Zug Z_1 angreift, der die Spannkräfte $-S$ in den Hängestangen liefert. Die Richtung von *S* wird im Punkte *c* beeinflußt

durch das Gewicht Q_1; es ergibt sich die Größe und Richtung von S'. Diese liefert sodann mit dem Schnittpunkt o, das ist ihr Treffpunkt mit der wagerecht gerichteten Schließkraft X, die Richtung K des Gelenkdruckes im Punkte b. Im Kräfteplan wird dann durch Zerlegung von S' nach K und X die Größe der Schließkraft gefunden.

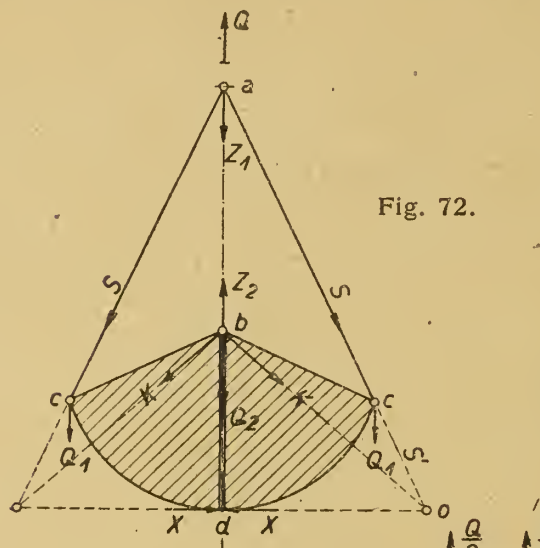


Fig. 72.

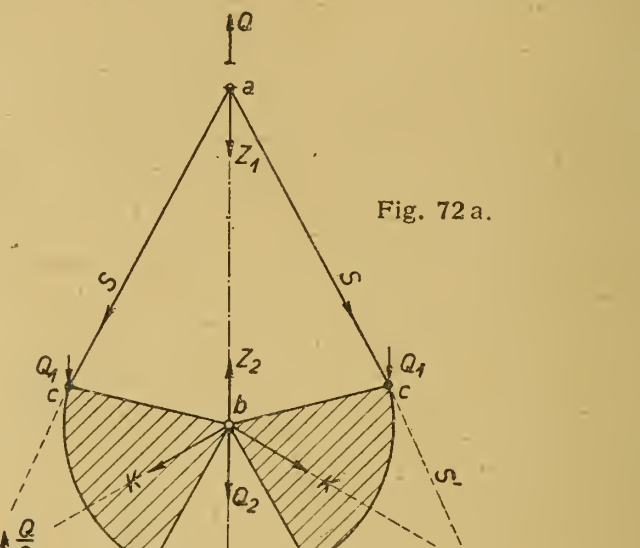


Fig. 72a.

Fig. 72d.

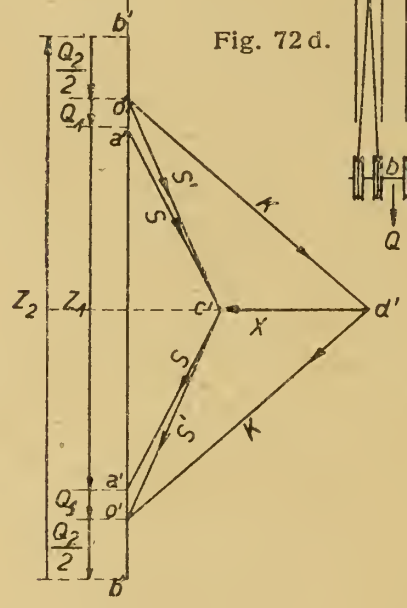


Fig. 72b.

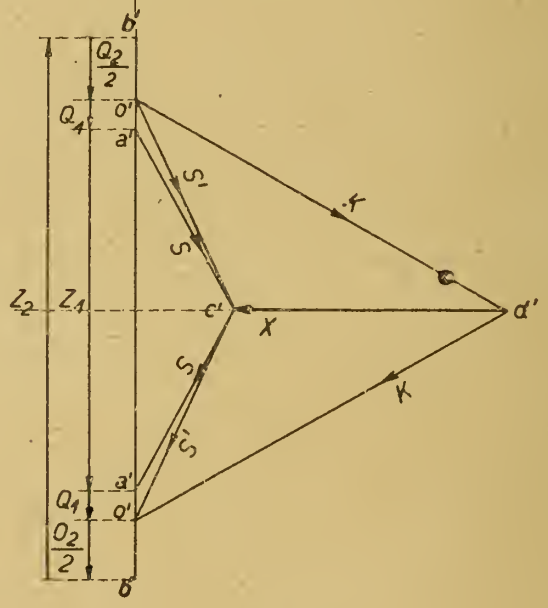


Fig. 72c.

Zu Fig. 72c. Die Entwicklung des Kräfteplanes zur Auffindung der Schließkraft X für den etwas geöffneten Greifer ist dieselbe wie vorher.

Man sieht, daß dieser Greifer im geöffneten Zustande eine größere Schließkraft besitzt als im geschlossenen Zustande. Eine solche Wirkungsweise ist aber nicht zweckmäßig; der Vorgang des Greifens bedingt vielmehr, daß die Schließkraft zunimmt und bei geschlossenem Maul am größten wird.

Beispiel 60. Ein Greifer nach Fig. 73. Das Eigengewicht des Greifers mit dem jeweiligen Inhalt ist wieder Q. Die Zugkräfte der Seilstränge zwischen den Punkten a und b betragen wie früher Z_1 und Z_2. Es ist wieder $Z_2 - Z_1 = Q$. Man verteile das Eigengewicht auf die Punkte b, c und c.

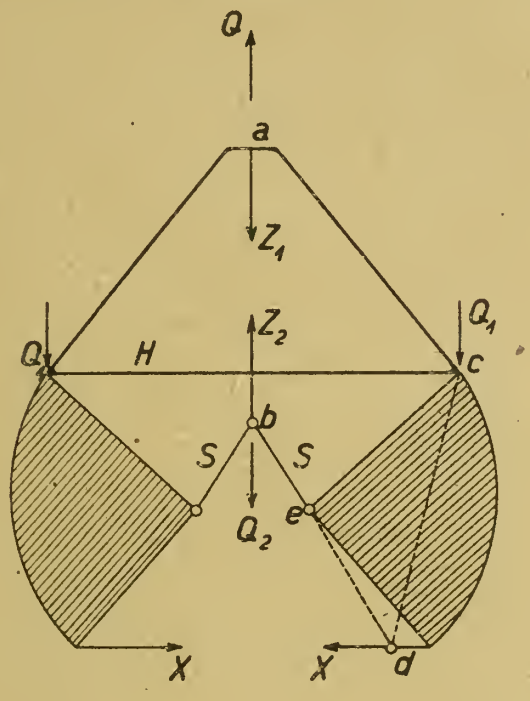


Fig. 73.

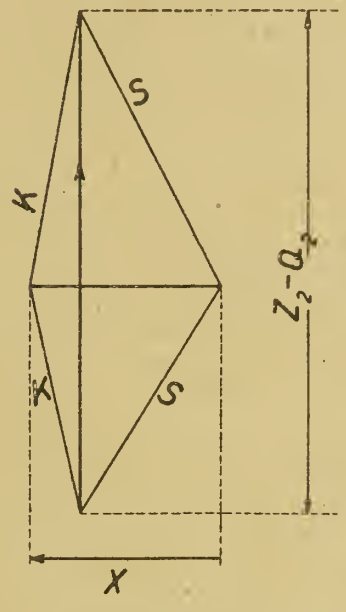


Fig. 73a.

Der Ausgangspunkt der Kräftezerlegung ist der Punkt b. Hier greift nach oben gerichtet der Zug $Z_2 - Q_2$ an. Der Plan Fig. 73 a zeigt die Auffindung der Spannkräfte S. Der Schnittpunkt d der Richtung S mit der wagerecht gerichteten Schließkraft gibt die Richtung des Widerlagerdruckes K in dem Punkte c an. Hiernach liefert der Plan ohne weiteres die gesuchte Schließkraft X. Im weiteren ergibt der Plan auch die Kräfte, von denen der obere feste Rahmen angegriffen wird.

Beispiel 61. Ein Greifer nach Fig. 74. Auch hier beträgt das Gewicht des Greifers mit Inhalt Q. Das Gewicht wird ungefähr auf die drei Punkte b, d und d verteilt. Die Zugkräfte zwischen den Punkten a und b sind wie immer Z_1 und Z_2. Es ist $Z_2 - Z_1 = Q$.

Man geht bei der Kräftezerlegung zweckmäßig vom Punkte a aus.

Fig. 74 b. Ermittelung der Schließkraft X bei geschlossenem Greifer. Der Zug Z_1 zerlegt sich in die beiden Stabkomponenten S. Im Gelenk c können nur zwei wagerechte entgegengesetzt gerichtete Kräfte H auftreten. Durch die Richtung von H und die Richtung

von S ist der Schnittpunkt o gegeben. Durch Verbindung dieses Punktes mit dem Punkte d ergibt sich die Richtung des Widerlagerdruckes K im Punkte d. Dieser Widerlagerdruck K erfährt durch die Eigengewichtslast Q_1 eine geringe Wendung nach der Richtung $d - o_1$. Der Schnittpunkt o_1 ist der Treffpunkt dieser Richtung mit der wagerecht liegenden Schließkraft X. Verbindet man diesen

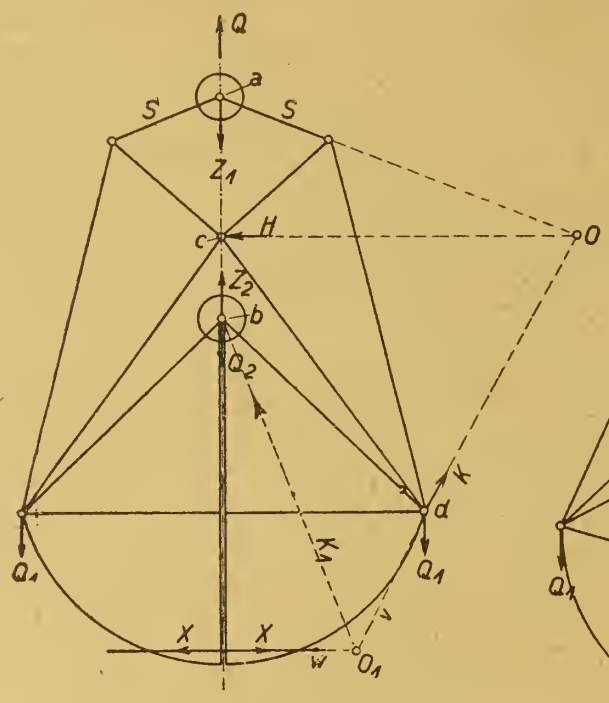


Fig. 74.

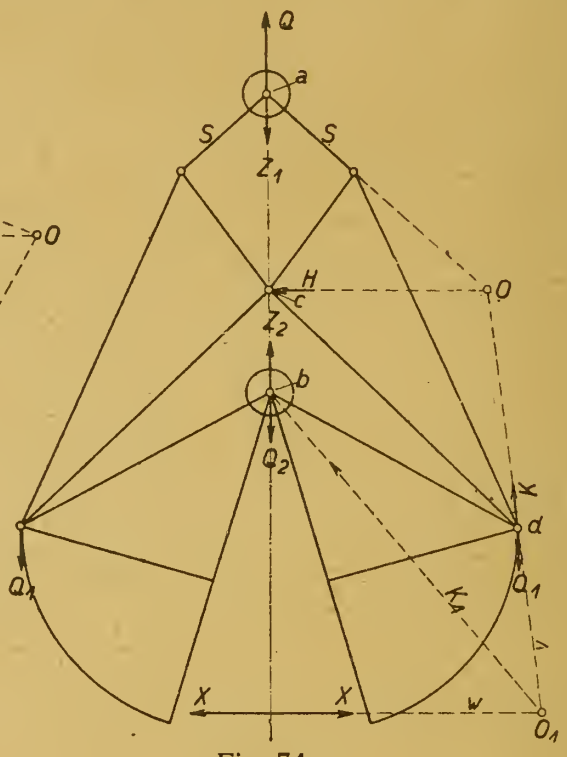


Fig. 74a.

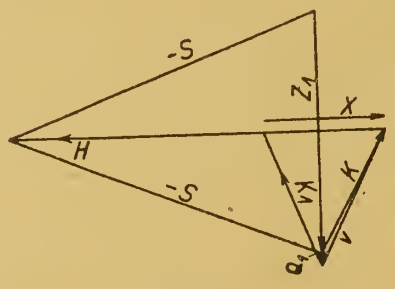


Fig. 74b.

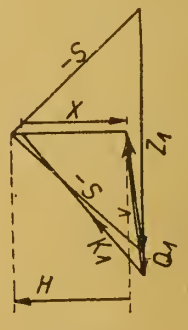


Fig. 74c.

Punkt mit dem Punkt b, dann erhält man die Richtung des Widerlagerdruckes K_1 in dem Punkte b. Nach vorstehendem entwickelt sich von selbst die weitere Kräftezerlegung und die Auffindung der Schließkraft X.

Fig. 74c. Ermittelung der Schließkraft X bei etwas geöffnetem Greifer. (Vergleiche auch Fig. 74 a.) Der Kräfteplan entwickelt sich ähnlich wie vorher.

Ein Vergleich der hier gefundenen Schließkraft X mit der zuerst ermittelten zeigt, daß der Greifer eine gute Eigenschaft hat, indem

seine Schließkraft mit abnehmender Maulweite zunimmt und am größten wird, wenn er ganz geschlossen ist. Dieser Greifer besitzt ein Patent.

Beispiel 62. Ein Greifer nach Fig. 75. In der Fig. 75 d ist die prinzipielle Rollenanordnung angedeutet. Die Kräftepläne Fig. 75 b und 75 c geben Aufschluß über die Ermittelung der Schließkräfte X bei geschlossenem und etwas geöffnetem Greifer.

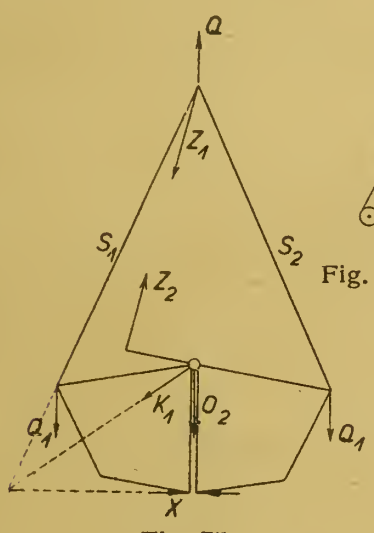


Fig. 75.

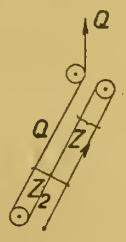


Fig. 75 d.

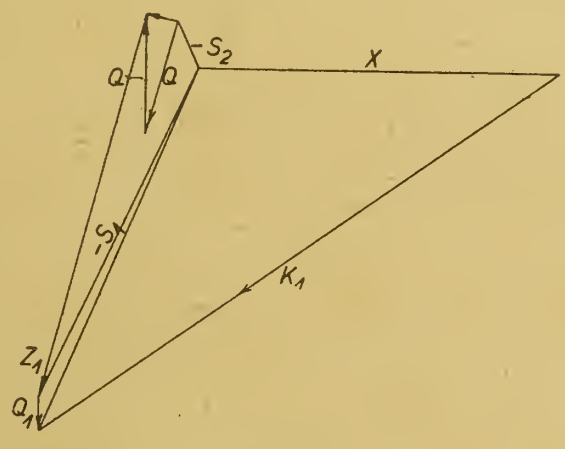


Fig. 75 b.

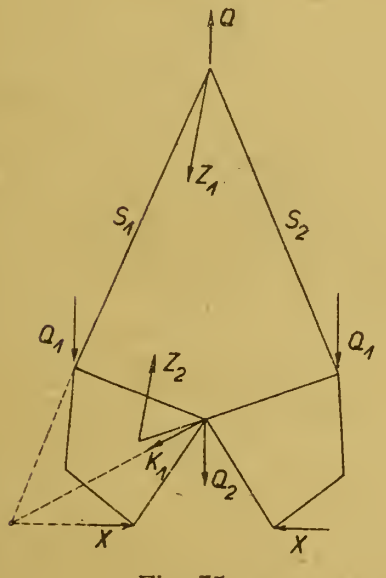


Fig. 75 a.

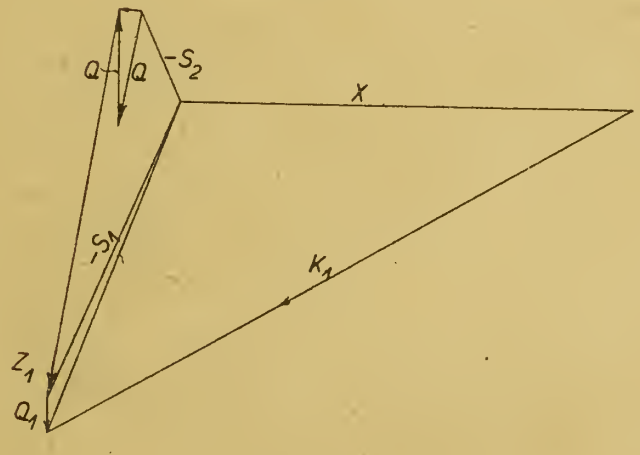


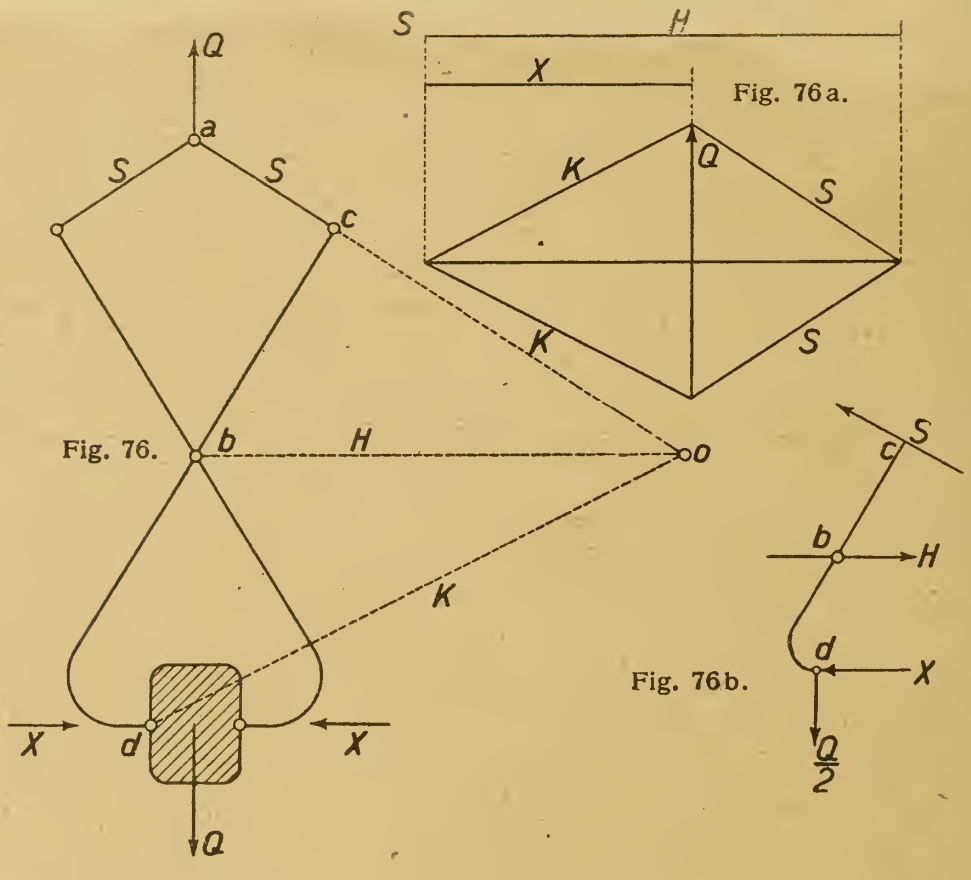
Fig. 75 c.

Beispiel 63. Eine Knüppelzange nach Fig. 76. Das Gewicht des gefaßten und gehobenen Erzblockes ist Q. Der Ausgangspunkt des Kräfteplanes zur Auffindung der Zangenschließkraft X ist der Punkt a. Der Plan bedarf keiner weiteren Erläuterung. In der Fig. 76 b ist der Zangenhebel mit den angreifenden Kräften noch einmal herausgezeichnet.

Beispiel 64. Ein Schakel nach Fig. 77. Eine genaue Berechnung dieses sehr gedrungenen, geschlossenen Stabgebildes ist nicht möglich. Eine angefähre Lösung kann wie folgt erzielt werden. Man führe das Schwerlinienviereck ein (Fig. 77a). In der Spitze oben entstehen zwei statisch unbestimmte Größen X und M, die sich bei Vernachlässigung des Einflusses der Längenänderung der Stäbe mit Hilfe der Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M} \cdot dx$$

ermitteln lassen.



Die Schräge.

$$M_x = -\frac{P}{2} \cdot x + X \cdot \frac{h}{a} \cdot x - M, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{h}{a} \cdot x,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M} = -1.$$

Nach X)

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^a \left\{ -\frac{P}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot x^2 + X \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot x^2 - M \cdot \frac{h}{a} \cdot x \right\} dx$$

$$= -\frac{P \cdot a^2 \cdot h}{6 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{X \cdot a \cdot h^2}{3 \cdot J_1 \cdot E} - \frac{M \cdot a \cdot h}{2 \cdot J_1 \cdot E} \qquad \text{(nach } X\text{)}$$

Nach M)

$$\frac{1}{J_1 E}\int_0^a \left\{+\frac{P}{2}\cdot x - X\cdot\frac{h}{2}\cdot x + M\right\} dx$$

$$= \frac{P\cdot a^2}{4\cdot J_1 E} - \frac{X\cdot a\cdot h}{2\cdot J_1\cdot E} + \frac{M\cdot a}{J_1\cdot E} \qquad \text{(nach } M\text{)}$$

Die Waagerechte

$$M_x = -\frac{P}{2}\cdot x + X\cdot h - M, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = h, \quad \frac{\partial M_x}{\partial M} = -1.$$

Nach X)

$$\frac{1}{J_2\cdot E}\int_0^a \left\{-\frac{P\cdot h\cdot x}{2} + X\cdot h^2 - M\cdot h\right\} dx$$

$$= -\frac{P\cdot a^2\cdot h}{4\cdot J_2\cdot E} + \frac{X\cdot a\cdot h^2}{J_2\cdot E} - \frac{M\cdot a\cdot h}{J_2\cdot E} \quad \text{(nach } X\text{)}$$

Nach M)

$$\frac{1}{J_2\cdot E}\int_0^a \left\{-\frac{P\cdot x}{2} - X\cdot h + M\right\} dx$$

$$= \frac{P\cdot a^2}{4\cdot J_2\cdot E} - \frac{X\cdot a\cdot h}{J_2\cdot E} + \frac{M\cdot a}{J_2\cdot E} \qquad \text{(nach } M\text{)}$$

Zusammenfassung:

Nach X)

$$\frac{X\cdot a\cdot h^2}{3\cdot J_1} + \frac{X\cdot a\cdot h^2}{J_2} - \frac{M\cdot a\cdot h}{2\cdot J_1} - \frac{M\cdot a\cdot h}{J_2} = \frac{P\cdot a^2\cdot h}{6\cdot J_1} + \frac{P\cdot a^2\cdot h}{4\cdot J_2}.$$

Nach M)

$$\frac{X\cdot a\cdot h}{2\cdot J_1} + \frac{X\cdot a\cdot h}{J_2} - \frac{M\cdot a}{J_1} - \frac{M\cdot a}{J_2} = \frac{P\cdot a^2}{4\cdot J_1} + \frac{P\cdot a^2}{4\cdot J_2}.$$

oder

$$X\cdot h\left(\frac{J_2}{3\cdot J_1}+1\right) - M\cdot\left(\frac{J_2}{2\cdot J_1}+1\right) = \frac{P\cdot a}{4}\left(\frac{2\cdot J_2}{3\cdot J_1}+1\right) \qquad (149)$$

und

$$X\cdot h\left(\frac{J_2}{2\cdot J_1}+1\right) - M\left(\frac{J_2}{J_1}+1\right) = \frac{P\cdot a}{4}\left(\frac{J_2}{J_1}+1\right) \qquad (149\text{a})$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich bei Einführung der Zahlenwerte eines gegebenen Falles leicht nach X und M auflösen.

Bei Ermittelung der Beanspruchung sind außer den Momenten die Normalkräfte N einzusetzen.

Querschnitt in der Nähe a.

$$M = -M,$$

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{s_1} + X \cdot \frac{a}{s_1}.$$

Querschnitt der Schrägen in der Nähe b.

$$M = -\frac{P \cdot a}{2} + X \cdot h - M,$$

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{s_1} + X \cdot \frac{a}{s_1}.$$

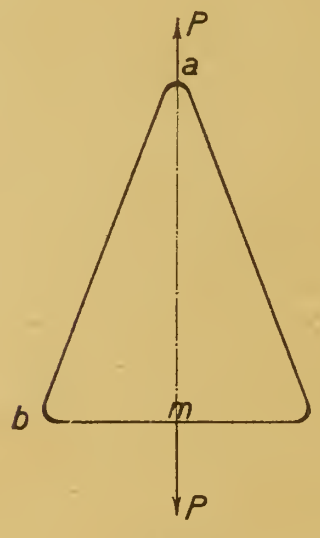


Fig. 77.

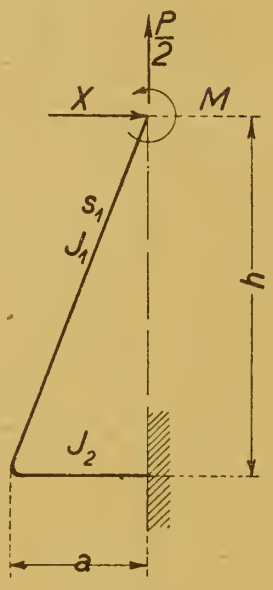


Fig. 77a.

Querschnitt der Wagerechten in der Nähe b.

$$M = -\frac{P \cdot a}{2} + X \cdot h - M,$$

$$N = X.$$

Querschnitt bei m.

$$M = X \cdot h - M,$$

$$N = X.$$

Die Beanspruchung eines Querschnittes ist

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F}.$$

Der verschwindend geringe Einfluß des Momentes M auf die Normalkräfte kann vernachlässigt werden.

Vielfach sind die beiden Schrägen oben nicht steif miteinander verbunden, sondern sie hängen in einem gemeinschaftlichen Bolzen. Dann fällt das Moment M fort und es entsteht nur der Schub X. Diese Größe liefert die Gleichung 149 zu

$$X = \frac{P \cdot a}{4} \cdot \frac{2 \cdot J_2 + 3 \cdot J_1}{J_2 + 3 \cdot J_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Die Momente und Normalkräfte für die verschiedenen Querschnitte lassen sich in ähnlicher Weise wie oben leicht aufstellen.

Querschnitt in der Nähe a.

$$M = 0,$$

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{s_1} + X \cdot \frac{a}{s_1}.$$

Querschnitt der Schrägen in der Nähe b.

$$M = -\frac{P \cdot a}{2} + X \cdot h,$$

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{s_1} + X \cdot \frac{a}{s_1}.$$

Querschnitt der Wagerechten in der Nähe b.

$$M = -\frac{P \cdot a}{2} + X \cdot h.$$

$$N = X.$$

Querschnitt bei m.

$$M = X \cdot h,$$

$$N = X.$$

Neunter Abschnitt.

Fördergerüste und Schrägbrücken.

Beispiel 65. Die in den Fig. 78 und 78 a veranschaulichten Fälle stellen den Kern der Aufgaben über Fördergerüste dar.

Zu Fig. 78. Das aufgehende oder Führungsgerüst der Körbe ist im Punkte *c* als eingespannt anzusehen. Der Seilscheibenträger *b*—*d* kann wegen seiner kurzen Länge und wegen seiner schweren Konstruktion als starr angenommen werden. Eine weitere Voraussetzung soll sein, daß die schräge Strebe nur Normalkräfte also keine Momente aufnimmt.

R ist die Mittelkraft aus den beiden Seilzügen *S* und liegt in der Winkelhalbierenden der Seilrichtungen. Wegen der vorausgesetzten vollkommenen Starrheit des Seilscheibenträgers ist die Aufgabe statisch bestimmbar. Da die Strebe nur Normalkräfte aufnimmt, so liefert diese Bedingung einen Schnittpunkt 0 der Mittelkraft *R* mit der Strebenachse. Durch diesen Punkt 0 geht die Richtung *K* des Auflagerdruckes *K* am Fuße *c* des festen oder aufgehenden Gerüstes. In dem Plan Fig. 78 b sind der Strebendruck *D* und der Auflagerdruck *K* ermittelt. Hiernach sind außer den gewöhnlichen Systemspannkräften oder Normalkräften auch die Momente für das aufgehende Gerüst gegeben.

Am Fuße *c*

$$M_c = 0.$$

In der Ecke *d*

$$M_d = D \cdot d - R \cdot r.$$

Die Momente nehmen von Null in geradlinig nach oben zu.

Man wählt die Verhältnisse meistens so, daß die Mittelkraft *R* aus den beiden Seilzügen genau in der Strebenachse liegt. Dann fallen die ungünstigen Momente für das aufgehende Gerüst ganz fort und

das statische Gleichgewicht wird allein durch die Stützkraft D der Strebe erhalten.

Zu Fig. 78 a. Die Seilscheibe liegt in diesem Falle tiefer auf einem besonderen Träger d—m. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die Schrägstrebe nur Normalkräfte aufnimmt. Dies bedingt eine

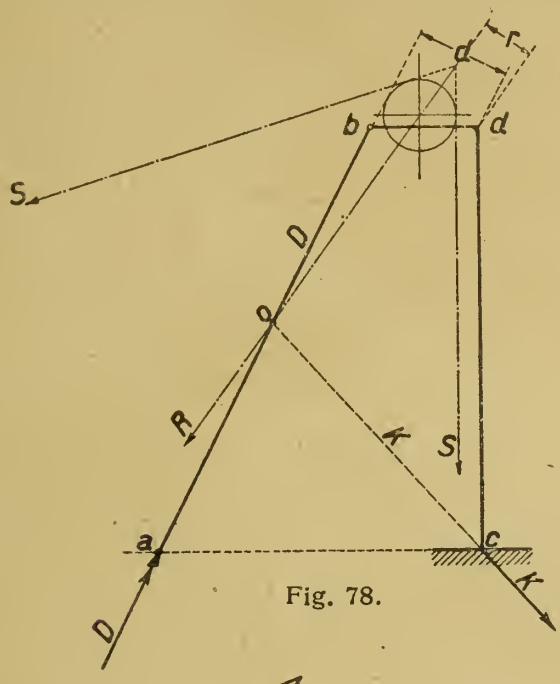


Fig. 78.

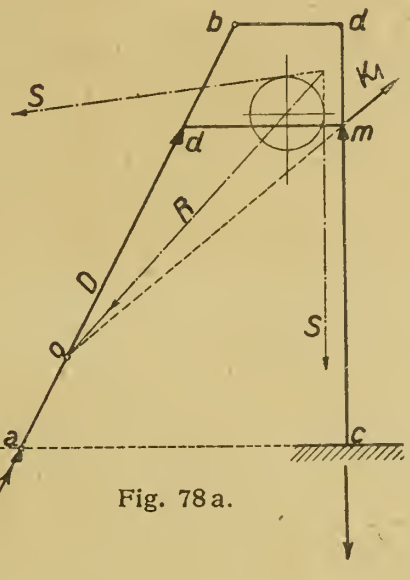


Fig. 78a.

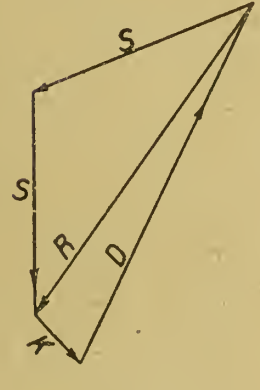


Fig. 78b.

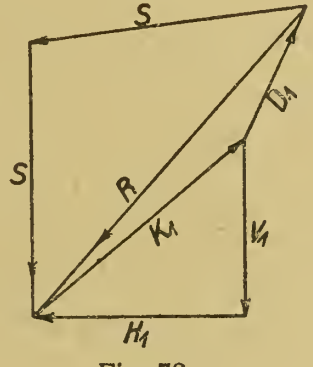


Fig. 78c.

entsprechende senkrecht zur Strebenachse bewegliche Lagerung des Trägerendes d. Eine Anordnung, die sich leicht treffen läßt, weil die fragliche Lagerung d keine unmittelbare ist, sondern zunächst durch einen zwischen den beiden Strebenbeinen hängenden Träger erfolgt. Dieser Träger kann in der bezeichneten Richtung elastisch nachgiebig ausgebildet werden.

R ist wieder die Mittelkraft aus den beiden Seilzügen S. Wegen der obigen Voraussetzung, daß die Lagerung d nur einen Druck in Richtung der Strebenachse abgibt, erhält man wieder den Schnittpunkt o der Mittelkraft R mit der Strebenachse, der in Verbindung mit dem Punkte m die Richtung des Widerlagerdruckes K_1 angibt.

In dem Plan Fig. 78 c sind der Strebendruck D_1 sowie die Lagerkraft K_1 ermittelt. Die senkrechte Komponente V_1 von K_1 geht unmittelbar durch das aufgehende Gerüst, während die Wirkung der wagerechten Komponente H_1 sich über das ganze Gerüst erstreckt (vgl. Fig. 78 d).

Diese Aufgabe kann angenähert wie folgt auf graphischem Wege gelöst werden. Als statisch unbestimmte Größe führt man den Strebendruck D_1' ein. Man denke sich die Strebe beseitigt und an ihrer Stelle die Kraft $D_1' = -1$ angebracht. Diese Belastung erzeugt an dem aufgehenden Gerüst die in der Fig. 78 e angezeigten Momente. (Diese Momente entsprechen der Form des Systems Fig. 78 d.) Sie rufen eine Verbiegung des aufgehenden Gerüstes hervor, die sich ergibt,

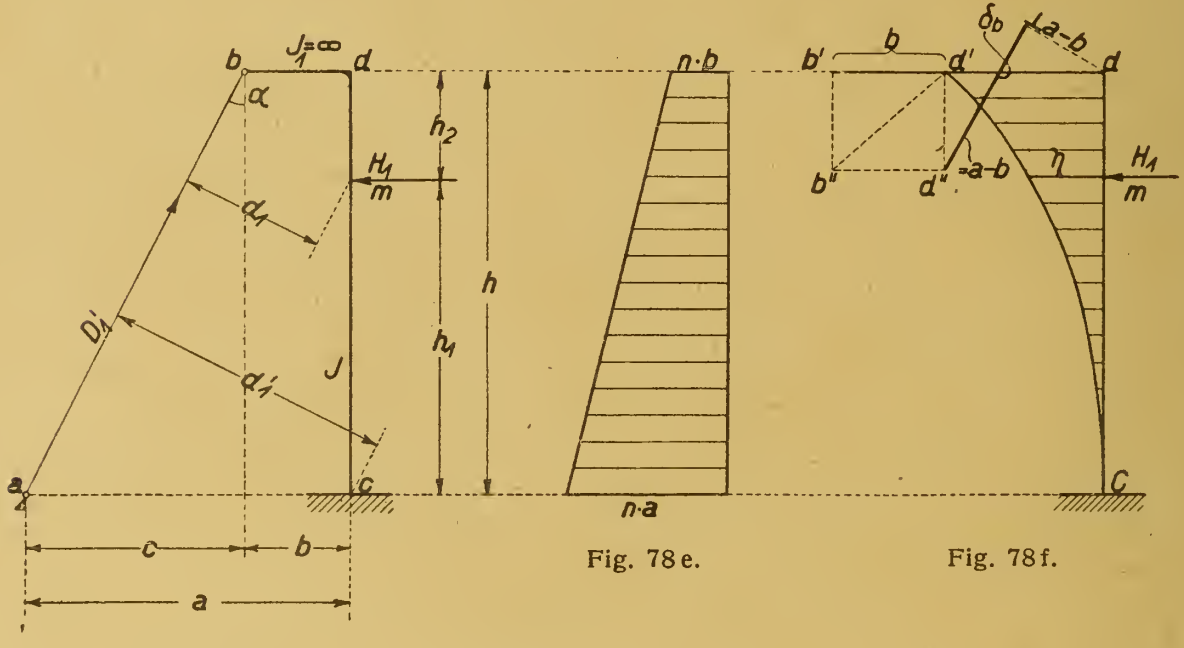


Fig. 78 d. Fig. 78 e. Fig. 78 f.

wenn man die Momente als Belastung wirken läßt und zu dieser Belastung das Seilpolygon zeichnet: Linie c—d', Fig. 78 f. Zugleich rückt der Stützpunkt b der Strebe aus seiner Lage. Wir ermitteln seine Verschiebung δ_b in Richtung der Strebe (siehe Fig. 78 f). Es handelt sich hier um einen einfachen Verschiebungsplan. Die Linie b''—d' steht senkrecht zur Tangente im Endpunkte der Biegungslinie. Im übrigen gibt die Figur allen weiteren Aufschluß über die Auffindung von δ_b.

Bezeichnet η die Ordinate der Biegungslinie gemessen bei H_1, dann beträgt der Strebendruck

$$D_1' = H_1 \cdot \frac{\eta}{\delta_b}.$$

Hiernach sind die an dem aufgehenden Gerüst wirkenden Momente bekannt.

Im Punkte m.

$$M_m = D_1' \cdot d_1.$$

Am Fuße

$$M_c = D_1' \cdot d_1' - H_1 \cdot h_1.$$

Die Normalkraft der Strebe für die Strecke $b - d$ ist

$$N = D_1',$$

für die Strecke a—d

$$N = D_1' + D_1.$$

Auch das aufgehende Gerüst erhält Normalkräfte. Für den oberen Teil d—m ist

$$N = D_1' \cdot \cos \alpha \text{ (Zug)},$$

für den Teil c—m

$$N = V_1 - D_1' \cos \alpha.$$

Die Beziehung

$$D = P \cdot \frac{\eta}{\delta_b}$$

kann auch zur Berechnung des Strebendruckes dienen, wenn das aufgehende Gerüste von einer gleichmäßig verteilten Windbelastung angegriffen wird. Bezeichnen F die Fläche der Einflußlinie und p die Windbelastung pro Längeneinheit, dann ist

$$D_w = p \cdot \frac{F}{\delta_b}.$$

Die vorstehende graphische Lösung hat ein unveränderliches Trägheitsmoment des aufgehenden Gerüstes zur Voraussetzung. Ferner wurde der geringe Einfluß aller Formänderungen aus Längs- oder Normalkräften vernachlässigt. Wenngleich eine genauere Berechnung meistens nicht notwendig erscheint, so kann man jedoch gegebenenfalls eine solche ohne größere Schwierigkeit durchführen. Man ermittelt die Stabspannkräfte des ganzen Gerüstes bei der Belastung $D_1 = -1$, berechnet die Längenänderung sämtlicher Stäbe nach

$$\Delta = \frac{S \cdot s}{F \cdot E}$$

und zeichnet einen Williotschen Verschiebungsplan. Dieser liefert dann die genauere Biegungslinie und den einwandfreien Wert δ_b.

Die statische Untersuchung der Strebe.

Infolge ihrer schrägen Lage und ihrer großen Länge wird die Strebe aus dem Eigengewicht eine merkliche Durchbiegung erfahren, so daß es nicht angängig ist, sie nach den gebräuchlichen Knickformeln zu berechnen.

Für die folgende Untersuchung ist die Kenntnis der Knickkraft R des Stabes erforderlich. Handelt es sich um einen vollwandigen Querschnitt mit dem Trägheitsmoment J, dann ist nach Euler

$$R = \frac{\pi^2 \cdot J \cdot E}{l^2}.$$

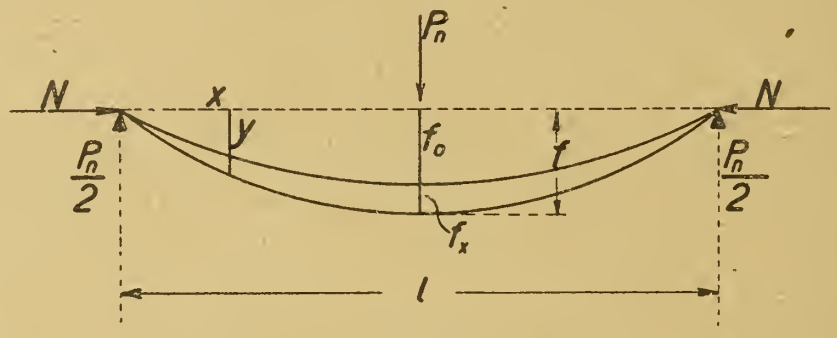


Fig. 78g.

Meistens jedoch besteht die Strebe aus zwei parallelen oder etwas schräg nach der Mitte zu auseinandergehenden untereinander vergitterten Rippen. Es leuchtet ein, daß die Berechnung der Knickkraft bei Einführung des Trägheitsmomentes der beiden Rippen ($J = 2 \cdot F \cdot r^2$) einen falschen, zu großen Wert ergibt, daß vielmehr die Vergitterung, da sie die Rippen nur stellenweise verbindet, die obige Knickkraft erheblich herabmindert. Belastet man den an den Enden aufgelagerten Stab in der Mitte mit der Last $Q = 1$ und berechnet die Durchbiegung f_1 an dieser Stelle, dann ist

$$R = \sim 0{,}2 \cdot \frac{l}{f_1} \cdot 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Bei dem vorliegenden Fall erfolgt die Berechnung von f_1 am besten so, indem man die Spannkräfte S_1 des Netzwerkes ermittelt, sodann die Längenänderung sämtlicher Stäbe nach

$$\Delta = \frac{S_1 \cdot s}{F \cdot E}$$

bestimmt und dann einen Williotschen Verschiebungsplan zeichnet. Oder man ermittelt noch einfacher den Wert

$$\frac{S_1^2 \cdot s}{F \quad E}$$

für jeden Stab und schreibt

$$f_1 = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Jedenfalls beträgt die Knickkraft dann wie oben angegeben

$$R = \sim 0{,}2 \cdot \frac{l}{f_1} \cdot 1.$$

Jetzt ist festzustellen, welchen Einfluß die Druckkraft N auf die Verbiegung f_0 des Stabes aus dem Eigengewicht hat. Nach der Winkelbezeichnung α der Fig. 78 d ist

$$f_0 = \frac{5 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot J \cdot E} \cdot \sin \alpha.$$

Die Druckkraft N wird die vorhandene Durchbiegung f_0 vergrößern auf das Maß f. Man belaste nach der Fig. 78 g den Stab in der Mitte mit der provisorischen Last P_n. Bei der Annahme, daß die Biegungslinie nach einer Sinuslinie verläuft, ist

$$M_x = N \cdot f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} + P_n \cdot \frac{x}{2}.$$

Weiter können wir schreiben

$$f_x = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot dx.$$

Nach oben ist

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n} = \frac{x}{2}$$

und wegen $P_n = o$ folgt

$$f_x = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N \cdot f \cdot x}{2 \cdot J \cdot E} \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} \cdot dx$$

$$= \frac{N \cdot f \cdot l^2}{\pi^2 \cdot J \cdot E}$$

oder weil

$$R = \frac{\pi^2 \cdot J \cdot E}{l^2},$$

$$f_x = \frac{N}{R} \cdot f.$$

Nun ist

$$f = f_0 + f_x = f_0 + \frac{N}{R} \cdot f$$

Hieraus ergibt sich

$$f = \frac{R}{R - N} \cdot f_0 \cdot \quad \ldots \ldots \quad (152)$$

Nunmehr hat man die Materialbeanspruchung des Stabes zu ermitteln. Es ist

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$

Das Moment beträgt

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} \sin \alpha + N \cdot f.$$

Beispiel 66. Ein Fördergerüst nach Fig. 79. Die Anlage ist für Köpeförderung eingerichtet.

Belastungsgrundlagen:

Ein zweietag. Förderkorb für

4 Wagen mit Zwischengeschirr	4500 kg
4 leere Förderwagen	1400 »
4 Ladungen	3000 »
1 Förderseil	7000 »
1 Unterseil	6200 »
1 Seilscheibe mit Achse und Lagern . . .	6000 »
Die Bruchbelastung des Seiles ist . . .	130 000 kg
Winddruck	150 kg/m²

Beanspruchungen:

Bei normaler Förderung	$\sigma = 1200$ kg/cm²
Bei Seilbruch	$\sigma = 1600$ kg/cm²

Die Fig. 79 läßt die statische Wirkungsweise des Gerüstes erkennen. Das aufgehende oder Führungsgerüst der Körbe beteiligt sich nur in geringem Maße an der Aufnahme von Kräften oder Lasten und dient hauptsächlich nur zur Führung der Körbe, während das vorgesetzte Strebengerüst als eigentliches Trag- und Stützorgan anzusehen ist. Es würde zu weit führen, wollte man hier nähere Einzelheiten, insbesondere die statische Sachlage der Seilscheibenlagerung zergliedern; es dürfte genügen, an diesem Beispiel diejenigen Vorgänge zu verfolgen, die die Konstruktion im wesentlichen in Anspruch nehmen.

Für die größte Inanspruchnahme des Strebengerüstes kommt die Bruchbelastung eines der beiden Seile in Betracht, wenn zugleich

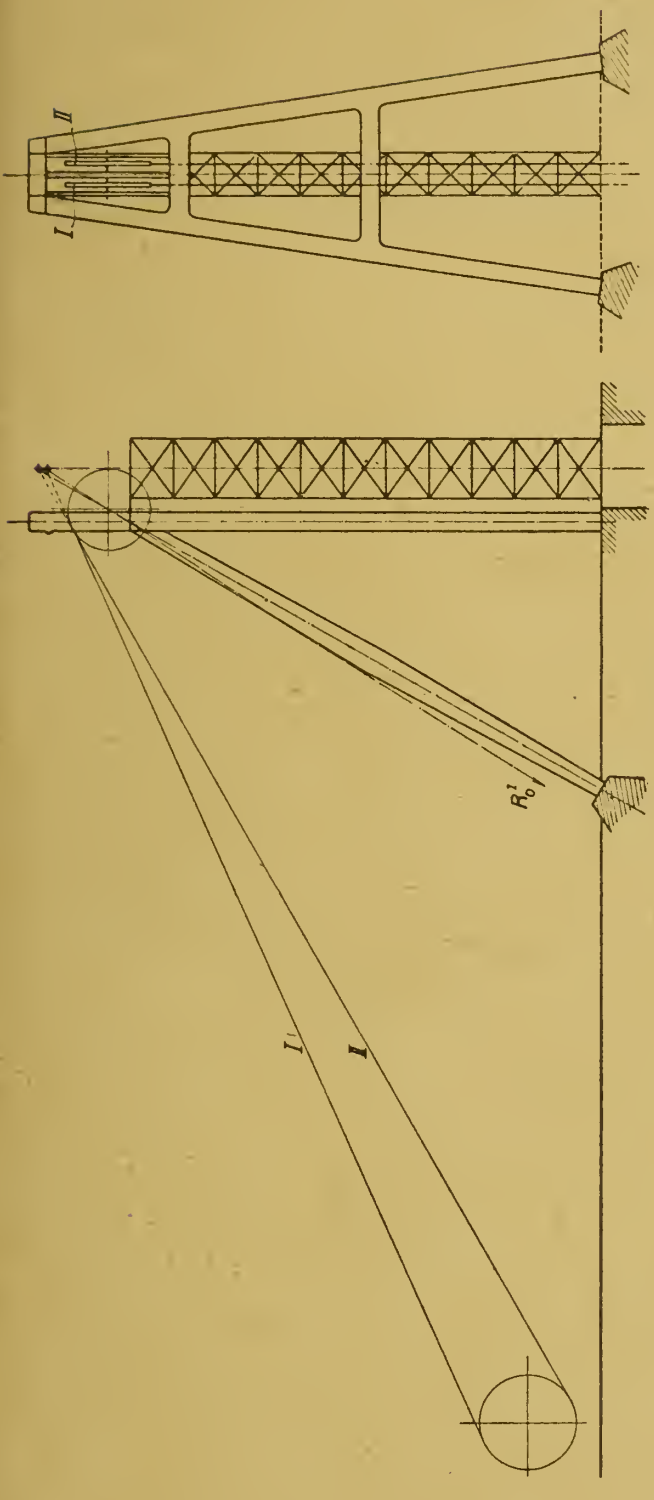


Fig. 79.

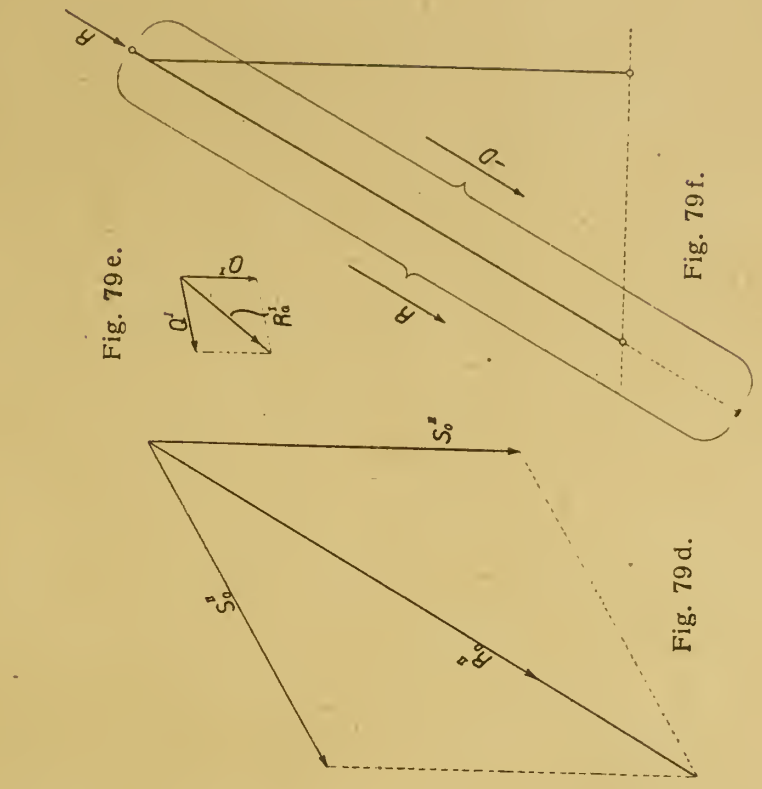


Fig. 79e.

Fig. 79f.

Fig. 79d.

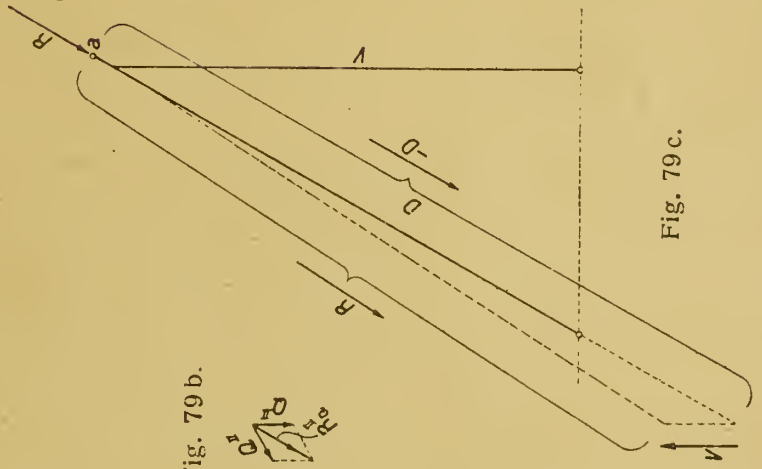


Fig. 79c.

Fig. 79b.

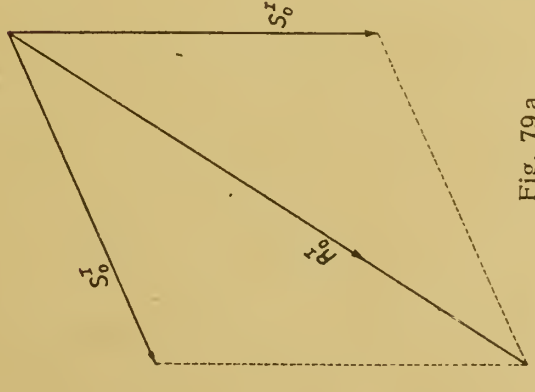


Fig. 79a.

an dem anderen Seil ein beladener Förderkorb hängt. Das Gewicht eines beladenen Förderkorbes mit daranhängendem Unterseil beträgt

nach früherem . . . . . $Q = 15\,100$ kg
Die Bruchbelastung des Seiles war . $S_0 = 130\,000$ kg

1. Annahme:

Bruch des Seiles I.

Belastung durch Förderung Q des Seiles II.

In den Plänen Fig. 79 a und 79 b sind die Resultierenden aus den Seilzügen $S_0^{\,I}$ und Q^{II} ermittelt. Der Plan Fig. 79 c zeigt die Zusammensetzung der beiden Resultierenden zu der Mittelkraft R.

In dem Plan wurde diese Mittelkraft R in die Schräge und die Vertikale des Stützgerüstes zerlegt. Hierbei ergibt sich, daß die vertikale Stütze einen Zug V erhält. Die Druckkraft der Strebe ist D.

2. Annahme:

Bruch des Seiles II.

Belastung durch Förderung Q des Seiles I.

Siehe die graphischen Ermittelungen der Pläne Fig. 79 d, e und f. Der Vergleich zeigt, daß der Belastungsfall 1 für das Strebengerüst am ungünstigsten ist. Hierbei darf nicht übersehen werden, daß infolge der Höherlegung des Seilscheibenmittelpunktes a aus dem System des Gerüstes in diesem Falle zwar verschwindend geringe, unter Umständen aber erhebliche Biegungsmomente auftreten können.

Die Vereinigung der Resultierenden R_0 und R_Q zu der Mittelkraft R ist zwar nicht genau, darf jedoch wegen der sehr nahe zusammenliegenden Seilscheiben vorgenommen werden. Sodann wurde diese Mittelkraft R der Einfachheit halber in der Mitte der beiden Strebenbeine angreifend gedacht; in Wirklichkeit liegt sie etwas einseitig und erzeugt Verdrehungen an dem ganzen Gerüst.

In der Vorderansicht zeigt sich das Strebengerüst infolge der Querverbindungen als ein portal- oder rahmenartiges Gebilde. Ein ähnliches Portal wurde unter Beispiel 52 näher untersucht, und dürften die dortigen Ausführungen einen Anhalt für die Berechnungen der vorliegenden Aufgabe geben. In Frage kommen hierbei Seitenbelastungen durch Wind und Seilschwanken.

Beispiel 67. Eine Schrägbrücke nach Fig. 80. Die senkrechte; am Obergurt hängende, wandernde Last sei P. Sie zerlegt sich in zwei Komponenten, V senkrecht zum Träger und H in Richtung desselben.

$$V = P \cdot \cos \alpha \text{ und } H = P \cdot \sin \alpha.$$

Die gewöhnlichen Auflagerdrucke des Trägers sind

$$A_a = P \cdot \frac{x'}{l} \text{ und } A_b = P \cdot \frac{x}{l}.$$

Auch diese geben entsprechende Komponenten, senkrecht und parallel zum Träger ab

$$V_a = A_a \cdot \cos\alpha \text{ und } V_b = A_b \cdot \cos\alpha,$$

ferner

$$H_a = A_a \cdot \sin\alpha \text{ und } H_b = A_b \cdot \sin\alpha.$$

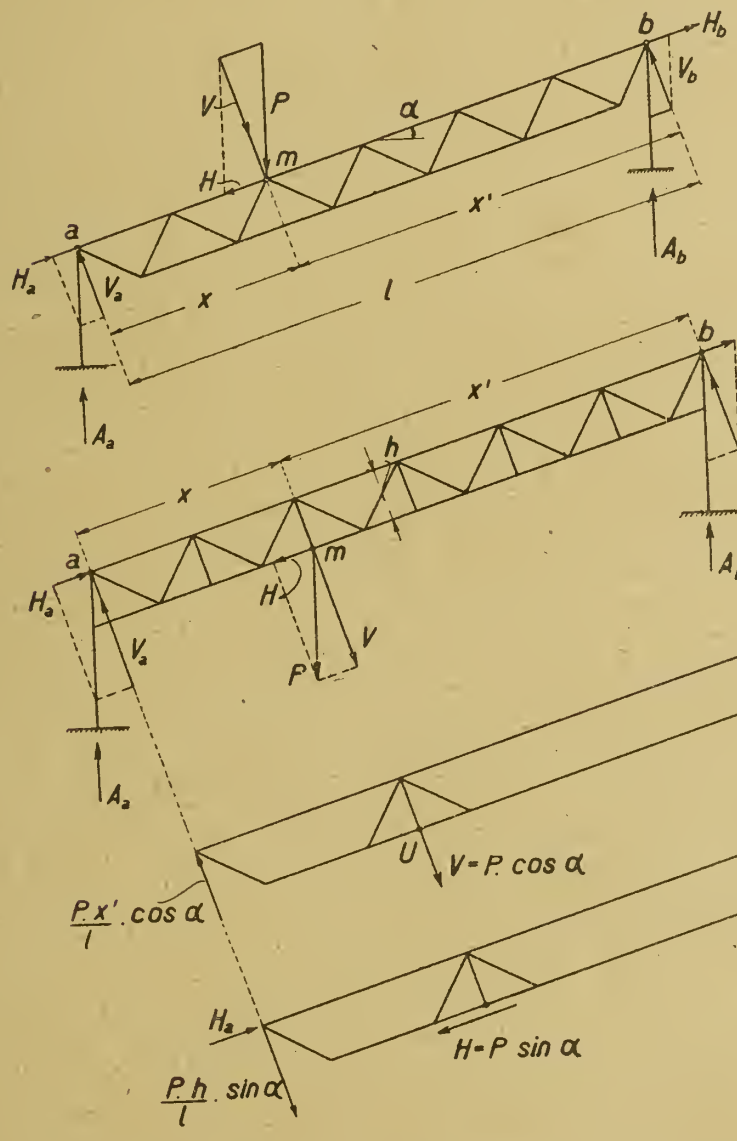


Fig. 80.

Fig. 81.

Fig. 81 a.

Fig. 81 b.

Die Brücke wird, indem man die schräge Richtung l zur Basis nimmt und die entsprechenden Kräfte V einführt, wie ein gewöhnlicher Träger behandelt. Nur ist zu beachten, daß der Obergurt zuguterletzt immer eine Zusatzspannung aus dem Schub H bekommt, und zwar für die Strecke a—m den Wert

$$-H_a = A_a \cdot \sin\alpha = P \cdot \frac{x'}{l} \cdot \sin\alpha$$

und für die Strecke m—b den Wert

$$+ H_b = A_b \cdot \sin \alpha = P \cdot \frac{x}{l} \cdot \sin \alpha.$$

Zweckmäßige Berechnungsverfahren für mehrere Lasten (Momentenverfahren, Einflußlinien) sind in früheren Abschnitten zur Genüge mitgeteilt worden. Falls der Schrägträger auf mehreren Stützen ruht, also statisch unbestimmbar ist, legt man der Berechnung wie oben die Kräfte V zugrunde, während im übrigen die früher dargelegten Regeln und Methoden für statisch unbestimmte Systeme anzuwenden sind.

Beispiel 68. Eine Schrägbrücke nach Fig. 81. Hier hängt die senkrechte wandernde Last P am Untergurt. Ihre beiden Komponenten, senkrecht zum Träger und parallel dazu sind wieder

$$V = P \cdot \cos \alpha \text{ und } H = P \cdot \sin \alpha.$$

Die gewöhnlichen senkrechten Auflagerdrucke betragen

$$A_a = \frac{P}{l \cdot \cos \alpha} (x' \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha)$$

und

$$A_b = \frac{P}{l \cdot \cos \alpha} (x \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha)$$

oder

$$A_a = \frac{P \cdot x'}{l} - \frac{P \cdot h}{l} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$A_b = \frac{P \cdot x}{l} + \frac{P \cdot h}{l} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Die zugehörigen Komponenten sind

$$V_a = A_a \cdot \cos \alpha \text{ und } H_a = A_a \cdot \sin \alpha$$

und

$$V_b = A_b \cdot \cos \alpha \text{ und } H_b = A_b \cdot \sin \alpha.$$

Man führt die Berechnung wieder auf Grund der schrägen Basis durch, und zwar so, indem man nach Fig. 81 a zunächst die Wirkung der Komponente V ermittelt, sodann nach Fig. 81 b den Einfluß der Komponente H aufsucht. Beide Wirkungen werden schließlich zusammengeworfen. Hinsichtlich der Anwendung geeigneter Berechnungsverfahren gilt das bei dem vorhergehenden Beispiel Gesagte. Auch bietet die Durchführung dieses Rechnungsweges bei statisch unbestimmtem System keine Schwierigkeit.

Beispiel 69. Ein auf einer schrägen Brücke durch ein Zugseil beförderter Lastwagen. (Fig. 82.) Das Zugseil greift mit der Kraft H im Punkte s des Wagens an. Das Gesamtgewicht desselben mit Last ist P. Der Reibungswiderstand der Laufräder möge vernachlässigt werden. Zerlegt man die Last P in eine Komponente V senkrecht zur Laufbahn und in eine Komponente H wagerecht dazu, dann muß sein

$$V = P \cdot \cos \alpha \text{ und } H = P \cdot \sin \alpha.$$

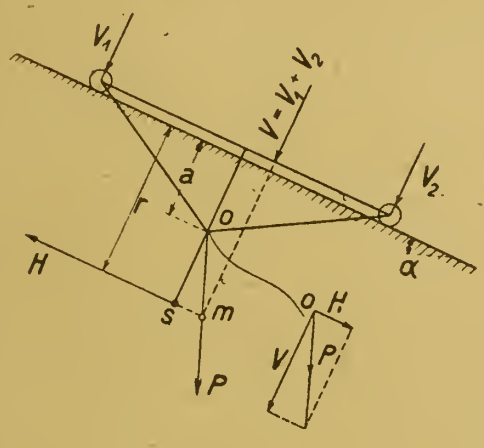


Fig. 82.

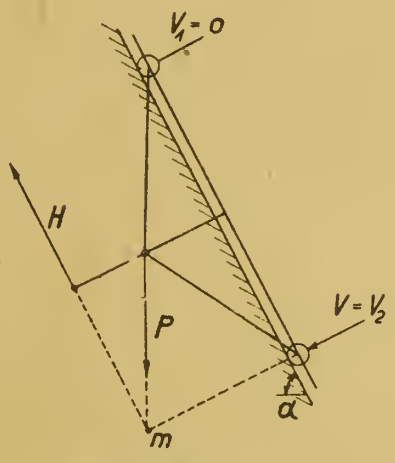


Fig. 82a.

Sodann kann man folgende Gleichgewichtsbedingungen schreiben

$$V_1 = \frac{V}{2} + H \cdot \frac{a}{b} - H \cdot \frac{r}{b}$$

und

$$V_2 = \frac{V}{2} - H \cdot \frac{a}{b} + H \cdot \frac{r}{b}$$

oder

$$V_1 = \frac{P}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{P \cdot a}{b} \cdot \sin \alpha - \frac{P \cdot r}{b} \cdot \sin \alpha$$

und

$$V_2 = \frac{P}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{P \cdot a}{b} \cdot \sin \alpha + \frac{P \cdot r}{b} \cdot \sin \alpha$$

oder

$$V_1 = \frac{P}{2} \left\{ \cos \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a - r}{b} \right\} \quad . \; . \; . \quad (153)$$

und

$$V_2 = \frac{P}{2} \left\{ \cos \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a - r}{b} \right\} \quad . \; . \; . \quad (153\,a)$$

$V_1 = 0$ wenn

$$\cos\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \frac{a - r}{b} = 0$$

oder wenn

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2\,(r - a)} \quad \text{(vgl. Abbildung 82a).}$$

Hierbei ist $V_2 = P \cdot \cos\alpha$

$V_2 = 0$ wenn

$$\cos\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{a - r}{b} = 0$$

oder wenn

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2\,(a - r)}.$$

Hierbei ist $V_1 = P \cdot \cos\alpha$.

Um diesen Zustand herbeizuführen, muß der Zug H oberhalb der Laufbahn liegen; also mit dem Hebelarm $-r$; es muß daher heißen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2\,(a + r)}.$$

Die vorbemerkten Fälle stellen die Grenzen für die Bahnneigungen α dar; über diese Neigungen hinaus kippt der Wagen.

Die Aufgabe läßt sich auch in ungleich einfacherer Weise (Fig. 82) auf graphischem Wege durch Festlegung des Schnittpunktes m von H mit P lösen. Durch diesen Punkt muß die Mittelkraft V aus den beiden Raddrucken V_1 und V_2 gehen. Solange V innerhalb des Radstandes liegt, ist das System stabil.

Die vorliegende Aufgabe ist bei Schrägbrücken, wo es auf die Ermittelung der Raddrücke des Lastwagens ankommt, von Nutzen.

Zehnter Abschnitt.

Drehbrücken, Klappbrücken und kleinere praktische Aufgaben.

Beispiel 70. Eine Drehbrücke nach Fig. 83. Im Betriebe ruht die Brücke auf den festen Auflagern *A*, *B* und *C*. Sie ist also zunächst für diesen Zustand (Träger auf drei Stützen) zu berechnen. Man beseitigt die Mittelstütze *C* und bringt an ihrer Stelle die Last $C = -1$ an. Zur vorläufigen Berechnung, um ungefähre Querschnitte zu gewinnen, kann man ein unveränderliches Trägheitsmoment für den Träger annehmen. Dann betrachtet man die Momentenfläche aus $C = -1$ als Belastung des Trägers und zeichnet dafür das Seilpolygon. Dieses liefert dann die Biegungslinie, die zugleich die Einflußlinie für den Stützendruck *C* darstellt. Auf Grund dieser Linie lassen sich sodann die Einflußlinien für sämtliche Stabkräfte wie auch für die Auflagerdrucke *A* und *B* zeichnen. Nach Ermittelung der Stabkräfte aus der ruhenden und der beweglichen Belastung ist schließlich eine rohe Dimensionierung des Trägers vorzunehmen.

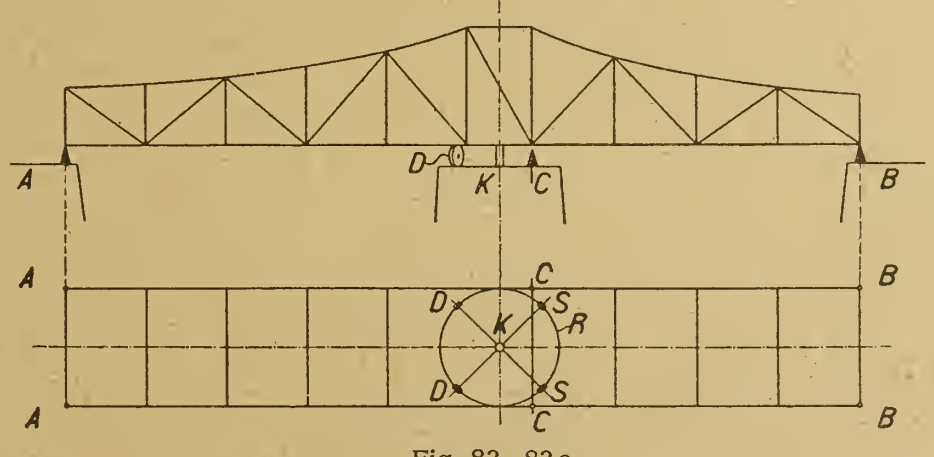


Fig. 83—83 a.

Soll die Brücke ausgedreht werden, dann sind zunächst einige Vorbereitungen notwendig. Die Fig. 83 und 83 a lassen den Dreh-

mechanismus erkennen. *R* ist ein auf dem Steinpfeiler liegender Rollkranz, in dessen Mitte ein Spurzapfen sitzt, auf dem die Brücke sich dreht. Sie stützt sich ferner auf die auf dem Rollkranz laufenden Rollen *D*. Die mit *S* bezeichneten Rollen sind Sicherheitswalzen gegen Zurückkippen der Brücke. Um die Brücke in die zum Drehen fertige Lage (aufruhend auf dem Spurzapfen und auf den Laufrollen *D*) zu bringen, wird das Auflager *A* langsam heruntergelassen. Dann hebt sich das Auflager *B* ab und die Brücke pendelt mit ihrer ganzen Last auf dem Mittellager *C*. Mit weiterem Nachlassen des Auflagers *A* (möglich durch einen geringen Überschuß an Eigengewicht des linken Brückenarmes) stützt sich die Brücke allmählich auf den Spurzapfen *K* und hebt sich schließlich ganz ab von dem Mittellager *C*. Sie ruht also jetzt mit ihrer ganzen Last auf dem Spurzapfen *K*. Bei noch weiterem Nachlassen des Auflagers *A* gelangt die Brücke dann endlich noch mit geringem Druck auf die Rollen *D*. Dieses ist der zum Drehen fertige Zustand. Das heißt, es werden schließlich noch die Sicherheitsrollen *S* mit weichem Druck zwischen Brücke und Rollkranz gezwungen. Der positive Druck auf die Rollen *D* kann nach Belieben, je nach dem Maß des Übergewichtes des linken Brückenarmes, bemessen werden. Während des Verlaufes der beschriebenen Bewegung ist von Fall zu Fall der statische Zustand der Brücke zu untersuchen. Die Aufgabe, ein in der Nähe der Mitte unterstützter frei pendelnder Träger bietet keine Schwierigkeit. Es werden sich jedoch stellenweise stärkere Querschnitte ergeben als bei der ersten vorläufigen Berechnung des Trägers auf drei Stützen. Etwas mehr Umständlichkeit macht die Ermittelung der Biegungen der frei pendelnden Brücke. Die Kenntnis dieser elastischen Linie ist notwendig zwecks Bestimmung der genauen Höhenlage aller Auflager, wie auch der exakten Anordnung des Spurzapfens und der Laufrollen. Man ermittelt die Biegungslinie am zweckmäßigsten mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes auf Grund der Stablängenänderungen

$$\Delta = \frac{S \cdot s}{F \cdot E}$$

oder durch Anwendung des Verfahrens der *W*-Gewichte. Um jedoch ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten, stellt man die Ermittelungen erst später, nach endgültiger Querschnittsgebung der Brücke, an.

Man wird also zunächst eine genaue Berechnung des Trägers auf drei Stützen unter Zugrundelegung der bis jetzt gefundenen Quer-

schnitte vornehmen. Man beseitigt wieder wie oben die Stütze C und bringt an ihrer Stelle die Kraft $C = -1$ an. Die hierbei entstehende Biegungslinie kann wie immer entweder durch einen Williotschen Verschiebungsplan oder mit Hilfe des Verfahrens der W-Gewichte festgestellt werden. Jedenfalls erhält man nunmehr eine genaue Einflußlinie für den Stützendruck C, wonach dann eine endgültige Berechnung der Stabkräfte usw. mit Benutzung von Einflußlinien möglich ist. Vergleiche die Konstruktion von Einflußlinien für ähnliche Fälle in früheren Abschnitten.

In den vorstehenden Darlegungen ist der allgemeine Gang der Berechnung vor Augen geführt.

Beispiel 71. Eine doppelte Klappbrücke nach Fig. 84. Die Drehung der beiden Brückenflügel findet um die Punkte bei A und B statt. Bei geschlossener Brücke stützen sich die beiden Trägerschnabel gelenkartig gegeneinander, so daß das System als reiner Dreigelenkbogen wirkt.

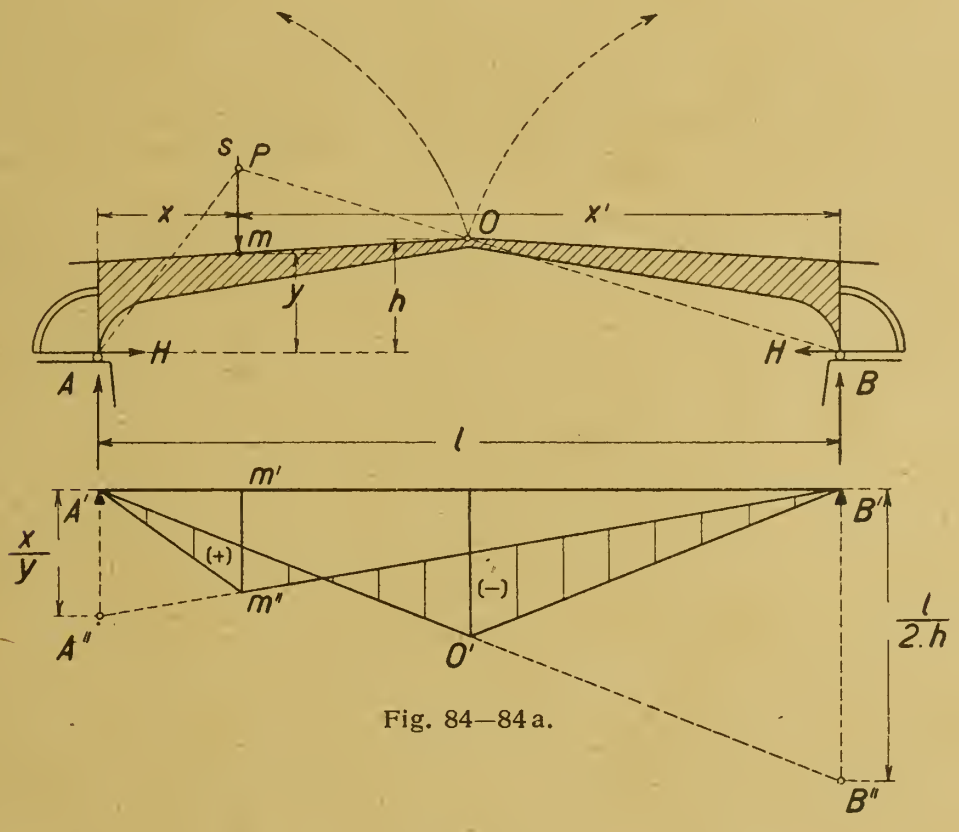


Fig. 84—84 a.

Als fragliche Größe für die Berechnung führt man den wagerechten Schub H an den Fußlagern bei A und B ein. Es befinde sich eine Last P auf der Brücke. Dann betragen die gewöhnlichen senkrechten Auflagerdrucke

$$A = P \cdot \frac{x'}{l} \text{ und } B = P \cdot \frac{x}{l}.$$

Der wagerechte Schub H ist

$$H = \frac{P \cdot x}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{h}.$$

Diese Beziehung läßt sich graphisch nach dem Verhältnis

$$H : x = \frac{l}{2 \cdot h} : l \quad (P = 1)$$

auftragen. Siehe Linienzug $A' — o' — B''$ (Fig. 84 a). Die Linie $A' — o' — B'$ liefert dann die Einflußlinie für den Horizontalschub H.

$$H = P \cdot \eta.$$

Die Einflußlinie für das Moment an der Stelle m des Brückenträgers entwickelt sich wie folgt.

$$M_m = \frac{P \cdot x'}{l} \cdot x — P \cdot \eta \cdot y,$$

oder

$$M_m = P \cdot y \left\{ \frac{x' \cdot x}{l \cdot y} — \eta \right\}.$$

Die Ordinaten η sind durch die Einflußlinie H gegeben. Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$M_0 : x' = \frac{x}{y} : l$$

schreiben und graphisch durch die Gerade $B' — m'' — A''$ darstellen. Die schraffierte Fläche stellt sodann die Einflußlinie für das Moment M_m aus der wandernden Last $P = 1$ dar.

In ähnlicher Weise lassen sich die Einflußlinien für weitere Punkte m, wie auch für Querkräfte, sodann auch, wenn es sich um Fachwerkkonstruktion handelt, für die Stabspannkräfte zeichnen.

Beispiel 72. Ein fahrbarer Konsolkran nach Fig. 85.

Der Kran hängt in drei Rollengruppen: Die gesamte senkrechte Last wird von den Kopfrollen bei a getragen, während die horizontalen Rollen bei a und b die wagerechten Schübe aufnehmen.

Die Last P auf dem Ausleger erzeugt folgende Widerlagerdrucke

$$V_a = P,$$

$$H_a = H_b = P \frac{l}{a}.$$

Der Ausleger ruht auf drei Stützen. Man betrachte seine Verbindungen mit den Schrägen als vollkommene Gelenke und als

statisch Unbestimmbare den Auflagerdruck C bei c. Nach Beseitigung des Stabes S_1 lasse man im Punkte c die Kraft $C = -1$ t senkrecht gerichtet angreifen. Da der Balken ein konstantes Trägheitsmoment hat, so entsteht die Biegungslinie Fig. 85 b. Sie wird gefunden, indem man das in Fig. 85 a aufgetragene Dreieck als Belastung wirken läßt.

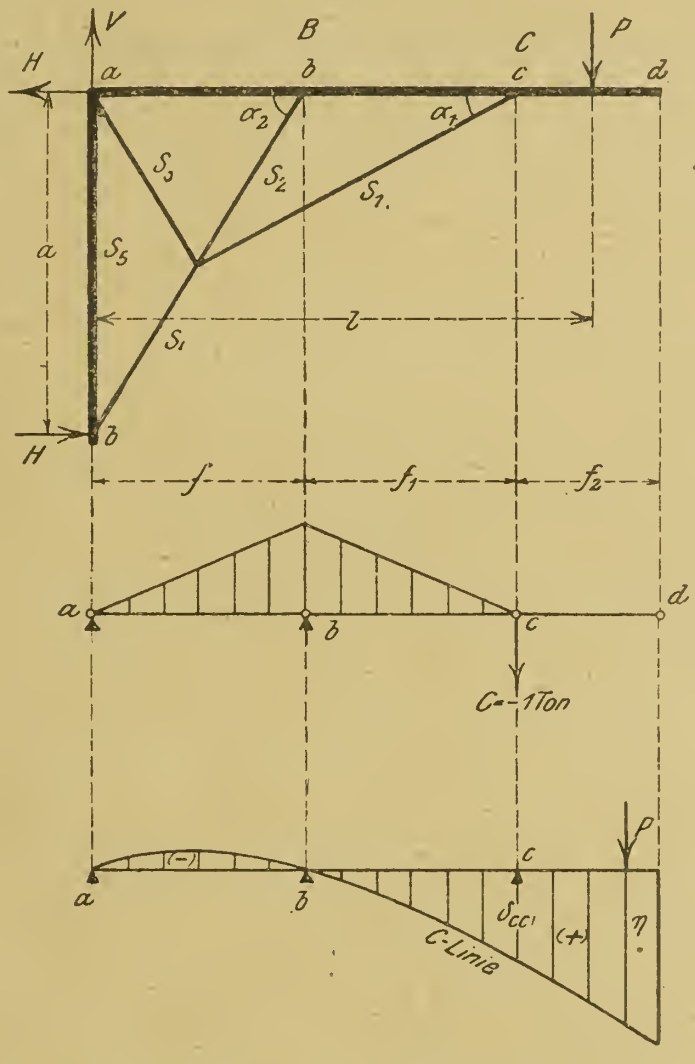


Fig. 85.

Fig. 85 a.

Fig. 85 b.

Für irgend eine Stellung der Laufwinde P ist

$$C = P\frac{\eta}{\delta_{cc}}.$$

Auf Grund der nun bekannten Auflagergrößen V, B und C lassen sich sämtliche Stabkräfte und Momente leicht ermitteln.

Beispiel 73. Ein Konsolkran nach Fig. 86. Die statische Berechnung des Gerüstes ist einfach. Wegen der wagerechten Verschieblichkeit der Laufräder auf den Schienen erscheinen nur senkrechte Auflagerdrucke A und B.

$$A = P \cdot \frac{a+l}{l}, \quad B = -P \cdot \frac{a}{l}.$$

Die Momente betragen

Pfosten: $M_2 = 0, \quad M_1 = P \cdot a, \quad M_e = P \cdot a.$

Schräger Arm: $M_e = B \cdot l = P \cdot a.$

Von besonderem Interesse ist die Formveränderung des Gerüstes und zwar die wagerechte Verschiebung der Laufräder auf der Schiene bei B. Man ermittelt zweckmäßig die Annäherung δ der Punkte A

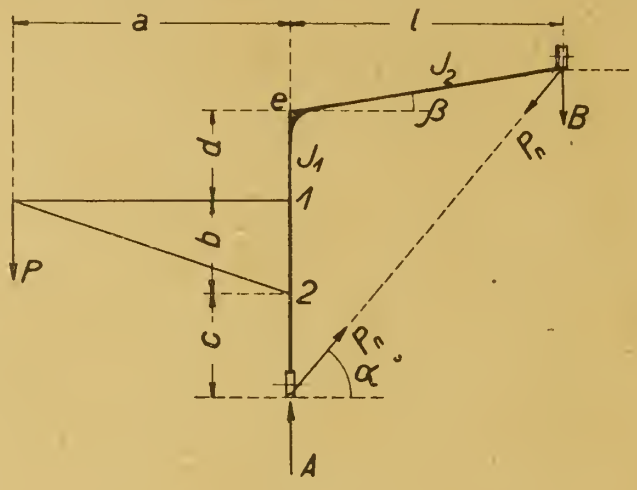


Fig. 86.

und B in Richtung A nach B, wonach dann die wagerechte Verschiebung δ_h bestimmt werden kann Belastet man das Gerüst in der Richtung der Annäherung mit der provisorischen Kraft P_n, dann ist genügend genau

$$\delta = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot d x.$$

Pfosten von $2 - 1$.

$$M_x = P \cdot \frac{a}{b} \cdot x + P_n \cdot \cos \alpha \, (c + x),$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n} = \cos \alpha \, (c + x), \quad P_n = 0,$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^b P \cdot \frac{a}{b} \cdot x \cdot (c + x) \cos \alpha \cdot d x = \frac{P \cdot a \cdot b}{J_1 \cdot E} \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{3} \right) \cos \alpha \quad \text{(I)}$$

Pfosten von $1 - e$.

$$M_x = P \cdot a + P_n \cdot \cos \alpha \, (b + c + x),$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n} = \cos \alpha \, (b + c + x), \quad P_n = 0,$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^d P \cdot a \cdot (b + c + x) \cos \alpha \cdot d x = \frac{P \cdot a \cdot d}{J_1 \cdot E} \left(b + c + \frac{d}{2} \right) \cos \alpha \, (\text{II})$$

Der schräge Arm.

$$M_x = P \cdot \frac{a}{l} \cdot x + P_n \cdot \sin\alpha \cdot x - P_n \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot x,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_n} = x\,(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta), \quad P_n = 0,$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^l \frac{P \cdot a}{l} \cdot x^2\,(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) \cdot dx$$

$$= \frac{P \cdot a \cdot l^2}{3 \cdot J_2 \cdot E}\,(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$

$$\delta = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

oder

$$\delta = \frac{P \cdot a}{J_1 \cdot E} \cdot \cos\alpha \left\{ b \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{3} \right) + d \left(b + c + \frac{d}{2} \right) \right\}$$

$$+ \frac{P \cdot a\, l^2}{3 \cdot J_2 \cdot E}\,(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Nun ist

$$\delta_h = \frac{\delta}{\cos\alpha}.$$

Läßt man in der Formel 154 $\beta = 0$ und d und $c = 0$ werden, dann ergibt sich

$$\delta = \frac{P \cdot a \cdot b}{J_1 \cdot E} \cdot \cos\alpha \left\{ \frac{b}{3} + d \right\} + \frac{P \cdot a \cdot l^2}{J_2 \cdot E} \cdot \sin\alpha \quad . \quad (155)$$

Schließlich dürfte es noch erwünscht sein, die Senkung des Angriffpunktes der Last P (Auslegerspitze) zu wissen. Sie ermittelt sich genügend genau nach

$$\delta_P = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P} \cdot dx$$

zu

$$\delta_P' = \frac{P \cdot a^2}{3 \cdot J_1 \cdot E} \left(b + 3 \cdot d + \frac{J_1}{J_2} \cdot l \right) . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

Dazu kommt der Einfluß der Längenänderung der Stäbe des Auslegerfachwerkes mit

$$\delta_P'' = P \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E},$$

wo S_1 die Spannkräfte aus der Belastung durch $P = 1$ bedeuten.

Beispiel 74. Ermittelung der Senkung der Auslegerspitze des Drehkranes nach Fig. 87.

Der Einfluß des Balkens und des Pfostens berechnet sich wieder nach

$$\delta_P' = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P} \cdot dx.$$

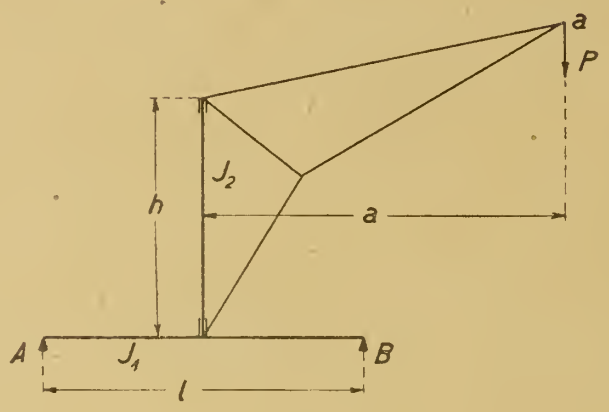


Fig. 87.

1. Der Balken:

$$A = \frac{P}{2 \cdot l}(l - 2 \cdot a), \quad B = \frac{P}{2 \cdot l}(l + 2 \cdot a).$$

Linker Teil

$$M_x = \frac{P}{2\ l}(l - 2 \cdot a) \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{l - 2 \cdot a}{2 \cdot l} \cdot x,$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{4 \cdot l^2}(l - 2 \cdot a)^2 \cdot x^2 \cdot dx = \frac{P \cdot l}{96 \cdot J_1 \cdot E}(l - 2 \cdot a)^2 \qquad (I)$$

Rechter Teil analog

$$\frac{P \cdot l}{96 \cdot J_1 \cdot E}(l + 2 \cdot a)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (II)$$

2. Pfosten:

$$M_x = \frac{P \cdot a}{h} \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{a \cdot x}{h},$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^h P \cdot \frac{a^2 \cdot x^2}{h^2} \cdot dx = \frac{P \cdot a^2 \cdot h}{3 \cdot J_2 \cdot E} \quad . \quad . \quad . \qquad (III)$$

$$\delta_P' = I + II + III,$$

$$\delta_P' = \frac{P \cdot l}{48 \cdot J_1 \cdot E}(l^2 + 4 \cdot a^2) + \frac{P \cdot a^2 \cdot h}{3 \cdot J_2 \cdot E} \quad . \quad . \qquad (157)$$

Der Einfluß der Längenänderung der Fachwerkstäbe des Auslegers beträgt wieder

$$\delta_P'' = P \cdot \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E},$$

wo S_1 die Spannkräfte aus der Belastung durch $P = 1$ bedeuten.

Die Momente des Gerüstes sind:

des Pfostens unten

$$M = P \cdot a.$$

des Balkens in der Mitte, links vom Pfostenanschluß

$$M_m = \frac{P}{4}(l - 2 \cdot a)$$

des Balkens in der Mitte rechts vom Pfostenanschluß

$$M_m = \frac{P}{4}(l + 2 \cdot a).$$

Beispiel 75. Ein Verladegerüst aus vollwandiger Blechkonstruktion nach Fig. 88. Der Pfostenfuß ist fest eingespannt, während der Balken am rechten Auflager wagerecht beweglich aufruht. Als fragliche Größe wird der Auflagerdruck X eingeführt. Er läßt sich bestimmen nach

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = 0.$$

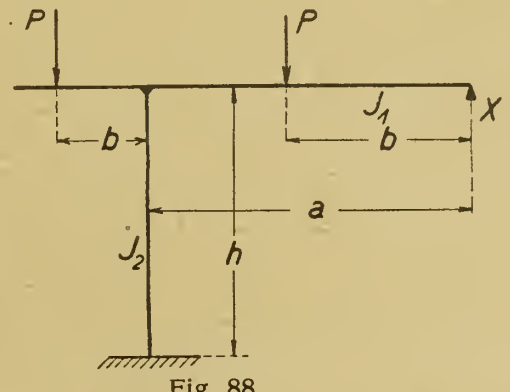


Fig. 88.

1. Die Last P befindet sich auf dem Kragarm.

Balken:

$$M_x = X \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = x,$$

$$\frac{1}{J_1 \cdot E} \int_0^a X \cdot x^2 \cdot dx = \frac{X \cdot a^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

Pfosten:

$$M_x = P \cdot b - X \cdot a, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -a,$$

$$\frac{1}{J_2 \cdot E} \int_0^h \{-P \cdot a \cdot b + X \cdot a^2\}\, dx = -\frac{P \cdot a \cdot b \cdot h}{J_2 \cdot E} + \frac{X \cdot a^2 \cdot h}{J_2 \cdot E} \quad \text{(II)}$$

$$\frac{X \cdot a^3}{3 \cdot J_1 \cdot E} + \frac{X \cdot a^2 \cdot h}{J_2 \cdot E} - \frac{P \cdot a \cdot b \cdot h}{J_2 \cdot E} = 0$$

oder

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot b \cdot h}{a\left(a \cdot \frac{J_2}{J_1} + 3 \cdot h\right)} \quad \ldots\ldots \quad (158)$$

Die Momente sind

Balken links vom Pfostenanschluß

$$M_m = P \cdot b,$$

rechts vom Pfostenanschluß

$$M_m = X \cdot b.$$

Pfosten

$$M = P \cdot b - X \cdot a.$$

2. Die Last P befindet sich zwischen dem Pfosten und dem Auflager X im Abstande b vom Auflager.

Auf ähnliche Weise wie oben ergibt sich

$$X = \frac{3 \cdot P \cdot a \cdot h\,(a-b)\,\frac{J_1}{J_2} + P \cdot \left(a^3 + \frac{b^3}{2} - \frac{3 \cdot a^2 \cdot b}{2}\right)}{a^2\left(a + 3 \cdot h \cdot \frac{J_1}{J_2}\right)} \quad (159)$$

Die Momente sind:

Balken an der Angriffstelle von P

$$M_P = -X \cdot b,$$

rechts vom Pfostenanschluß

$$M_m = P \cdot (a-b) - X \cdot a,$$

Pfosten

$$M = P\,(a-b) - X \cdot a.$$

Beispiel 76. Hemmung eines fahrenden Kranes durch Auflaufen auf eine schiefe Ebene. Der Schwerpunkt der Lasten liege im Abstande a über der Laufbahn. Die verschieden großen Raddrucke sind P_1 und P_2 (Fig. 89).

1. Bewegung des Kranes mit der Geschwindigkeit v von links nach rechts. Das rechte Rad läuft auf eine gerade schiefe Ebene.

Es bezeichnen:

H_2 der beim Auflaufen eintretende wagerechte Schub des Rades,

V_2 der zugehörige vertikale Druck des Rades,

M die Masse des Kranes mit Last.

Es muß sein

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = V_2 \cdot h = H_2 \cdot s$$

oder

$$h = \frac{M \cdot v^2}{2 \cdot V_2}.$$

Auf dieser Höhe h wird die lebendige Kraft vernichtet.

Weiter ist

$$V_2 = P_2 + H_2 \cdot \frac{a}{b}$$

und

$$H_2 = V_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = P_2 \operatorname{tg} \alpha + H_2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieraus

$$H_2 = \frac{P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (160)$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für V_2 ein, dann folgt

$$V_2 = P_2 + \frac{P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{a}{b} = \frac{P_2}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad (161)$$

Diesen Wert schließlich in die Gleichung für h eingeführt ergibt

$$h = \frac{M \cdot v^2}{2} \cdot \frac{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{P_2} \quad \ldots\ldots \quad (162)$$

Der zugehörige wagerechte Weg ist

$$s = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Der vertikale Druck des linken Rades bei diesem Vorgang ist

$$V_1 = P_1 - H_2 \cdot \frac{a}{b} = P_1 - \frac{P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{a}{b}.$$

Dieser Druck wird gleich Null, wenn

$$a = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Hierbei wird

$$H_2^{\max} = (P_1 + P_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Bewegung des Kranes von rechts nach links. Das linke Rad läuft auf eine schiefe Ebene.

Analog dem ersten Fall ergibt sich

$$H_1 = \frac{P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (160\,a)$$

$$V_1 = \frac{P_1}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (161\,a)$$

und

$$h = \frac{M \cdot v^2}{2} \cdot \frac{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{P_1} \quad \ldots \ldots \quad (162\,a)$$

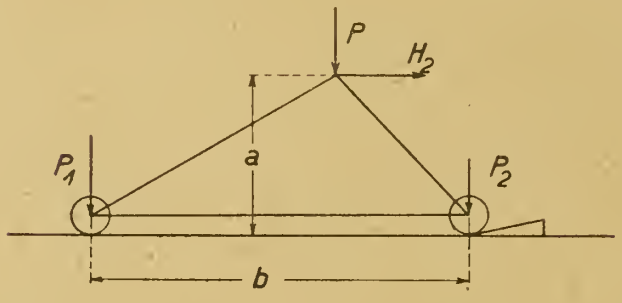


Fig. 89.

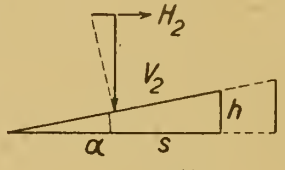


Fig. 89 a.

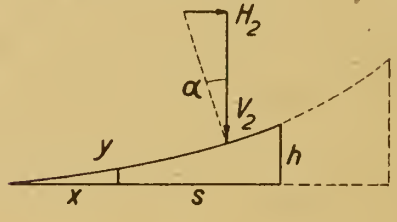


Fig. 89 b.

Der Druck des rechten Rades wird gleich Null bei

$$a = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \cdot \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Hierbei ist

$$H_1^{\max} = (P_1 + P_2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Bei den vorstehenden Ermittelungen sind Stoßkräfte, die beim Auflaufen der Räder auf die schiefe Ebene erfolgen, ganz außer acht gelassen. Immerhin geben die Formeln einen Anhalt über die ungefähr zu wählenden Verhältnisse.

Wählt man statt der geraden schiefen Ebene einen parabelförmigen Auflauf nach Fig. 89b, bei dem Stoßwirkungen fast gar nicht eintreten, dann ergibt sich folgendes.

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = \int_0^s H_2 \cdot dx,$$

$$y = \frac{h}{s^2} \cdot x^2, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot h \cdot x}{s^2},$$

$$H_2 = V_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = V_2 \cdot \frac{2 \cdot h \cdot x}{s^2},$$

$$V_2 = P_2 + H_2 \cdot \frac{a}{b},$$

mithin

$$H_2 = \left(P_2 + H_2 \cdot \frac{a}{b} \right) \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$H_2 = \frac{P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (\alpha \text{ veränderlich})$$

und

$$V_2 = \frac{P_2}{1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Weiter

$$H_2 = \frac{P_2}{1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{2 \cdot h \cdot x}{s^2}} \cdot \frac{2 \cdot h \cdot x}{s^2}.$$

Dies oben eingesetzt

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = \int_0^s H_2 \cdot dx = 2 \cdot b \cdot h \cdot P_2 \int_0^s \frac{x \cdot dx}{b \cdot s^2 - 2 \cdot a \cdot h \cdot x}.$$

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe der Reihe, wenn man den Bruch ausdividiert, angenähert lösen. Es ergibt sich

$$\frac{M}{2} \cdot v^2 = 2 \cdot h \cdot P_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2 \cdot a \cdot h}{3 \cdot b \cdot s} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Auf dem in dieser Formel erscheinenden Wege s, bzw. auf der Höhe h, wird die lebendige Kraft vernichtet. Die obigen Kräfte H_2 und V_2 nehmen mit fortschreitendem Auflaufen des Rades zu.

Beispiel 77. Ermittelung der günstigsten Stützweite l einer Verladebrücke von der gegebenen Gesamtlänge l_0 (Fig. 90).

a) Aus dem gleichmäßig verteilten Eigengewicht $Q = q \cdot l$

$$M_a = M_m,$$

das heißt, das Moment über der Stütze soll so groß sein wie das Moment in der Brückenmitte.

$$q \cdot a^2 = \frac{q \cdot l^2}{8} - \frac{q \cdot a^2}{2},$$

hieraus

$$a = \frac{l}{4}\sqrt{2}.$$

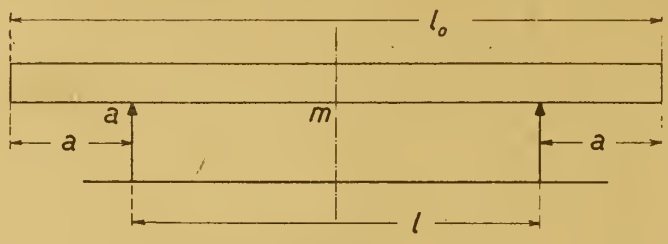


Fig. 90.

b) Aus einer wandernden Last P.

$$M_a = M_m$$

oder

$$P \cdot a = \frac{P \cdot l}{4},$$

hieraus

$$a = \frac{l}{4}.$$

Zu a):

$$l = l_0 - 2 \cdot a = l_0 - 2 \cdot \frac{l}{4} \cdot \sqrt{2}$$

oder

$$l\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = l_0$$

oder

$$l = \frac{l_0}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 0{,}586 \cdot l_0 \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

Zu b):

$$l = l_0 - 2 \cdot a = l_0 - 2 \cdot \frac{l}{4}$$

oder

$$\frac{3}{2} \cdot l = l_0$$

oder

$$l_0 = 0{,}667 \cdot l_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Das günstigste Verhältnis ist danach ungefähr das Mittel aus den Werten I und II, also

$$l = l_0 \, (0{,}586 + 0{,}667) \cdot \frac{1}{2}$$

oder

$$l = 0{,}625 \cdot l_0.$$

Beispiel 78. Fundament zu einer Kranbahnstütze (Fig. 91).

In der Fig. 91 ist der Fuß der Säule dargestellt.

P sei die senkrechte Belastung und M das Moment; dieses kann hervorgerufen werden durch eine wagerechte Kraft oder durch die exzentrische Lage von P.

Bei der Berechnung der Kantenpressungen K_m und K_n zwischen der Fußplatte und dem Fundament nimmt man an, daß die Pressungslinie nach einer Geraden verläuft (Fig. 91 a). Die Pressungen sollen betragen

$$K_m = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$$

und

$$K_n = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

Je nach den Verhältnissen kann K_n negativ werden, das heißt, es müssen in diesem Bereich Zugspannungen zwischen Platte und Fundament wirksam sein. Das ist aber nicht möglich, weshalb man Anker einzieht, die die erforderlichen Zugkräfte Z aufbringen.

Bei der Ermittelung des Ankerzuges Z verfährt man üblicherweise so, indem man die Pressungslinie (Fig. 91 a) als zu Recht bestehend ansieht und an Stelle des fehlenden Spannungskeiles den Ankerzug Z setzt (Fig. 91 b).

Diese Berechnung ist, streng genommen, nicht richtig, vielmehr hängen der Ankerzug wie auch die Pressungen von dem elastischen Verhalten der sich berührenden Bauteile ab. Aber selbst wenn man nach dieser Richtung brauchbare Ansätze machen könnte, so würde doch die Rechnung keinen Wert haben, weil schließlich

die ganze Sachlage gestört bzw. bestimmt wird durch die Schlüsselanspannung, die den Ankern erteilt wird. Zum Beispiel würde eine leichte Schlüsselanspannung etwa die in der Fig. 91 c angedeutete

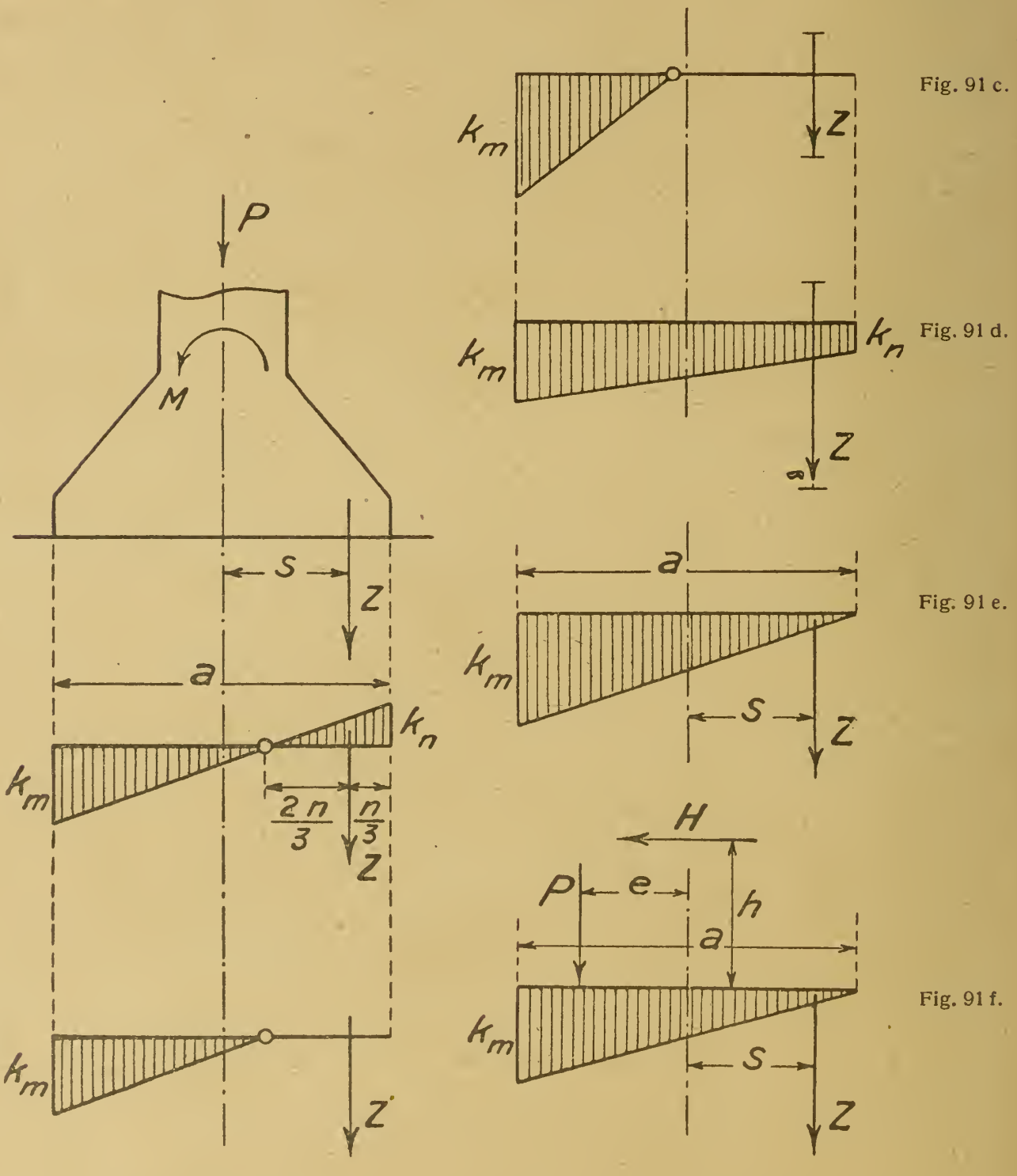


Fig. 91.

Fig. 91 a.

Fig. 91 b.

Fig. 91 c.

Fig. 91 d.

Fig. 91 e.

Fig. 91 f.

Spannungsverteilung erzeugen, während die Fig. 91 d zeigt, welche Wirkung entsteht, wenn die Anker stark angezogen werden.

Lassen sich also bestimmte Ansätze für eine genaue Berechnung nicht machen, so wird man versuchen müssen, auf Grund gewisser Überlegungen zum Ziele zu kommen.

Man denke sich den Anker nach der Montage der Säule so stark angezogen, daß bei der Wirkung von P und M noch ein Druck K_n zwischen Platte und Fundament vorhanden ist. Zugleich bestehe die Pressung K_m. Wird nun die Wirkung von P und M gesteigert, so vermindert sich die Pressung K_n bei gleichzeitiger Zunahme von K_m, während der absolute Ankerzug Z annähernd unverändert bleibt. Erst in dem Augenblick, wo bei weiterer Steigerung der angreifenden Kräfte die Kantenpressung $K_n = 0$ wird, also dann, wenn sich die Fußplattenkante rechts vom Fundament abhebt, tritt eine Erhöhung des Ankerzuges ein. Diesen Augenblick, dessen Spannungszustand in der Fig. 91 e angegeben ist, halten wir fest. Er liefert nämlich die einzige brauchbare Bedingung für die Berechnung von K_m und Z, indem jetzt beide Größen nicht mehr von dem elastischen Verhalten der Bauteile oder der Schlüsselspannung abhängig sind.

Es muß sein

$$K_n = \frac{Mo}{W} - \frac{N}{F}.$$

Die Normalkraft ist $N = P + Z$.

Das Moment beträgt $M_0 = M - Z \cdot s$.

Wegen $K_n = 0$ ergibt sich

$$\frac{M - Z \cdot s}{W} - \frac{P + Z}{F} = o,$$

hieraus

$$Z = \frac{M - P \cdot \frac{W}{F}}{s + \frac{W}{F}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

Bei einer rechteckigen Fußplatte von der Länge a und der Breite b folgt

$$Z = \frac{6 \cdot M - P \cdot a}{6 \cdot s + a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165)$$

Entsteht hierbei das Moment nur aus der exzentrisch um e aus der Mitte der Platte angreifenden Last P, so beträgt der Ankerzug

$$Z = \frac{P\,(6 \cdot e - a)}{6 \cdot s + a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Liegt die Last in der Plattenmitte und wird das Moment durch eine wagerechte Kraft H am Hebelarm h hervorgerufen, dann ergibt sich

$$Z = \frac{6 \cdot H \cdot h - P \cdot a}{6 \cdot s + a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

Es gilt stets

$$K_m = \frac{M_0}{W} + \frac{N}{F} = \frac{M - Z \cdot s}{W} + \frac{P + Z}{F} \quad . \quad (168)$$

oder

$$K_m = 2 \cdot \frac{P + Z}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

wonach sich die Pressung nach vorheriger Ermittelung von Z berechnen läßt.

Die dem Anker oder den Ankern gegebene vorherige Schlüsselanspannung ist schlecht kontrollierbar. Gewöhnlich wird sie so stark sein, daß bei Belastung der Säule ein Abheben an der fraglichen Kante bei K_n nicht stattfindet. Dann übersteigt der Zug aber stets den nach obigen Formeln ermittelten; — ein Umstand, der außerhalb der Verantwortung des Konstrukteurs liegt. Bei der Annahme jedoch, daß der Anzug so gering ist, daß die Fußplattenkante sich von dem Fundament trennt, schreibt man dem Anker eine durch die Belastung der Säule hervorgerufene denkbar ungünstige Beanspruchung zu. Ebenso verhält es sich mit der nach den obigen Angaben ermittelten Pressung K_m.

Beispiel (Fig. 91 f):

Größe der rechteckigen Fußplatte . . . . . $a = 100$ cm
$b = 50$ cm
$F = a \cdot b = 5000$ cm²

Senkrechte Belastung . . . $P = 10\,000$ kg

Exzentrizität der Last . . . $e = 30$ cm

Horizontale Kraft. . . . . $H = 1000$ kg

Hebelarm . . . . . $h = 500$ cm

Entfernung des Ankers aus der Mitte . . . . . $s = 44$ cm.

$$M = P \cdot e + H \cdot h$$
$$= 10\,000 \cdot 30 + 1000 \cdot 500$$
$$= 800\,000 \text{ kg/cm}.$$

Nach Gleichung (165)

$$Z = \frac{6 \cdot 800\,000 - 10\,000 \cdot 100}{6 \cdot 44 + 100} = \frac{3\,800\,000}{364} = 10\,440 \text{ kg}.$$

Nach Gleichung (169)

$$K_m = 2 \cdot \frac{10\,000 + 10\,440}{5\,000} = \sim 8{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 79. Ein Portalgerüst.

Die Fig. 92 zeigt einen geschlossenen Rahmen auf langen unten eingespannten Füßen. Die senkrechten Lasten entstehen durch zwei hindurchfahrende Einschienenkatzen, während die wagerechten Kräfte ihre Ursache in Wind oder Seitenschwankung der Katzen haben.

1. Die senkrechten Kräfte.

Die Aufgabe ist 6 fach statisch unbestimmt. Man erkennt jedoch, daß die Einspannmomente an den Füßen sehr gering sind, weshalb an diesen Stellen Gelenke gedacht werden können, so daß nur die wagerechten Schübe H auftreten. Hiermit fallen zwei statisch unbestimmte Größen fort.

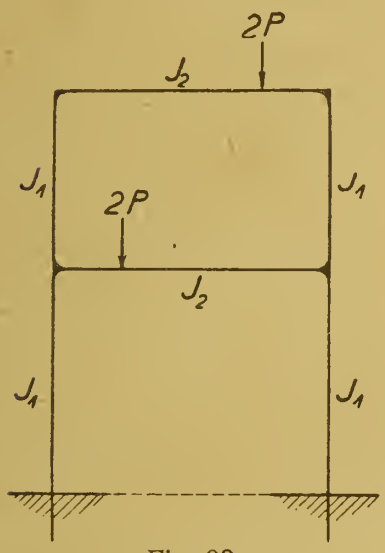


Fig. 92.

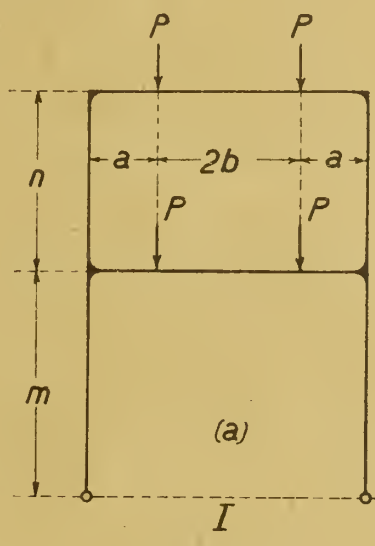


Fig. 92a.

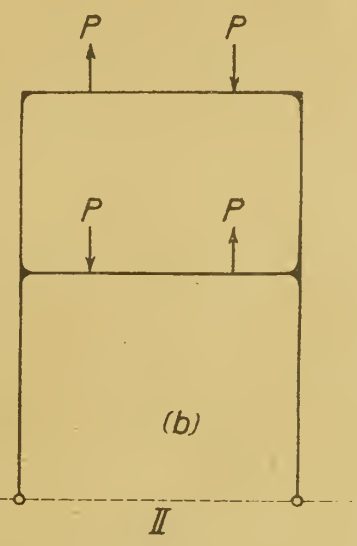


Fig. 92b.

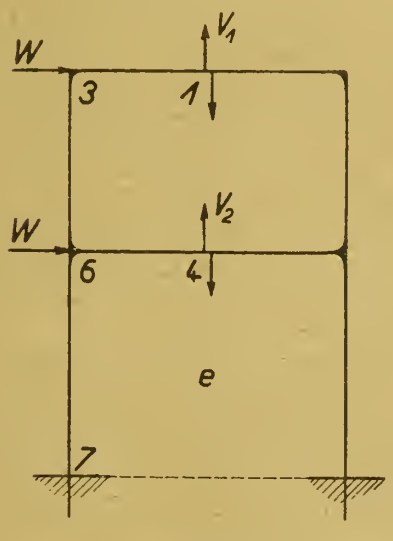


Fig. 92e.

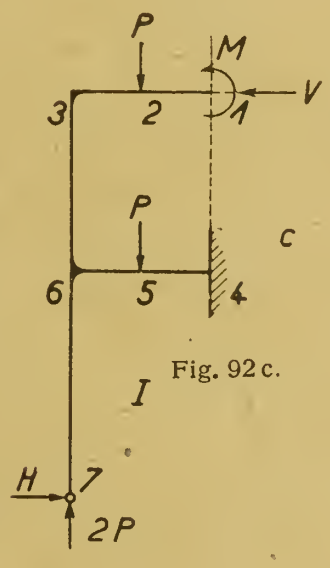


Fig. 92c.

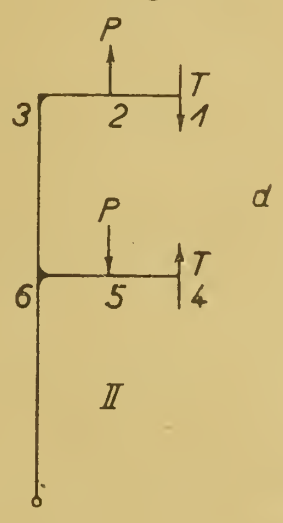


Fig. 92d.

Man beachte, daß sich Aufgaben dieser Art nicht selten bequem lösen lassen, wenn man eine Zerlegung der Belastung vornimmt. Diese Zerlegung muß nur so erfolgen, daß möglichst viel statisch unbestimmte Größen unabhängig voneinander werden. In den

Fig. 92 a und 92 b ist die in diesem Falle geeignete Zerlegung durchgeführt. Legt man beide Teilstücke wieder aufeinander, dann ergibt sich auch wieder die ursprüngliche Belastung.

Teilbelastung I (Fig. 92 c). Diese Aufgabe enthält nur drei statisch unbestimmte Größen, nämlich M, V und H. Sie lassen sich durch die drei Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M} \cdot dx = 0,$$

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V} \cdot dx = 0,$$

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial H} \cdot dx = 0$$

ermitteln. Man erhält

Nach M)

$$M\left\{2\,(a+b) + n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\} + \frac{V}{2} \cdot n\left\{2\,(a+b) + n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\}$$

$$+ H \cdot m\,(a+b) = P \cdot a\left\{2\,(a+b) + n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\} \quad (170a)$$

Nach V)

$$\frac{M}{2}\left\{2\,(a+b) + n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\} + \frac{V}{2} \cdot n\left\{2\,(a+b) + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\}$$

$$+ H \cdot m\,(a+b) = \frac{P \cdot a}{2}\left\{3\left(a + \frac{4}{3} \cdot b\right) + n \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\} \quad (170b)$$

Nach H)

$$M\,(a+b) + V \cdot n\,(a+b) + \frac{H}{2} \cdot m\left\{2\,(a+b) + \frac{2}{3} \cdot m \cdot \frac{J_2}{J_1}\right\}$$

$$= \frac{P \cdot a}{2}\left\{3\left(a + \frac{4}{3} \cdot b\right)\right\} \quad (170c)$$

Bei Einführung der Zahlenwerte lassen sich die gewünschten Größen leicht berechnen, wonach dann auch die an dem Rahmen wirksamen Momente ohne weiteres aufgestellt werden können.

$$M_1 = M, \quad M_2 = M, \quad M_3 = M - P \cdot a,$$

$$M_6 = P \cdot a - V \cdot n - M, \quad M_5 = 2 \cdot P \cdot a - V \cdot n - M - H \cdot m,$$

$$M_4 = 2 \cdot P \cdot a - V \cdot n - M - H \cdot m,$$

$$M_6 \text{ (unterhalb der Ecke 6)} = H \cdot m.$$

Teilbelastung II (Fig. 92 d). Hier erscheint nur eine statisch unbestimmte Größe, und zwar die Querkraft T, die von den obigen drei Größen unabhängig ist. Die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial T} \cdot dx = 0$$

liefert

$$\frac{2 \cdot T \cdot b}{3} \left\{ b^2 + 3 \cdot a \left(a + b + \frac{a^2}{3 \cdot b} \right) + \frac{3 \cdot n}{2 \cdot b} (a+b)^2 \cdot \frac{J_2}{J_1} \right\}$$

$$= P \cdot a \cdot n \, (a+b) \frac{J_2}{J_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

Die Momente sind

$$M_1 = 0, \quad M_2 = -T \cdot b, \quad M_3 = -T(a+b) + P \cdot a,$$
$$M_6 = -T(a+b) + P \cdot a, \quad M_5 = -T \cdot b, \quad M_4 = 0.$$

Die unter I und II ermittelten Momente werden nunmehr einfach zusammengeworfen. Hierbei ist darauf zu achten, daß der Drehungssinn der Momente richtig eingeführt wird.

2. Die wagerechte Belastung (Fig. 92 e).

Hierbei kann die Einspannung der Füße nicht vernachlässigt werden, da sie erhebliche Werte annimmt.

Als statisch unbestimmte Größen werden zweckmäßig die beiden Querkräfte V_1 und V_2 in der Mitte des Querbalkens eingeführt.

Man findet wieder mit Hilfe der Bedingungsgleichungen

$$\int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V_1} \cdot dx = 0 \text{ und } \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial V_2} \cdot dx = 0$$

folgende Beziehungen

$$V_1 \cdot c \left(\frac{c}{6} \cdot \frac{J_1}{J_2} + m + n \right) + V_2 \cdot c \cdot m = H \left\{ n^2 + 2 \cdot m \, (m+n) \right\} \quad (172a)$$

$$V_1 \cdot c \cdot m + V_2 \cdot c \left(\frac{c}{6} \cdot \frac{J_1}{J_2} + m \right) = H \cdot 2 \cdot m \, (m+n). \quad (172b)$$

Die Momente sind

$$M_1 = 0, \quad M_3 = -V_1 \cdot \frac{c}{2}, \quad M_{6\,(\text{Pfosten})} = H \cdot n - V_1 \cdot \frac{c}{2},$$

$$M_{6\,(\text{Stütze})} = H \cdot n - (V_1 + V_2) \cdot \frac{c}{2},$$

$$M_7 = H \, (n + 2 \cdot m) - (V_1 + V_2) \frac{c}{2}.$$

Beispiel 80. Eine Schiffsbrücke.

An dem in der Fig. 93 dargestellten Balken auf drei Schwimmbehältern, deren Entfernung verschieden ist, möge das Wesen dieser Aufgaben kurz dargelegt werden. Vorausgesetzt wird, daß die Pontons alle gleich und daß ihre wagerechten Querschnitte unveränderlich sind; die Eintauchtiefen sind daher proportional den Drucken.

1. Der Balken möge als vollkommen starr angenommen werden; diese Annahme ist berechtigt, da die Elastizität des Balkens gegenüber der großen Nachgiebigkeit der Stützpunkte eine geringe ist.

Der Balken sei belastet durch P. Das ganze System bewegt sich um einen Fixpunkt S. Die Entfernung s' dieses Punktes vom Auflager B findet sich wie folgt. Man denke die Mittelstütze C beseitigt und an ihrer Stelle die Kraft $C = -1$ angebracht. Dann ergeben sich die Auflagerdrucke

$$A_1 = 1 \cdot \frac{l_2}{l_0} \text{ und } B_1 = 1 \cdot \frac{l_1}{l_0}.$$

Trägt man diese Größen nach Fig. 93 a unter den Auflagern auf und verbindet die Abschnitte durch eine Gerade, dann erhält man ein Trapez, dessen Schwerpunkt den fraglichen Fixpunkt S darstellt. Hiernach ist

$$s' = \frac{2 \cdot l_2 + l_1}{3} \text{ und } s = \frac{2 \cdot l_1 + l_2}{3}.$$

Nach Kenntnis des Fixpunktes S lassen sich dann die Auflagerdrucke A, B und C nach den einfachen statischen Regeln ermitteln. Zunächst verteilt sich P zu gleichen Teilen, nämlich zu $\frac{P}{3}$ auf jede Stütze. Sodann erzeugt das Moment aus P um den Fixpunkt S noch weitere Drucke. Diese liegen nach Fig. 93 b auf einer Geraden und mögen mit A', B' und C' bezeichnet werden. Man kann schreiben

$$M = P(x' - s) = A'(l_0 - s) + C'(l_2 - s) + B' \cdot s.$$

Ferner nach der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$A' = C' \frac{l_0 - s}{l_2 - s} \text{ und } B' = C' \cdot \frac{s}{l_2 - s}.$$

Nach Einführung dieser Werte in die obere Gleichung ergibt sich

$$C' = \frac{P(x' - s)(l_2 - s)}{(l_0 - s)^2 + (l_2 - s)^2 + s^2}.$$

Die tatsächlichen Drucke auf die Pontons sind

$$A = \frac{P}{3} + A', \quad B = \frac{P}{3} - B', \quad C = \frac{P}{3} + C'.$$

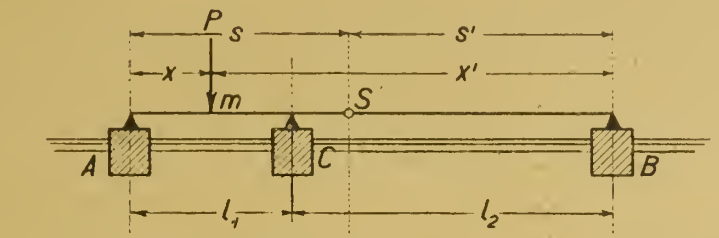


Fig. 93.

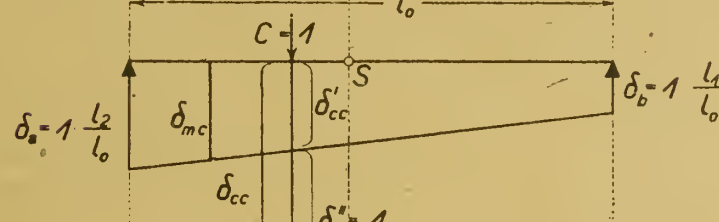


Fig. 93a.

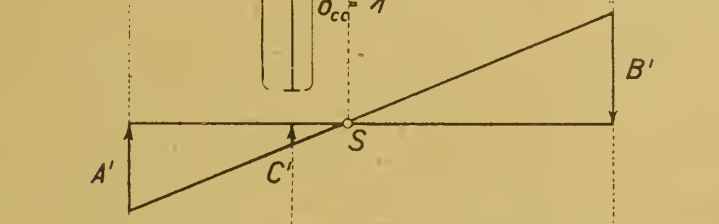


Fig. 93b.

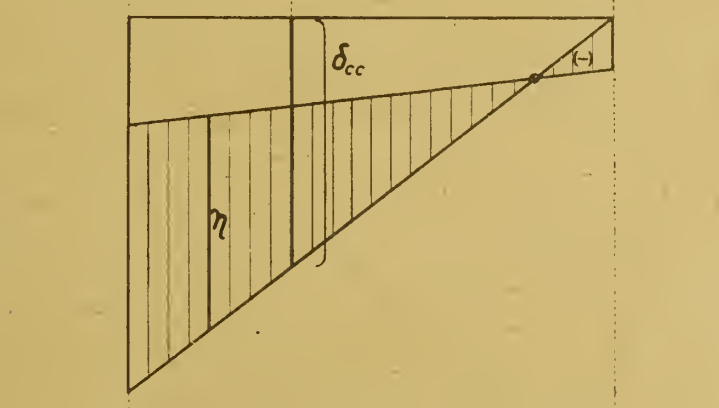


Fig. 93c.

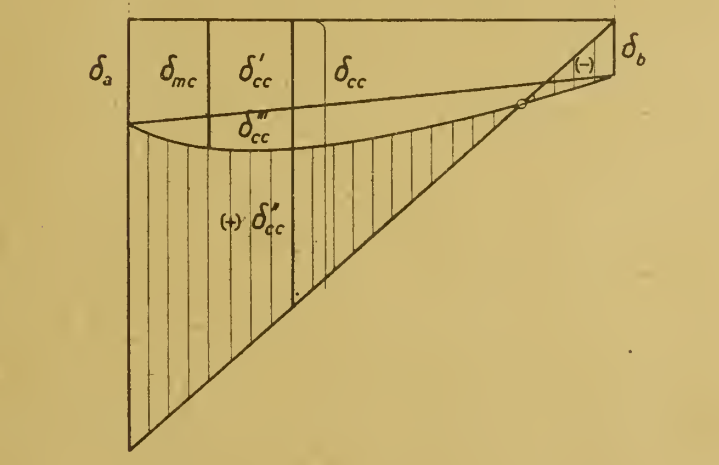


Fig. 93d.

Hiernach lassen sich dann weiter die Momente und die Querkräfte des Balkens ermitteln, womit die Aufgabe in statischer Beziehung gelöst ist.

Das vorstehende Verfahren läßt sich auch bei Balken auf beliebig vielen Pontons anwenden, und es ist dann besonders bequem, wenn die Entfernung der Stützen dieselbe ist. Dann liegt der Fixpunkt in der Balkenmitte, wodurch die Ermittelung der Stützdrucke, Momente usw., an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt. Bezeichnet n Anzahl der Pontons, dann verteilt sich P zu gleichen Teilen, also zu $\frac{P}{n}$ auf jede Stütze, während das Moment, hervorgerufen durch P um den Fixpunkt S, weitere Auflagerdrucke liefert, die nach einer durch den Fixpunkt gehenden Geraden verlaufen. Die Aufgabe ist eine ähnliche wie die Ermittelung der inneren Spannungen eines exzentrisch durch die Normalkraft P beanspruchten Druckstabes. Hier ist beispielsweise die Randspannung (verwandt mit dem Druck auf das äußerste Ponton)

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W}.$$

Für die Entfernung s_1 des Fixpunktes vom ersten Stützpunkt links, wenn der Reihe nach die beliebig großen Feldweiten mit l_1, l_2, l_3 ... bezeichnet werden, läßt sich leicht eine gesetzmäßig aufgebaute Formel entwickeln, und zwar aus der Bedingung, daß aus dem Drehmoment die Summe aller vertikalen Stützpunkte = Null sein muß.

Beispiel 4 Pontons = 3 Felder: Die Stützdrucke verlaufen nach einer durch den Fixpunkt gehenden Geraden. Die Abschnitte der Stützdrucke mögen der Reihe nach vom ersten Ponton links aus gezählt mit a, a_1, a_2 und a_3 bezeichnet werden. α sei der Neigungswinkel der schrägen Geraden. l_0 bedeute die Gesamtlänge aller Felder.

$$\text{Bedingung } \sum V = \sum a = 0,$$

$$a + a_1 - a_2 - a_3 = 0,$$

$$a = s_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a_1 = (s_1 - l_1) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a_2 = (l_0 - s_1 - l_3) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a_3 = (l_0 - s_1) \operatorname{tg} \alpha$$

oder oben eingesetzt

$$s_1 + s_1 - l_1 - l_0 + s_1 + l_3 - l_0 + s_1 = 0,$$

hieraus

$$s_1 = \frac{3 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + l_3}{4} \quad \ldots\ldots \quad (173)$$

Die Richtung der schrägen Geraden (Eintauchtiefen bzw. Pontondrucke) hängt ab von der Größe des äußeren Momentes.

In derselben Weise ermittelt man die Entfernung s_1 des fraglichen Fixpunktes bei einer beliebigen Anzahl von Stützen. Man kann die Formel jedoch ohne weiteres hinschreiben; für 6 Stützen beispielsweise ergibt sich

$$s_1 = \frac{5 \cdot l_1 + 4 \cdot l_2 + 3 \cdot l_3 + 2 \cdot l_4 + l_5}{6} \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

Die vorliegende Aufgabe läßt sich auch in dankbarer Weise mit Hilfe der Arbeitsgesetze und mit Benutzung von Einflußlinien lösen. Vergleiche die Berechnung von Trägern auf drei Stützen in früheren Abschnitten. Man beseitige das mittlere Ponton und bringe an dessen Stelle die Kraft $C = -1$ an. Dann senkt sich das Ponton A um die Strecke $\delta_a = 1 \cdot \frac{l_2}{l_0}$ und das Ponton B um die Strecke $\delta_1 = 1 \cdot \frac{l_1}{l_0}$. Verbindet man diese Abschnitte nach Fig. 93a durch eine Gerade, dann liefert das Trapez die Einflußlinie für den Stützendruck C. Bezeichnet δ_{mc} die Ordinate unter der Last P, dann ist

$$C = P \cdot \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Die Verschiebung δ_{cc} setzt sich zusammen aus dem Abschnitt δ_{cc}' des Trapezes unter C und aus der Senkung δ_{cc}'' dieses Pontons aus der Belastung $C = -1$. $\delta_{cc}'' = 1$. Siehe Fig. 93 a.

Die Einflußlinie für C dient weiter zur Bestimmung der Auflagerdrucke A und B. Es ist beispielsweise

$$A = P \cdot \frac{x'}{l_0} - C \cdot \frac{l_2}{l_0} = P \cdot \frac{x'}{l_0} - P \cdot \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} \cdot \frac{l_2}{l_0},$$

$$\text{(bei } P = 1) \quad A = \frac{l_2}{l_0 \cdot \delta_{cc}} \left\{ \frac{x' \cdot \delta_{cc}}{l_2} - \delta_{mc} \right\}.$$

Das erste Glied der Klammer läßt sich als Verhältnis

$$A_0 : x' = \delta_{cc} : l_2$$

schreiben und graphisch nach Fig. 93 c durch die schräge Gerade auftragen. Das zweite Glied der Klammer ist durch die Ordinaten der Einflußlinie für C gegeben. Die schraffierte Fläche liefert die Einflußlinie für den Stützdruck A. Es ist

$$A = \frac{l_2}{l_0 \cdot \delta_{cc}} \cdot P \cdot \eta.$$

In ähnlicher Weise entwickelt sich die Einflußlinie für das Moment einer beliebigen Balkenstelle.

2. Es soll die Elastizität des Balkens berücksichtigt werden. Hierbei kann das zuerst gezeigte Verfahren des Fixpunktes keine Anwendung finden, man wird vielmehr die Aufgabe, wie zuletzt dargelegt, mit Hilfe der Arbeitsgesetze und der Einflußlinien zu lösen suchen. Der Berechnungsvorgang ist derselbe wie beim letzten Beispiel: Beseitigung der Stütze C und Belastung dieser Stelle durch $C = -1$. Sodann Ermittelung der Senkungen der Pontons. Bezeichnet F den Querschnitt des Pontons und γ das Einheitsgewicht des Wassers, dann ist

$$\delta_a = 1 \cdot \frac{l_2}{l_0} \cdot \frac{1}{F \cdot \gamma} \text{ und } \delta_b = 1 \cdot \frac{l_1}{l_0} \cdot \frac{1}{F \cdot \gamma}.$$

Die Verbindung dieser Abschnitte (Fig. 93 d) ergibt wieder ein Trapez. Hiernach bestimmt man die Biegungslinie des Balkens bei der Belastung $C = -1$. Diese Kurve wird mit dem obigen Trapez zusammengefügt. Man erhält dann die Einflußlinie für den Stützendruck C.

$$C = P \cdot \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Die Verschiebung δ_{cc} setzt sich wie oben wieder zusammen aus dem Abschnitt δ_{cc}' des Trapezes unter C, ferner aus der Senkung $\delta_{cc}'' = 1 \cdot \frac{1}{F \cdot \gamma}$ des mittleren Pontons und schließlich aus der Durchbiegung δ_{cc}'' des Balkens unter C.

Mit Benutzung dieser Einflußlinie lassen sich sodann die Einflußlinien für weitere gesuchte Größen aufzeichnen. In der Fig. 93 d ist beispielsweise die Einflußlinie für den Stützendruck A analog der Entwicklung nach Fig. 93 c zur Darstellung gebracht.

Anhang.

Arbeit ist das Produkt aus Kraft mal Weg in Richtung der Kraft.

I. Arbeit der äußeren Kräfte.

1. Eine Kraft P greift den Knoten n eines Bauwerkes an. Das Bauwerk ändert seine Form. Infolgedessen legt der Knoten n einen Weg δ zurück. Auf diesem Wege leistet P eine Arbeit. Diese Arbeit ist jedoch nicht einfach Kraft mal Weg, sondern

$$A = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \delta,$$

weil die Kraft nicht plötzlich wirkt, sondern mit Null beginnt und geradlinig zunimmt bis zu ihrer vollen Größe.

Man nennt diese Arbeit »Formänderungsarbeit«.

2. Eine Kraft P greift wie oben den Knoten n an. Das Bauwerk ist nach erfolgter Formänderung wieder zur Ruhe gekommen. Jetzt greife eine andere Kraftwirkung an. Die Folge wird sein, daß der Knoten n einen weiteren Weg δ' zurücklegt. Auf diesem neuen Wege wirkt mit ihrer ganzen Größe die Kraft P, leistet somit eine Arbeit

$$A_v = P \cdot \delta'.$$

Diese Arbeit heißt »Verschiebungsarbeit«.

Die Verschiebungsarbeit ist also doppelt so groß als die Formänderungsarbeit.

II. Arbeit der inneren Kräfte.

Diese Kräfte können sein Längskräfte, Querkräfte, Spannkräfte, Momente.

1. Gegeben die Stabspannung S im Fachwerk. Die Länge des Stabes sei s. Die Spannkraft wird hervorgerufen durch eine Be-

lastung P. Das Bauwerk deformiert sich und der Stab ändert seine Länge um das Maß Δs. Hierbei leistet die Spannkraft S eine »Formänderungsarbeit« von der Größe

$$A = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \Delta s.$$

Diese Arbeit muß immer negativ sein; beispielsweise sei S eine Zugspannung. Dann wirkt S auf die Knoten im Sinne einer Annäherung, während die Längenänderung Δs eine Abstandvergrößerung der Knoten bedeutet.

Erleidet nun der Stab bei diesem Zustande eine weitere Längenänderung $\Delta s'$ infolge einer anderen Ursache, dann leistet die Spannkraft S eine »Verschiebungsarbeit«

$$A_v = S \cdot \Delta s'.$$

III. Arbeit der inneren Kräfte (»Formänderungsarbeit«).

a) Es sei gegeben ein Stab in einem Fachwerk. S sei die Spannkraft, s die Stablänge. Nach oben war die Formänderungsarbeit, die in der Folge mit A_i bezeichnet werden soll

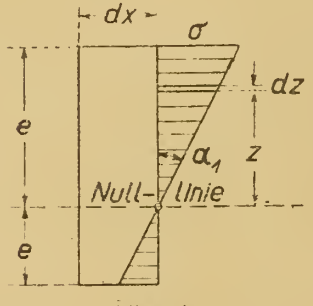


Fig. 1.

$$A_i = \frac{S \cdot \Delta s}{2}.$$

Wegen

$$\Delta s = \frac{S \cdot s}{F \cdot E},$$

wo F den Querschnitt und E die Elastizitätszahl bedeuten, folgt

$$A_i = \frac{S^2 \cdot s}{2 \cdot F \cdot E}.$$

Kommen mehrere Stäbe bei einem Fachwerk in Betracht, dann wird

$$A_i = \sum \frac{S^2 \cdot s}{2 \cdot F \cdot E}.$$

b) Es sei gegeben ein durch Momente gebogener Tragkörper. Man denke sich aus einem Stabe von der Länge l ein Stück von der Länge dx und der Breite b herausgeschnitten (Fig. 1).

Es bestehe an der äußersten Faser die Spannung σ. Dann wirkt auf ein Element in der Entfernung z von der Nullinie die Spannung

$$\sigma \cdot \frac{z}{e}.$$

Das Element hat eine Breite b, also einen Querschnitt $b \cdot dz$. Hiernach ist die Spannkraft auf das ganze Element

$$\sigma \cdot \frac{z}{e} \cdot b \cdot dz.$$

Die Formänderungsarbeit an dem Element ist

$$\left(\text{vergleiche } A_i = \frac{S^2 \cdot s}{2 \cdot F \cdot E}\right)$$

$$d\,(d\,A_i) = \frac{\left(\sigma \cdot \frac{z}{e} \cdot b \cdot dz\right)^2 \cdot dx}{2 \cdot b \cdot dz \cdot E} = \frac{\sigma^2 \cdot z^2 \cdot b \cdot dz \cdot dx}{2 \cdot e^2 \cdot E}$$

Die Arbeit, die aufgenommen werden muß, um den ganzen Stab zu biegen, beträgt

$$A_i = \int_0^l \frac{\sigma^2 \cdot dx}{2 \cdot e^2 \cdot E} \cdot \int_{-e_1}^{+e} b \cdot z^2 \cdot dz.$$

Wegen $\sigma = \frac{M \cdot e}{J}$ und weil $\int_{-e_1}^{+e} b \cdot z^2 \cdot dz = J$, ergibt sich

$$A_i = \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot J \cdot E}.$$

IV. Arbeit der inneren Kräfte (»Verschiebungsarbeit«).

a) Es sei wieder ein Stab in einem Fachwerk gegeben.

Es wirkt auf den Stab die Spannkraft S. Nach erfolgter Deformation kommt der Stab wieder zur Ruhe. Jetzt erleide er eine neue Längenänderung Δs_1 infolge einer anderen Ursache. Die geleistete Verschiebungsarbeit der Spannkraft S auf dem neuen Wege Δs_1 ist

$$A_i^v = S \cdot \Delta s_1.$$

Die Ursache der Änderung Δs_1 kann eine gedachte Größe (Rechnungsgröße) sein. Es besteht die Beziehung

$$\Delta s_1 = \frac{S_1 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Dies eingesetzt liefert

$$A_i^v = \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Handelt es sich um eine Reihe von Stäben im Fachwerk, dann ist

$$A_i^v = \sum \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Die Änderung Δs_1 war beliebig gewählt, kann also so sein, daß sie gerade der Spannkraft S entsprechen würde. Der Sonderfall wäre somit $\Delta s_1 = \Delta s$, das heißt $S_1 = S$. Dann ergibt sich

$$A_i^v = \frac{S^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Bei einer Anzahl von Stäben

$$A_i^v = \sum \frac{S^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

b) Es sei wieder gegeben ein durch Momente gebogener Tragkörper.

Es wirkt zunächst das Moment M. Die zugehörige Spannung an der äußersten Faser ist σ (Fig. 1).

Betrachtet man ein Stück des Balkens von der Länge dx, so erfährt dieses durch eine neue Ursache M_1 eine weitere Biegung um den Winkel $\Delta\alpha_1$. Ein Element dz in der Entfernung z von der neutralen Achse erhält eine Spannung

$$\sigma \cdot \frac{z}{e} \cdot b \cdot dz.$$

Die Deformation des Elementes aus dem Einfluß M_1 ist

$$z \cdot \Delta\alpha_1.$$

Hiernach entwickelt sich eine Verschiebungsarbeit

$$d(dA_i^v) = \sigma \frac{z}{e} \cdot b \cdot dz \cdot z \cdot \Delta\alpha_1.$$

Die Längenänderung in der äußersten Faser ist

$$e \cdot \Delta\alpha_1.$$

Ferner ist

$$e \cdot \Delta\alpha_1 = \frac{\sigma_1 \cdot dx}{E}$$

und

$$\sigma_1 = -\frac{M_1 \cdot e}{J}$$

oder

$$\Delta\alpha_1 = \frac{M_1 \cdot dx}{J \cdot E}.$$

Sodann besteht

$$\sigma = -\frac{M \cdot e}{J}.$$

Setzt man diese Werte oben ein, dann folgt

$$d\,(d\,A_i^v) = \frac{M \cdot e}{J} \cdot \frac{z}{e} \cdot b \cdot dz \cdot z \cdot \frac{M_1 \cdot dx}{J \cdot E}$$

oder

$$A_i^v = \int_0^l \frac{M \cdot M_1 \cdot dx}{J^2 \cdot E} \cdot \int_{-e}^{+e} b \cdot z^2 \cdot dz$$

$$= \int_0^l \frac{M \cdot M_1}{J \cdot E} \cdot dx.$$

Erteilt man dem Tragkörper eine solche zweite Änderung, wie sie durch das Moment M_1 hervorgerufen wird, wenn also $M_1 = M$, dann ergibt sich

$$A_i^v = \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{J \cdot E}.$$

Vorstehende Herleitungen liefern noch einmal den Satz: Die Verschiebungsarbeit ist doppelt so groß als die Formänderungsarbeit.

Weiter können auch Längskräfte N und Querkräfte V Formveränderungen hervorrufen. Die entsprechenden Arbeiten lassen sich auf einem ähnlichen Wege wie oben ermitteln. Man erhält schließlich allgemein

Formänderungsarbeit

$$A_i = \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot J \cdot E} + \int \frac{N^2\,ds}{2 \cdot F \cdot E} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot K \cdot F},$$

Verschiebungsarbeit

$$A_i^v = \int \frac{M \cdot M_1 \cdot ds}{J \cdot E} + \int \frac{N \cdot N_1 \cdot ds}{F \cdot E} + \int \frac{V \cdot V_1 \cdot ds}{G \cdot K \cdot F}.$$

Und für den erwähnten Sonderfall, wo die Arbeit leistende Kraftgruppe die gleiche ist wie die die Formveränderung erzeugende Verschiebungsgruppe ergibt sich

$$A_i^v = \int \frac{M^2 \cdot ds}{J \cdot E} + \int \frac{N^2 \cdot ds}{F \cdot E} + \frac{V^2 \cdot ds}{G \cdot K \cdot F}.$$

Die allgemeine Arbeitsgleichung lautet:

Die Verschiebungsarbeit der äußeren Kräfte ist gleich der Verschiebungsarbeit der inneren Kräfte.

$$\sum Q_1 \cdot \delta = A_i^v.$$

I. Das Fachwerk.

$$\sum Q_1 \cdot \delta = \sum \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Es bezeichnen:

Kraftgruppe die Ursachen ΣQ_1 und die dadurch hergerufenen Spannungen S_1.

Verschiebungsgruppe die Formveränderungen $\frac{S \cdot s}{F \cdot E}$ und die daraus folgenden Verschiebungen δ der Angriffspunkte von Q_1 in deren Richtungen.

Wählt man eine Kraftgruppe, bei der die Last 1 in dem Punkte wirkt, dessen Verschiebung δ ermittelt werden soll, so lautet die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta = \sum \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{F \cdot E},$$

wonach sich die gesuchte Verschiebung berechnen läßt.

II. Das vollwandige Tragwerk.

$$\sum Q_1 \cdot \delta = \int \frac{M \cdot M_1 \cdot ds}{J \cdot E} + \int \frac{N \cdot N_1 \cdot ds}{F \cdot E} + \int \frac{V \cdot V_1 \cdot ds}{G \cdot K \cdot F}.$$

Soll δ am Orte n ermittelt werden, so wählt man als einfachste Kraftgruppe die Kraft 1 am Orte n. Also

$$1 \cdot \delta_n = \int \frac{M \cdot M_1 \cdot ds}{J \cdot E} + \int \frac{N \cdot N_1 \cdot ds}{F \cdot E} + \int \frac{V \cdot V_1 \cdot ds}{G \cdot K \cdot F}.$$

Eine andere Form schreibt sich

$$1 \cdot \delta_n = \int \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{N}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{V}{G \cdot K \cdot F} \cdot \frac{\partial V}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Sie entwickelt sich wie folgt.

Beispielsweise liefert die Last P_n am Orte und im Sinne der Formveränderung den Beitrag zu dem Werte M_1 in der vorletzten Formel

$$M_1 \cdot P_n.$$

Also

$$M = M_{P\ (\text{außer } P_n)} + M_1 \cdot P_n.$$

Hiernach

$$\frac{\partial M}{\partial P_n} = M_1.$$

Dies in die vorletzte Gleichung eingesetzt ergibt in bezug auf M das erste Glied der Formel

$$1 \cdot \delta_n = \int \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Verfährt man ebenso bei den Normal- und Querkräften, so entsteht schließlich die vorletzte obige vollständige Gleichung.

Befindet sich am Orte n der Formveränderung keine Einzellast, so muß dort eine Last P_n angenommen werden, die an geeigneter Stelle in der Rechnung wieder gleich Null zu setzen ist.

Die Gleichung für die Größe der Formänderungsarbeit lautet nach oben

$$A_i = \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot J \cdot E} + \int \frac{N^2 \cdot ds}{F \cdot E} + \int \frac{V^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot K \cdot F}.$$

Ihr partieller Differentialquotient nach der Last P_n ist

$$\frac{\partial A_i}{\partial P_n} = \frac{\partial \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot J \cdot E}}{\partial P_n} + \frac{\partial \int \frac{N^2 \cdot ds}{2F \cdot E}}{\partial P_n} + \frac{\partial \int \frac{V^2 \cdot ds}{2G \cdot K \cdot F}}{\partial P_n}$$

oder

$$\frac{\partial A_i}{\partial P_n} = \int \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{N}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{V}{G \cdot K \cdot F} \cdot \frac{\partial V}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem früher erzielten überein, so daß sich ergibt

$$1 \cdot \delta_n = \frac{\partial A_i}{\partial P_n},$$

das heißt, die Formänderung kann aus der Arbeit ermittelt werden, wenn an ihrem Orte eine Einzellast wirkt.

Diese Beziehung bietet eine bequeme Handhabe für die Ermittlung statisch nicht bestimmbarer Größen, wenn an Stelle von P_n die Unbekannte X gesetzt wird. Für alle Fälle, wo der Angriffs-

punkt von X starr oder verschieblich als Funktion von X ist, kann geschrieben werden

$$\delta_X = \frac{\partial A_i}{\partial X} = 0,$$

das heißt, die statisch nicht bestimmbaren Größen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.

$$0 = \int \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \cdot ds + \int \frac{N}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} \cdot ds + \int \frac{V}{G \cdot K \cdot F} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} \cdot ds.$$

Ist der Angriffspunkt von X nicht starr, aber in seiner Verschieblichkeit auch keine Funktion von X, z. B. die geschätzte Senkung Δ_x einer Stütze im Sinne von X, so wird

$$\frac{\partial A_i}{\partial X} = -\Delta_x.$$

Natürlich haben diese Gesetze auch Gültigkeit für das gegliederte Bauwerk.

Es möge an folgender Aufgabe die Anwendung der obigen Gleichungen gezeigt werden. Ein einseitig eingespannter Balken mit gleichmäßig verteilter Belastung $Q = p \cdot l$. Es ist die Senkung δ am Ende des Balkens zu ermitteln. Wegen des geringen Einflusses soll die Wirkung der Querkräfte vernachlässigt werden. Längskräfte kommen überhaupt nicht in Betracht.

Wir belasten das Balkende mit der gedachten Kraft P_n in Richtung der Senkung δ. Es war

$$\delta = \int \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Das Moment im Abstande x vom Ende ist

$$M_x = \frac{p \cdot x^2}{2} + P_n \cdot x, \qquad \frac{\partial M_x}{\partial P_n} = x.$$

Mithin

$$\delta = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_n} \cdot dx = \frac{1}{J \cdot E} \int_0^l \left\{ \frac{p \cdot x^3}{2} + P_n \cdot x^2 \right\} dx$$

oder wegen $P_n = 0$

$$\delta = \frac{1}{J \cdot E} \int_0^l \frac{p \cdot x^3}{2} \cdot dx = \frac{1}{J \cdot E} \cdot \frac{p \cdot l^4}{8} = \frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot J \cdot E}.$$

Derselbe Balken werde am Ende unterstützt. Gesucht der Stützendruck X. Wir setzen oben statt P_n die Größe $-X$ und erhalten auf demselben Wege

$$\delta = 0 = \int \frac{M_x}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} \cdot dx = \frac{1}{J \cdot E} \int_0 \left\{ -\frac{p \cdot x^3}{2} + X \cdot x^2 \right\} dx$$

$$-\frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot J \cdot E} + \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E} = 0,$$

hieraus

$$X = \frac{3 \cdot Q}{8}.$$

Man kann also mit Hilfe einer einzigen Entwicklung sowohl die Senkung δ wie auch den Stützendruck X berechnen, je nachdem man in der Gleichung

$$\delta = -\frac{Q \cdot l^3}{8 \cdot J \cdot E} + \frac{X \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E}$$

X oder δ gleich Null werden läßt.

III. Das Fachwerk.

Die Gleichung

$$\sum Q_1 \cdot \delta = \sum \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{F \cdot E}$$

kann auch zur Berechnung statisch unbestimmter Größen benutzt werden. Es sei der Mittelstützendruck X des Fachwerkes Fig. 2 zu bestimmen. Man denke sich an Stelle von ΣQ_1 die unbekannte Kraft X und an Stelle von δ die Verschiebung δ_{aa} hergerufen durch $X = -1$. Die Spannkräfte S_1 entsprechen dann der Belastung durch $X = -1$, während die Spannkräfte S_0 hervorgerufen werden durch die Belastung aus P. Es ergibt sich

$$X \cdot \delta_{aa} = \sum S_1 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{F \cdot E},$$

nach früherem war

$$\delta_{aa} = \sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Somit folgt

$$X = \frac{\sum S_1 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{F \cdot E}}{\sum \frac{S_1^2 \cdot s}{F \cdot E}}.$$

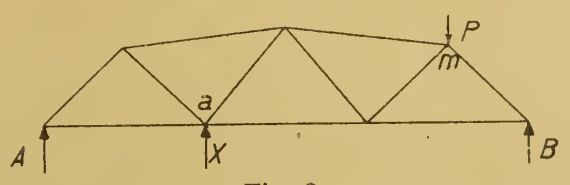


Fig. 2.

Die Beziehungen

$$\delta_n = \frac{\partial A_i}{\partial P_n}$$

und

$$0 = \frac{\partial A_i}{\partial X}$$

bzw.

$$-\Delta_X = \frac{\partial A_i}{\partial X}$$

haben, wie bereits gesagt, auch Gültigkeit für das Fachwerk. Setzt man in der beim vollwandigen Tragwerk gefundenen Formel an Stelle von N die Stabkraft S, so folgt

$$\delta_n = \frac{\partial A_i}{\partial P_n} = \int \frac{S}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial S}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Bei dem obigen Fachwerk sei die Senkung des Knotens a aus P, wenn X beseitigt ist, zu ermitteln. Die Spannkraft S beträgt, wenn P_n eine gedachte Last im Knoten a bedeutet

$$S = S_0 + P_n \cdot S_1.$$

Es ist

$$\frac{\partial S}{\partial P_n} = S_1,$$

dies oben eingesetzt, ergibt (wenn $P_n = 0$)

$$\delta_n = \delta_{am} = \int S_1 \cdot \frac{S_0}{F \cdot E} \cdot ds = \sum S_1 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{F \cdot E}.$$

Tritt an Stelle von P_n die unbekannte Größe X, dann wird

$$0 = \frac{\partial A_i}{\partial X} = \int \frac{S}{F \cdot E} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} \cdot ds.$$

Gegenseitigkeit der Formveränderung.

$$\delta_{am} = \delta_{ma}.$$

Die erste Kennziffer bezeichnet den Ort, die zweite die Ursache der Verschiebung. Gegeben ein Fachwerk. Man betrachte zwei Knoten a und m. In a greife an die Last P_a, in m die Last P_m.

Denkt man sich P_a als Kraftgruppe und P_m als Verschiebungsgruppe, dann lautet die Arbeitsgleichung

$$P_a \cdot \delta_{am} = \sum S_a \cdot \frac{S_m \cdot s}{F \cdot E}.$$

Im anderen Falle, wenn P_m als Kraftgruppe und P_a als Verschiebungsgruppe angenommen wird, ergibt sich

$$P_m \cdot \delta_{ma} = \sum S_m \cdot \frac{S_a \cdot s}{F \cdot E}.$$

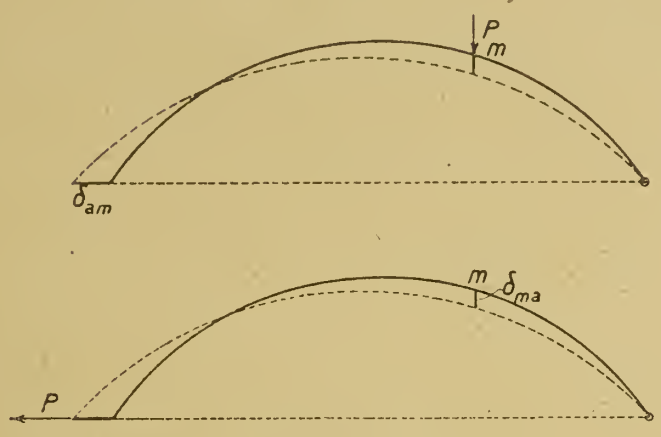


Fig. 3a—

Diese beiden Gleichungen liefern, da die rechten Seiten einander gleich sind

$$P_a \cdot \delta_{am} = P_m \cdot \delta_{ma}.$$

Setzt man $P_a = P_m$, dann folgt

$$\delta_{am} = \delta_{ma},$$

das heißt »die Verschiebung des Punktes a (in Kraftrichtung) aus der Last P in m ist gerade so groß wie die Verschiebung des Punktes m (in Kraftrichtung) aus derselben Last P in a« (siehe Fig. 3 a und 3 b).

Dieser Satz gilt allgemein für alle Verschiebungen und Drehungen am Fachwerk wie am vollwandigen Tragwerk und findet wertvolle Anwendungen insbesondere bei der Entwicklung von Einflußlinien.

Siehe Beispiel Fig. 4. Es sei ein durchgehender Balken auf drei Stützen mit der Last P im Punkte m zur Aufgabe gestellt. Der Stützendruck X sei die statisch Unbestimmte. Man denke sich die Stütze bei a fortgenommen und an ihre Stelle die Last $X = -1$ angebracht. Unter der Wirkung dieser Belastung verbiegt sich der Balken. Die Biegungslinie sei in der Fig. 4 b gefunden. Sodann belaste man den Balken mit der Last $P = 1$ in m. Die entstehende Biegungslinie möge in der Fig. 4 c ermittelt sein. Nach dem Arbeitsgesetz muß sein

$$P \cdot \delta_{am} - X \cdot \delta_{aa} = 0$$

oder

$$X = P \cdot \frac{\delta_{am}}{\delta_{aa}}.$$

Bei fester Lage der Last P wäre das Berechnungsverfahren noch brauchbar, sobald jedoch P wandert, müßte für jede neue Stellung m eine Biegungslinie wie Fig. 4 c gezeichnet werden. Nun besteht aber die wichtige Beziehung $\delta_{am} = \delta_{ma}$, wodurch die Aufgabe eine bedeutende Erleichterung erfährt. Es kann sehr einfach geschrieben werden

$$X = P \cdot \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

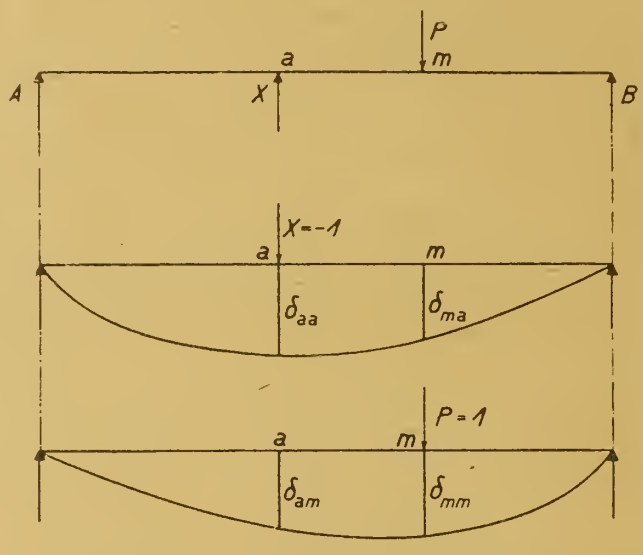


Fig. 4 a.

Fig. 4 b.

Fig. 4 e.

Es bedarf also nur der Aufzeichnung einer einzigen Biegungslinie für die Belastung $X = -1$ (Fig. 4 b).

Eine weitere Anwendung des Gesetzes $\delta_{am} = \delta_{ma}$ bei vorstehender Aufgabe besteht in folgendem. Es soll die Senkung des Punktes a, wenn die Stütze daselbst beseitigt ist, ermittelt werden.

$$\delta = P \cdot \delta_{am}$$

oder

$$\delta = P \cdot \delta_{ma}.$$

Man sieht, daß die Biegungslinie aus $X = -1$ zugleich die Einflußlinie für den Stützendruck X, sowie die Einflußlinie für die Senkung des Punktes a, wenn die Stütze bei a beseitigt ist, bedeutet.

Die entwickelten Beziehungen und Gesetze haben natürlich auch Gültigkeit bei mehrfach statisch unbestimmten Bauwerken. Ihre Anwendung wurde bereits früher bei den praktischen Aufgaben, insbesondere bei Beispiel 24, gezeigt.

Zeichnerische Verfahren zur Ermittelung von Formänderungen.

1. Die Momentenfläche als Belastung.

Gegeben ein einseitig eingespannter Balken mit einer Last P am Ende. Das Moment an der Einspannstelle ist $M_e = P \cdot l$. Die

Fig. 5 zeigt den Verlauf der Momentenlinie über den ganzen Träger. Betrachtet man die Momentenfläche als Belastung und zeichnet dafür das Seilpolygon, so liefert dieses die Biegungslinie des Trägers. Diese Tatsache ergibt sich wie folgt.

$$\delta_n = \int_0^l \frac{M}{J \cdot E} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P} \cdot dx,$$

$$M_x = P \cdot x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = x,$$

$$\delta_n = \int_0^l \frac{P \cdot x^2}{J \cdot E} \cdot dx = \frac{1}{J \cdot E} \int_0^l P \cdot x \cdot dx \cdot x.$$

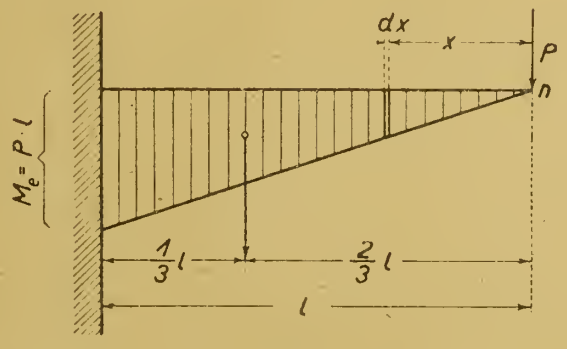


Fig. 5.

$P \cdot x$ ist das Moment an der Stelle im Abstande x vom Ende. $P \cdot x \cdot dx$ bedeutet infolgedessen die Belastung daraus auf der Strecke dx. Das Moment aus dieser Belastung in bezug auf den Punkt n beträgt

$$P \cdot x \cdot dx \cdot x = P \cdot x^2 \cdot dx.$$

Die Summe der Momente hat den Wert

$$\int_0^l P \cdot x^2 \cdot dx.$$

Somit wird

$$\delta_n = \frac{1}{J \cdot E} \int_0^l P \cdot x^2 \cdot dx = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E}$$

Übereinstimmend hiermit und übereinstimmend mit dem zeichnerischen Ergebnis ergibt sich

$$\delta_n = P \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{J \cdot E} = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot J \cdot E}.$$

Dieses zeichnerische Verfahren ist sehr bequem, insbesondere bei solchen Aufgaben, wo es nicht auf tatsächliche Durchbiegungen,

sondern auf den prinzipiellen Verlauf der Biegungslinie ankommt. Zum Beispiel bei durchgehenden Trägern auf unnachgiebigen Stützen.

2. Der Williotsche Verschiebungsplan.

Gegeben ein Stabdreieck $a — b — c$ (Fig. 6). Die Knotenpunkte a und b mögen eine Verschiebung nach a' und b' erfahren. Hiernach würden die Stäbe $a — c$ und $b — c$ in die Lage $a' — c_2'$ und $b' — c_1'$ kommen. Sodann erleide der Stab $a — c$ eine Verkürzung um das Maß $c_2' — c_2'' = \Delta_2$, und der Stab $b — c$ eine Verlängerung um das Maß $c_1' — c_1'' = \Delta_1$. Infolge aller dieser Änderungen wird der Knoten c in eine andere Lage c' gezwungen. Dieser Punkt c' wird wie folgt gefunden. Man beschreibt mit dem Stabendpunkt c_1'' einen Kreisbogen um den Punkt b', desgleichen mit dem Stabendpunkt c_2'' einen Kreisbogen um den Punkt a'. Der Schnittpunkt dieser beiden Kreisbögen liefert dann den gesuchten Punkt c', d. h. den Ort des verschobenen Knotens c.

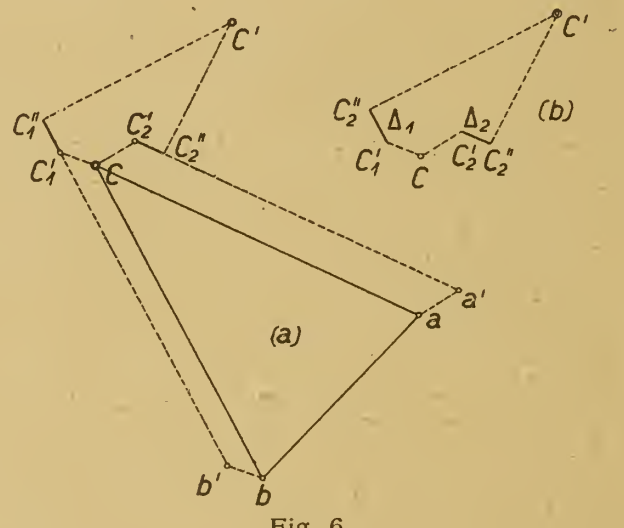


Fig. 6.

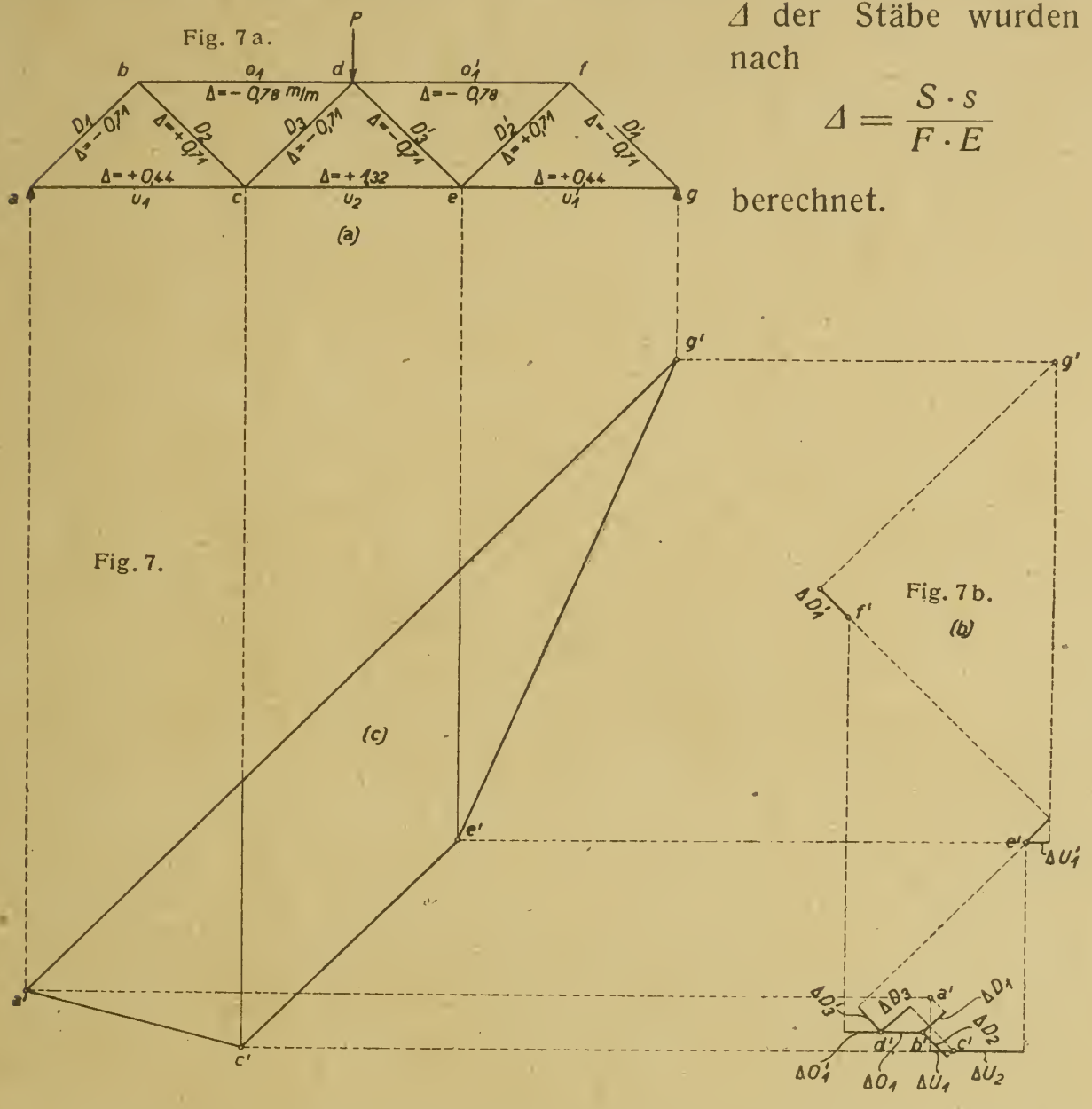
Die beschriebene Konstruktion kann aber nur in der wahren Größe des Stabdreieckes ausgeführt werden. Es leuchtet jedoch ein, daß man mit genügender Genauigkeit an Stelle der Kreisbögen einfach die Senkrechten zu den Stäben ziehen darf. Hiernach ist es dann möglich, die Verschiebung des fraglichen Punktes in einem beliebigen Maßstabe und in einem sehr kleinen Plane aufzufinden. (Vgl. Fig. 6 b.)

Der Williotsche Verschiebungsplan ist nun nichts anderes als die wiederholte Anwendung der vorbeschriebenen Konstruktion bei einem Fachwerk.

Beispiel. Ein Fachwerk nach Fig. 7. In der Fig. 7b ist der Verschiebungsplan entwickelt. Die erforderlichen Längenänderungen Δ der Stäbe wurden nach

$$\Delta = \frac{S \cdot s}{F \cdot E}$$

berechnet.



Es ist ganz gleichgültig, welchen Knoten des Fachwerks man als Ausgangspunkt des Planes wählt; zweckmäßig würde man bei dieser Aufgabe wegen der Symmetrie der Konstruktion und der Belastung die Mitte des mittleren Untergurtstabes als Festpunkt annehmen. Bei dem vorliegenden Plan wurde der Stab $b — d$ in seiner Lage festgehalten gedacht. Die Verschiebungen oder Senkungen der Knoten des Fachwerks findet man durch wagerechtes Herüberholen der im Verschiebungsplan ermittelten Punkte unter die Systemzeichnung (Fig. 7 c). Hier wurden die Senkungen der Untergurtknoten in bezug auf die Auflager a und g festgestellt.

3. Das Verfahren der w-Gewichte.

Man betrachtet bei diesem Verfahren die Biegungslinie als das Seilpolygon zu den in den Knoten des Fachwerkes angreifend ge-

dachten w-Gewichten. Diese w-Gewichte lassen sich nach folgenden Formeln berechnen. Für die Knoten des Untergurtes beispielsweise zwecks Ermittelung der Senkung dieses Stabzuges

$$w_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\sigma_m}{E} \cdot \operatorname{tg}\beta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} \cdot \operatorname{tg}\beta_{m+1}.$$

Siehe Fig. 8 und Fig. 8 a.

Multipliziert man die Formel mit E, dann ergibt sich

$$E \cdot w_m = E \cdot \Delta\vartheta_m - \sigma_m \cdot \operatorname{tg}\beta_m + \sigma_{m+1} \cdot \operatorname{tg}\beta_{m+1}.$$

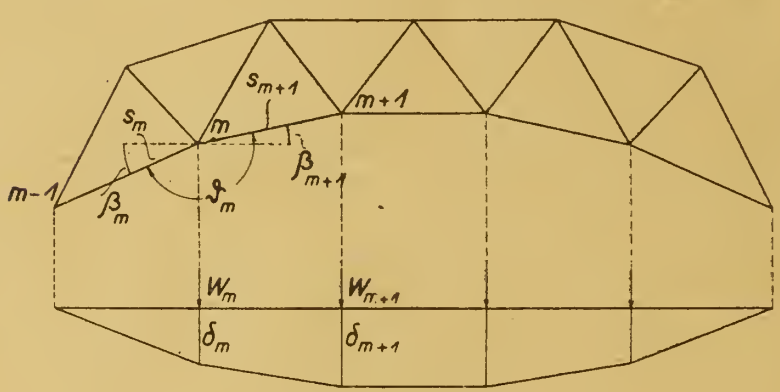


Fig. 8—8a.

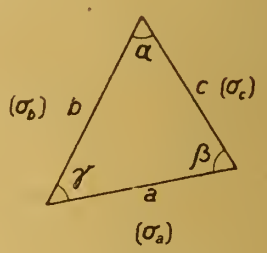


Fig. 8b.

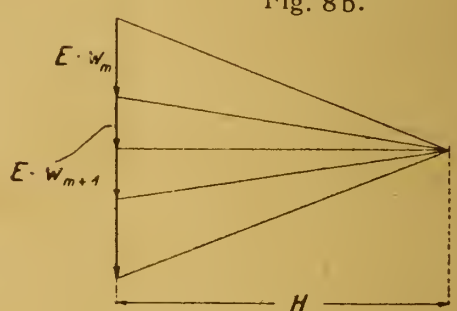


Fig. 8c.

Die Winkeländerung $E \cdot \Delta\vartheta_m$ setzt sich zusammen aus den drei Winkeländerungen der um den Knoten m liegenden Stabdreiecke.

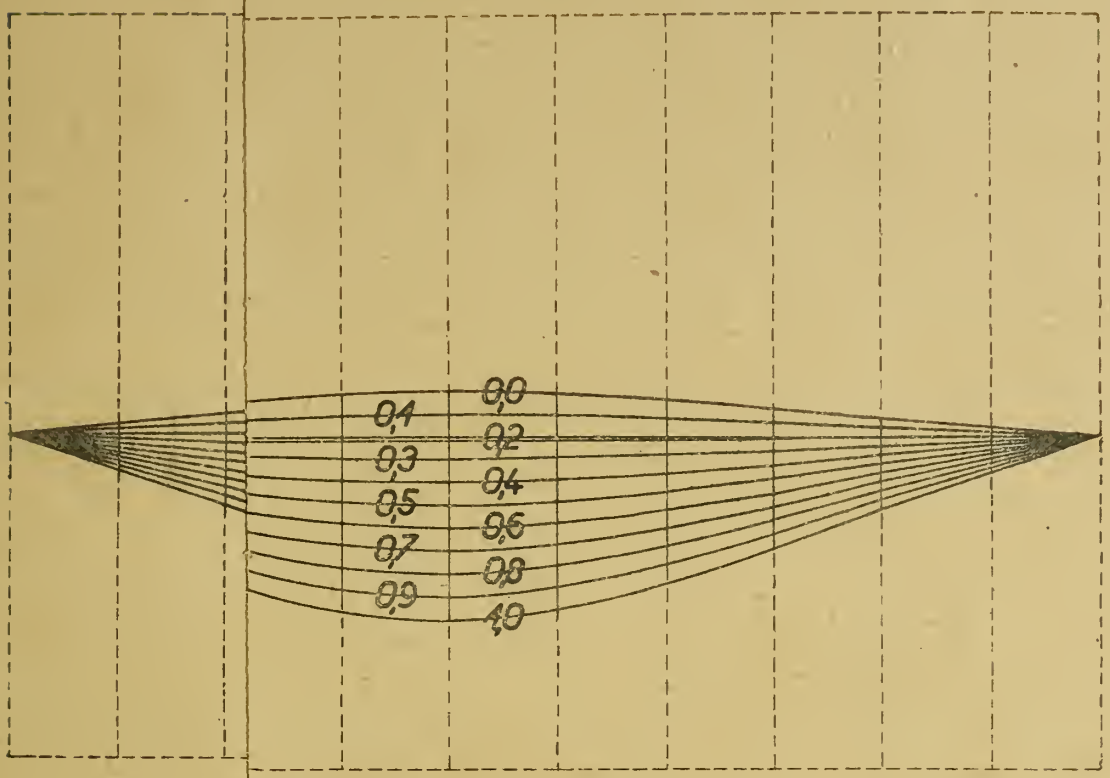
Beispielsweise berechnet sich die Winkeländerung des Winkels γ der Fig. 8 b nach folgender Formel

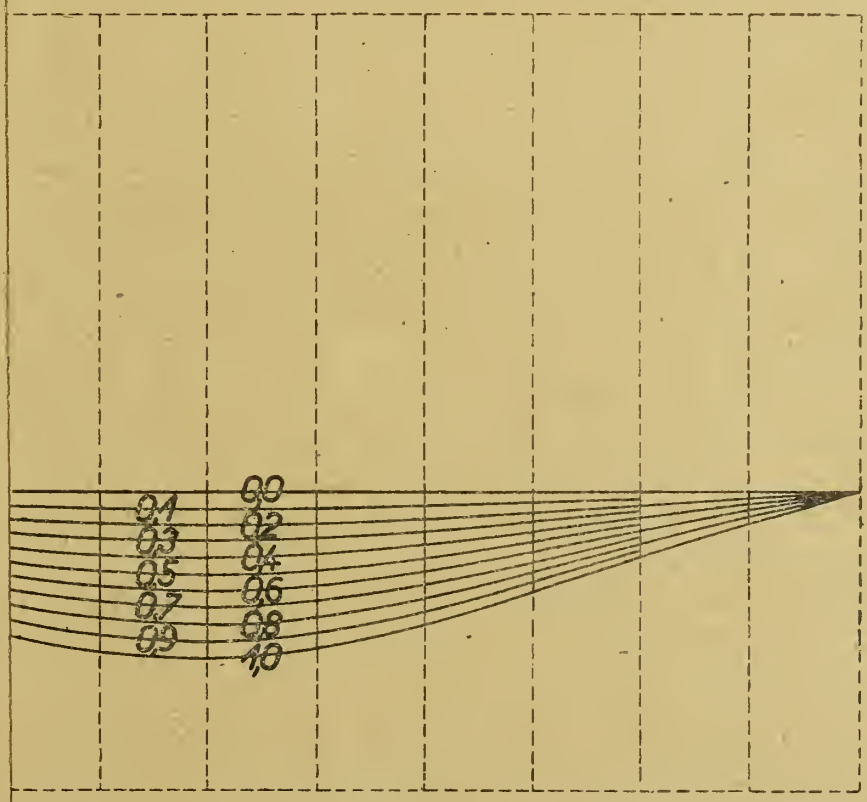
$$E \cdot \Delta\gamma = (\sigma_c - \sigma_a) \operatorname{cotg}\beta + (\sigma_c - \sigma_b) \operatorname{cotg}\alpha.$$

Nach Vorstehendem lassen sich somit die w-Gewichte für jeden Knoten ermitteln.

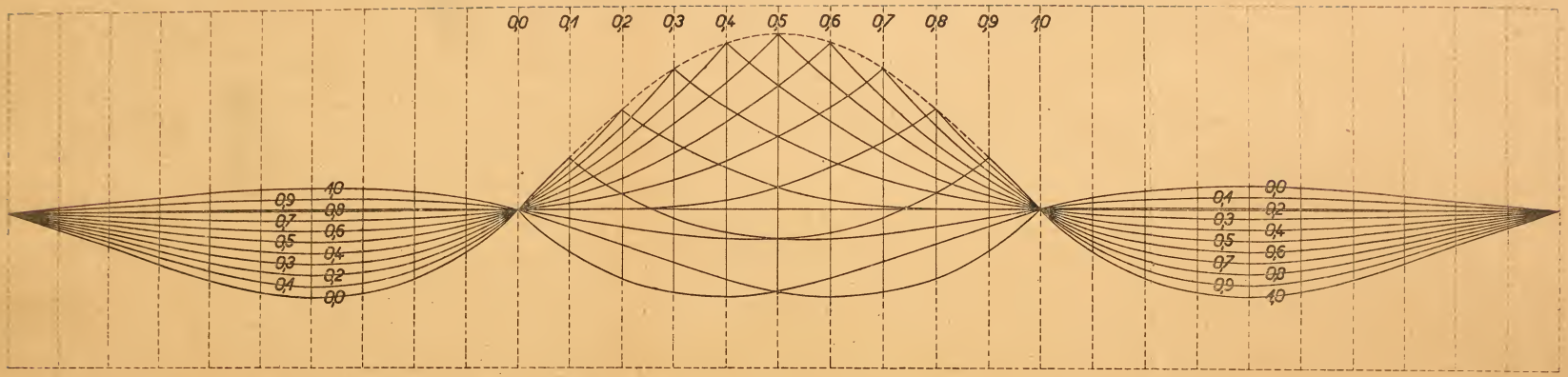
In dem Krafteck, nach welchem das Seilpolygon in der gewöhnlichen Weise gezeichnet wird, werden die mit E multiplizierten w-Gewichte nacheinander getragen. Sodann wird die Polweite des Krafteckes ein beliebiges Maß H sein. Hiernach müssen also die im Seilpolygon gefundenen Ordinaten, um die wahren Senkungen zu erhalten, multipliziert werden mit dem Faktor $\frac{H}{E}$. Beispielsweise

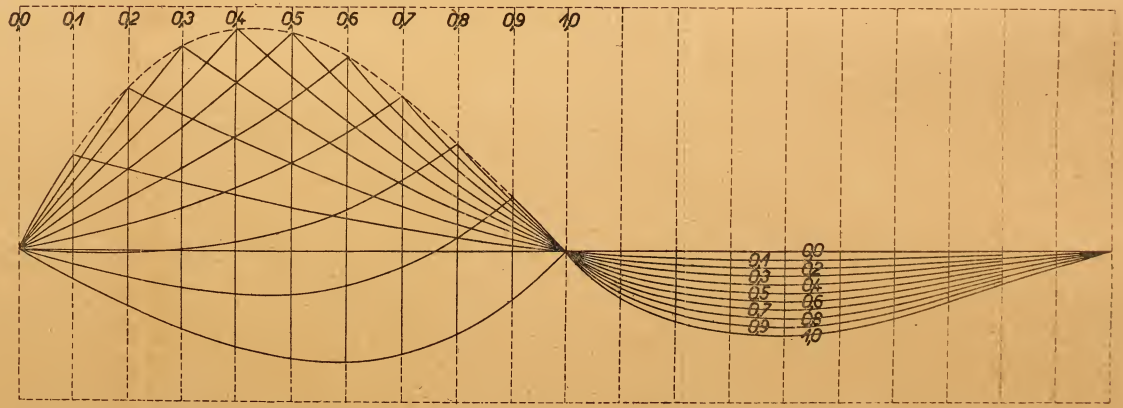
$$\delta_m^0 = \delta_m \cdot \frac{H}{E}.$$





ck und Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin.





Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin.

SCHLOMANN-OLDENBOURG

Illustrierte Technische Wörterbücher

in 6 Sprachen

(Deutsch, Englisch, Französisch, Italienisch, Russisch, Spanisch)

Unter Mitwirkung hervorragender Fachleute des In- und Auslandes

herausgegeben von Alfred Schlomann, Ingenieur

Band VII: Hebemaschinen und Transportvorrichtungen

Unter redaktioneller Mitwirkung von

Dipl.-Ing. Paul Stülpnagel

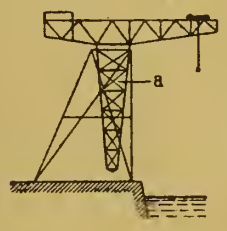
659 Seiten mit 1560 Abbildungen und 3621 Worten in jeder Sprache, kl. 8°.

Preis gebunden **Mk. 45.—**

Band XIII: Baukonstruktionen

1030 Seiten mit rund 2600 Abbildungen und Formeln und 6462 Worten in jeder Sprache, kl. 8°. — Preis gebunden **Mk. 70.—**

Probestück aus einer Seite Band VII:



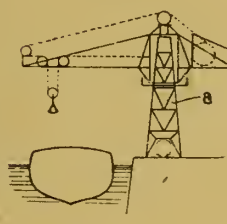
1 Pyramiden[dreh]kran (m)
pyramid crane (slewing)
grue-pyramide (f) tournante

пирамидальный поворотный кранъ (m)
gru (f) piramidale
grúa (f) piramidal giratoria

2 Stützpyramide (f)
supporting pyramid *or* tower
pyramide (f) de soutien

a

пирамидальная опора (f)
piramide (f) di sostegno
pirámide (f) de apoyo



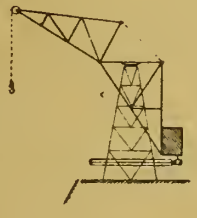
3 Turmdrehkran (m)
tower slewing crane
grue (f) pivotante à tour, grue (f) pivotante sur haut pilier *ou* pylône

башенный поворотный кранъ (m)
gru (f) girevole a torre
grúa (f) giratoria de torre

4 Turmgerüst (n)
tower framework
charpente (f) de pilier *ou* pylône

a

остовъ (m) башни
armatura (f) a torre
armadura (f) de la torre



5 Helmkran (m)
helmet *or* visor crane
grue (f) [à casque] à volée variable

кранъ (m) въ видѣ шлема
gru (f) galeiforme *od* a risvolto
grúa (f) de casco

Infolge der fortdauernden Geldentwertung sind alle Preise unverbindlich.
Für das Ausland erhöhen sich die Preise um den jeweils gültigen Zuschlag.

Verlag R. OLDENBOURG / München und Berlin

Die Statik des Eisenbaues

von

W. L Andrée

XI und 521 Seiten mit 810 Abbildungen und 1 Tafel. Gr. 8°. 1917.

Geb. Mk. 64.—

Inhalt: Druckstäbe und Säulen / Gebäude, Werkstätten und Hallen Kranlaufbahnen / Luftschiffhallen / Hellinggerüste / Fördergerüste Kühltürme / Brücken / Praktische Aufgaben

.... Was das Buch nicht nur dem Studierenden und Anfänger, sondern namentlich auch dem in der Praxis stehenden Ingenieur als Lehr-, bezw. Hilfs- und Nachschlagewerk besonders wertvoll macht, ist die Vielseitigkeit seines Stoffes, der trotz seiner Schwierigkeit und Sprödigkeit in einer überaus klaren und übersichtlichen Weise dargestellt wird ....

(Zeitschrift des österreichischen Ing. und Architektenvereins.)

Die Statik der Schwerlastkrane

Werft- und Schwimmkrane und Schwimmkranpontons

von

W. L. Andrée

V und 166 Seiten mit 305 Abbildungen im Text. Gr. 8°. 1919.

Geh. Mk. 24.— **Geb. Mk. 32.—**

.... Das neue Werk Andrées darf mit Recht als eine wertvolle Erweiterung der Kranliteratur angesehen werden und zeigt zugleich, zu welcher Leistung und Bedeutung der heutige – und nicht zuletzt der deutsche – Kranbau emporgestiegen ist. Die Anschaffung des Buches ist dem Kranbauer sehr zu empfehlen; sein Studium ist für jeden Ingenieur, sofern er die Grundsätze der Statik beherrscht, eine Freude, und gibt auch dem Manne der Wissenschaft lehrreiche und interessante Anregungen *(Stahl und Eisen.)*

Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme

Das B-U-Verfahren

von

W. L. Andrée

VI und 133 Seiten mit 348 Abbildungen im Text. Gr. 8°. 1919.

Geh. Mk. 22.- **Geb. Mk. 32.—**

..... Es wäre sehr zu begrüßen, wenn das B-U Verfahren weitere Verbreitung fände. Es ist zweifellos dazu angetan, die Lösung verwickelter, statisch unbestimmter Aufgaben dem Berechner durchsichtiger zu gestalten, als die bisherigen rechnerischen oder zeichnerischen Methoden tun. Auch der Gewinn an Zeit und Arbeitshilfe kann nicht hoch genug angeschlagen werden

Das neue Buch von Andrée ist, wie seine übrigen Werke, aufs beste ausgestattet, Druck und Abbildungen sind vorbildlich. Die Einteilung des Stoffes ist übersichtlich, die Sprache und Darstellung der Aufgaben und Lösungen klar, schlicht und gut. Ich kann daher das Werk jedem Statiker und Konstrukteur des Eisenbaues nur warm empfehlen, aber auch der Eisenbetonbauer wird in ihm manche beherzigenswerte Gebrauchsanweisung über die Berechnung seiner Gebilde finden. *(Zeitschrift des Vereins Deutscher Ing.)*

Infolge der fortdauernden Geldentwertung sind alle Preise unverbindlich.
Für das Ausland erhöhen sich die Preise um den jeweils gültigen Zuschlag.

Verlag R. OLDENBOURG / München und Berlin

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 071166026